Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Бернал, М. Горжини, Д. П. Санкович, Неидеальные бозе-газы: корреляционные неравенства и бозе-конденсация, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 3, 499–511

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf64>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 18:04:11

© 2004 г. А. Бернал*, М. Горжини*, Д. П. Санкович†

НЕИДЕАЛЬНЫЕ БОЗЕ-ГАЗЫ: КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА И БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИЯ

Рассмотрены две простые модельные системы, описывающие эффективное отталкивание в неидеальном бозе-газе. Гамильтонианы взаимодействия в этих системах представляются аналитическими функциями от операторов чисел заполнения мод с ненулевыми ($p \neq 0$) импульсами. Одна из рассматриваемых моделей содержит член взаимодействия, отвечающий отталкиванию бозонов с модой $p = 0$ и обеспечивающий термодинамическую сверхустойчивость системы; в другой модели такого слагаемого нет. С помощью аппроксимации Боголюбова–Дирака–Жинибра и метода корреляционных неравенств доказано существование бозе-конденсата в исследуемых модельных системах. В сверхустойчивом случае характер взаимодействия приводит к возможности образования конденсата при любых пространственных размерностях, температурах и положительных химических потенциалах.

Ключевые слова: неидеальный бозе-газ, бозе-конденсация, устойчивость, уравнение самосогласования, фоковское пространство.

1. ВВЕДЕНИЕ

Отличительным свойством системы тождественных не взаимодействующих между собой бозонов (идеального бозе-газа) является возможность фазового перехода. Оказывается, что в случае малых масс бозонов m , низких температур $\theta \equiv \beta^{-1} = k_B T$ (k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, выраженная в градусах Кельвина) и больших плотностей $\rho = N/V$ (N – число бозонов, V – объем системы) в системе становятся существенными квантовые эффекты. Между бозонами происходит квантовая корреляция, приводящая к появлению макроскопического квантово-механического объекта – бозе-конденсата, т.е. совокупности бозе-частиц с нулевыми импульсами [1]. Условие возникновения бозе-конденсата можно записать в виде

$$\rho > \rho_c^{(ид)}(\theta) \equiv \lambda(\theta^{-3}) \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \quad (1)$$

где величина $\lambda(\theta) \equiv (2\pi\hbar^2\beta/m)^{1/2}$ называется длиной тепловой волны де Бройля, $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана ($\zeta(3/2) \approx 2.612$). Плотность бозе-конденсата $\rho_0(\theta) = \rho -$

*Математический факультет Университета Ла Серены, Ла Серена, Чили.
E-mail: mcorgini@userena.cl

†Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: sankovch@mi.ras.ru

$\rho_c^{(ид)}(\theta)$ достигает своего максимального значения ρ при $\theta = 0$, т.е. при абсолютном нуле температур все частицы идеального бозе-газа выпадают в конденсат. Условие (1) физически означает, что бозе-конденсация происходит тогда, когда длина тепловой волны де Бройля становится сравнимой со средним расстоянием l между частицами ($l \sim \rho^{-1/3}$).

Экспериментальное обнаружение сверхтекучести [2] вызвало необходимость теоретического изучения неидеальных бозе-газов, т.е. систем бозонов, взаимодействующих друг с другом. Важнейшее значение имели работы Боголюбова [3], где на основе предположения о существовании бозе-конденсата и в слабонеидеальном бозе-газе получен спектр элементарных возбуждений, дающий правильное объяснение основных свойств сверхтекучего гелия. Боголюбов использовал идею Дирака [4] о возможности замены вторично квантованных операторов рождения-уничтожения бозонов с нулевыми импульсами обычными числами и получил аппроксимирующий квадратичный гамильтониан, допускающий всесторонний анализ. Теория Боголюбова справедлива для слабых взаимодействий и низких температур (вдали от точки фазового перехода).

Построение строгой теории бозе-конденсации в неидеальных газах связано с серьезными математическими трудностями. Лишь для немногих простых модельных систем удастся доказать возможность образования бозе-конденсата (см., например, [5]). Все эти системы имеют гамильтонианы так называемого диагонального вида, когда часть гамильтониана, отвечающая за взаимодействие, зависит тем или иным образом только от операторов чисел заполнения отдельных мод бозонного поля и коммутирует со свободным гамильтонианом. Используемые для исследования этих систем методы в основном можно свести к двум группам: методам, основанным на принципе больших уклонений [6], и методам, основанным на применении тех или иных корреляционных неравенств [7], [8].

В последнее время в связи с экспериментальным наблюдением бозе-конденсации паров атомов ^{87}Rb [9], ^{23}Na [10] и ^7Li [11], удерживаемых в магнитных ловушках, продолжилось теоретическое изучение бозе-конденсации [12]. Особенностью бозе-конденсации в этом случае является наличие внешнего гармонического потенциала, плотность бозе-конденсата имеет порядок $10^{12}\text{--}10^{13}\text{ см}^{-3}$, а критическая температура в экспериментах с ^{23}Na составила 2 мК. Пространственная неоднородность отличает данный случай бозе-конденсации от стандартного случая, используемого при исследовании сверхтекучести жидкого гелия. При этом, однако, с помощью тех или иных предположений можно моделировать внешнее поле определенным модельным взаимодействием бозонов [13].

Таким образом, рассмотрение различных модельных систем неидеального бозе-газа с целью строгого доказательства возможности (или невозможности) бозе-конденсации в этих системах составляет важный предмет исследования теории фазовых переходов. Ниже в рамках аппроксимации Боголюбова–Дирака–Жинибра доказано существование бозе-конденсата для сверхстойчивой модели неидеального бозе-газа с выделенным конденсатом (раздел 2). В разделе 3 с помощью корреляционных неравенств исследуется другая модельная система, устойчивость которой возможна лишь при неположительных значениях химического потенциала. Рассматриваемые в этой статье вопросы дополняют недавние исследования, основанные на модельных гамильтонианах, содержащих щель в одночастичном спектре [14], [15], и продолжают исследования, начатые в работах [16].

2. СВЕРХУСТОЙЧИВАЯ МОДЕЛЬ С ВЫДЕЛЕННЫМ КОНДЕНСАТОМ

Рассмотрим куб $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ объема $V = |\Lambda| = L^d$ с центром в начале координат. В этом кубе располагаются бесспиновые бозоны массы m . Гамильтониан модели

$$\hat{H}_\Lambda = \sum_{p \in \Lambda^*} (\epsilon_p - \mu) \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{\gamma_0}{V} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + V f(\hat{n}') + \gamma \sum_{p \in \Lambda^* \setminus \{0\}} g(\hat{n}_p) \quad (2)$$

описывается суммой кинетической энергии и диагональных взаимодействий отдельных мод $p = 0$ и $p \neq 0$. В выражении (2) предполагается, что $\epsilon_p = \hbar^2 p^2 / (2m)$, постоянные γ_0 и γ положительны, γ_0 не зависит от объема V , а $\gamma(V) \leq \gamma_1 V^\alpha$, причем $\gamma_1 \geq 0$ и не зависит от V , а $\alpha \leq 0$; μ — химический потенциал, $\hat{n}_p = \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p$ — числа заполнения моды p , $\hat{n}' = V^{-1} \sum_{p \in \Lambda^* \setminus \{0\}} \hat{n}_p$ — оператор полного числа частиц с ненулевыми импульсами в единице объема. Рассматриваются периодические граничные условия на границе $\partial\Lambda$ куба, дуальная решетка

$$\Lambda^* = \left\{ k \in \mathbb{R}^d : k_\alpha = \frac{2\pi}{L} n_\alpha, \ n_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \ \alpha = 1, 2, \dots, d \right\}.$$

Бозе-операторы $\hat{a}_p^\# = \{\hat{a}_p^\dagger \text{ или } \hat{a}_p\}$ действуют в фоковском пространстве $F_\Lambda = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathcal{H}^{(n)}$, где $\mathcal{H}^{(n)} = (L^2(\Lambda^n))_{\text{symm}}$ является симметризованным N -частичным гильбертовым пространством, $\mathcal{H}^{(0)} = \mathbb{C}$. Относительно функций $f(x)$ и $g(x)$, описывающих взаимодействие мод с $p \neq 0$, будем предполагать лишь самые общие условия, обеспечивающие сверхустойчивость [17] модели (2), т.е. существование и сходимости большой статистической суммы

$$\Xi_\Lambda(\beta, \mu) \equiv \text{tr}_{F_\Lambda} e^{-\beta \hat{H}_\Lambda}$$

при любых значениях химического потенциала $\mu \in \mathbb{R}^1$. В частности, для этого достаточно предположить, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и положительны и $f'(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

Для доказательства существования в модели (2) бозе-конденсата воспользуемся идеями Боголюбова–Дирака–Жинибра [3], [4], [18]. Разобьем исходное фоковское пространство F_Λ в тензорное произведение $F_{0\Lambda} \otimes F'_\Lambda$. Здесь $F_{0\Lambda}$ является симметричной тензорной алгеброй, построенной на одномерном пространстве постоянных функций (мода $p = 0$), а F'_Λ — симметричной тензорной алгеброй, построенной на ортогональном дополнении постоянных функций в $L^2(\Lambda)$. Для любого комплексного числа $c \in \mathbb{C}$ рассмотрим в $F_{0\Lambda}$ когерентный вектор

$$|c\rangle = e^{-V|c|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (V^{1/2} c)^n (\hat{a}_0^\dagger)^n |0\rangle,$$

где $|0\rangle$ — вакуумный вектор в $F_{0\Lambda}$. Тогда для любого оператора $\hat{A}$ в F_Λ можно построить оператор $\hat{A}(c)$ такой, что $\langle \varphi'_1 | \hat{A}(c) | \varphi'_2 \rangle = \langle \varphi'_1 \otimes c | \hat{A} | \varphi'_2 \otimes c \rangle$, где векторы $\varphi'_1, \varphi'_2 \in F'_\Lambda$. Переход от оператора $\hat{A}$ к оператору $\hat{A}(c)$ называется боголюбовской аппроксимацией и состоит в замене операторов $\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger$ комплексными числами $c\sqrt{V}$ и $\bar{c}\sqrt{V}$ в операторе $\hat{A}$, записанном в нормальной виковской форме.

Рассмотрим гамильтониан (2) и построим его боголюбовскую аппроксимацию

$$\hat{H}_\Lambda(c) = \sum_{p \in \Lambda^* \setminus \{0\}} (\epsilon_p - \mu) \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + V f(\hat{n}') + \gamma \sum_{p \in \Lambda^* \setminus \{0\}} g(\hat{n}_p) - \mu V |c|^2 + \gamma_0 V |c|^4. \quad (3)$$

ЛЕММА 1. Для гамильтонианов (2) и (3) выполняется неравенство

$$\mathrm{tr}_{F'_\Lambda} e^{-\beta \hat{H}_\Lambda(c)} \leq \mathrm{tr}_{F_\Lambda} e^{-\beta \hat{H}_\Lambda}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению операции взятия следа и из определения боголюбовской аппроксимации имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{F'_\Lambda} e^{-\beta \hat{H}_\Lambda(c)} &= \sup_{\{\varphi'_n\}} \sum_n \exp[-\beta \langle \varphi'_n | \hat{H}_\Lambda(c) | \varphi'_n \rangle] = \\ &= \sup_{\{\varphi'_n\}} \sum_n \exp[-\beta \langle \varphi'_n \otimes c | \hat{H}_\Lambda | \varphi'_n \otimes c \rangle] \leq \\ &\leq \sup_{\{\varphi'_n\}} \sum_n \langle \varphi'_n \otimes c | e^{-\beta \hat{H}_\Lambda} | \varphi'_n \otimes c \rangle \leq \\ &\leq \mathrm{tr}_{F_\Lambda} e^{-\beta \hat{H}_\Lambda}. \end{aligned}$$

Операция $\sup$ в этих соотношениях выполняется по произвольному ортонормальному базису в пространстве Фока F'_Λ . Первое неравенство есть неравенство Пайерлса, второе неравенство следует из того факта, что когерентный вектор $|c\rangle$ может быть взят в качестве одного (например, первого) из векторов ортонормального базиса в пространстве $F_{0\Lambda}$ [18]. Лемма 1 доказана.

Пусть

$$\langle \hat{A} \rangle_{\hat{\Gamma}} \equiv \frac{\mathrm{tr} \hat{A} e^{-\beta \hat{\Gamma}}}{\mathrm{tr} e^{-\beta \hat{\Gamma}}} \quad (4)$$

обозначает гиббсовское среднее оператора $\hat{A}$ по гамильтониану $\hat{\Gamma}$. Докажем следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 2. Существуют такие не зависящие от объема положительные постоянные u и v , что выполняется неравенство

$$\frac{1}{V} \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 (\hat{a}_0^\dagger - \bar{c}\sqrt{V}) (\hat{a}_0 - c\sqrt{V}) \rangle_{\hat{H}_\Lambda} \leq u + v \langle (\hat{a}_0^\dagger - \bar{c}\sqrt{V}) (\hat{a}_0 - c\sqrt{V}) \rangle_{\hat{H}_\Lambda}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\hat{A}^\dagger \equiv \hat{a}_0^\dagger - \bar{c}\sqrt{V}$, $\hat{A} \equiv \hat{a}_0 - c\sqrt{V}$. Тогда среднее в левой части неравенства (5) можно тождественно записать в виде

$$\frac{1}{V} \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle_{\hat{H}_\Lambda} = \left\langle \left(\frac{\hat{n}_0}{V} - \rho_0 \right) \hat{A}^\dagger \hat{A} \right\rangle_{\hat{H}_\Lambda} + \rho_0 \langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle_{\hat{H}_\Lambda}, \quad (6)$$

где положительная постоянная ρ_0 будет определена ниже. Получим теперь оценку сверху для среднего

$$\Upsilon \equiv \left\langle \left(\frac{\hat{n}_0}{V} - \rho_0 \right) \hat{A}^\dagger \hat{A} \right\rangle_{\hat{H}_\Lambda}. \quad (7)$$

Это среднее можно записать в базисе чисел заполнения моды $k = 0$:

$$\Upsilon = \Xi_{0\Lambda}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta V h_0(\mu, n/V)} \left(\frac{n}{V} - \rho_0 \right) \langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle_0, \quad (8)$$

где

$$h_0(\mu, \rho) \equiv - \left(\mu + \frac{\gamma_0}{V} \right) \rho + \gamma_0 \rho^2, \quad (9)$$

$$\langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle_0 \equiv \langle n | \hat{A}^\dagger \hat{A} | n \rangle = n + V |c|^2, \quad (10)$$

$$\Xi_{0\Lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta V h_0(\mu, n/V)}. \quad (11)$$

Пусть $\xi > \rho_0$ — произвольное положительное число, не зависящее от V . Разобьем теперь всю область суммирования в выражении (8) на три области, т.е. представим среднее Υ в виде $\Upsilon \equiv \Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \Upsilon_3$ и оценим сверху каждое из этих трех слагаемых. Получаем

$$\Upsilon_1 \equiv \Xi_{0\Lambda}^{-1} \sum_{0 \leq n < V \rho_0} e^{-\beta V h_0(\mu, n/V)} \left(\frac{n}{V} - \rho_0 \right) \langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle_0 \leq 0, \quad (12)$$

$$\Upsilon_2 \equiv \Xi_{0\Lambda}^{-1} \sum_{V \rho_0 \leq n < V(\rho_0 + \xi)} e^{-\beta V h_0(\mu, n/V)} \left(\frac{n}{V} - \rho_0 \right) \langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle_0 \leq \xi \langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle_0. \quad (13)$$

Рассмотрим среднее по бесконечной области суммирования

$$\Upsilon_3 \equiv \Xi_{0\Lambda}^{-1} \sum_{n \geq V(\rho_0 + \xi)} e^{-\beta V h_0(\mu, n/V)} \left(\frac{n}{V} - \rho_0 \right) \langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle_0.$$

Воспользуемся выпуклостью вниз функции $h_0(\mu, \rho)$. Тогда

$$h_0\left(\mu, \frac{n}{V}\right) \geq a_1 + a_2 \left(\frac{n}{V} - \rho_0 - \xi \right), \quad (14)$$

где

$$\inf_{\rho \geq 0} h_0(\mu, \rho) = h_0(\mu, \rho_0)$$

задает значение введенной выше постоянной ρ_0 . Нетрудно установить, что

$$\rho_0 = \max\left(\frac{\mu}{2\gamma_0} + \frac{1}{2V}, 0\right), \quad (15)$$

$a_2 \equiv 2\gamma_0 \xi > 0$ и при условии $\xi > \rho_0$ величина $a_1 \equiv h_0(\mu, \rho_0 + \xi)$ в неравенстве (14) также положительна. Тогда

$$\begin{aligned} \Upsilon_3 &\leq \Xi_{0\Lambda}^{-1} \sum_{n \geq V(\rho_0 + \xi)} \left(\frac{n}{V} - \rho_0 \right) e^{-\beta V [a_1 + a_2(n/V - \rho_0 - \xi)]} (n + V |c|^2) = \\ &= \Xi_{0\Lambda}^{-1} \frac{1}{V} e^{-\beta V a_1} \sum_{n \geq V(\rho_0 + \xi)} (n - V \rho_0)^2 e^{-\beta a_2 [n - V(\rho_0 + \xi)]} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Xi_{0\Lambda}^{-1}(\rho_0 + |c|^2)e^{-\beta V a_1} \sum_{n \geq V(\rho_0 + \xi)} (n - V\rho_0)e^{-\beta a_2[n - V(\rho_0 + \xi)]} = \\
& = \Xi_{0\Lambda}^{-1}e^{-\beta V a_1} \left[\frac{1}{V} \frac{e^{-\beta a_2}(1 + e^{-\beta a_2})}{(1 - e^{-\beta a_2})^3} + 2\xi \frac{e^{-\beta a_2}}{(1 - e^{-\beta a_2})^2} + \right. \\
& \left. + \xi^2 V \frac{1}{1 - e^{-\beta a_2}} + (\rho_0 + |c|^2) \left[\frac{e^{-\beta a_2}}{(1 - e^{-\beta a_2})^2} + \xi V \frac{1}{1 - e^{-\beta a_2}} \right] \right]. \quad (16)
\end{aligned}$$

С учетом свойства выпуклости функции (9) для любого $\sigma > 0$ и достаточно малого ξ' , $|n/V - \rho_0| < \xi' < \xi$, будет выполняться неравенство

$$h_0(\mu, \rho_0) \leq h_0\left(\mu, \frac{n}{V}\right) \leq h_0(\mu, \rho_0) + \frac{\sigma}{2}. \quad (17)$$

Тогда получим следующую оценку снизу для большой статистической суммы:

$$\Xi_{0\Lambda} \geq \sum_{\rho_0 - \xi' \leq n/V \leq \rho_0 + \xi'} e^{-\beta V h_0(\mu, n/V)} \geq 2\xi' V e^{-\beta V [h_0(\mu, \rho_0) + \sigma/2]}. \quad (18)$$

С учетом последнего неравенства, выбирая $0 < \sigma < 2[a_1 - h_0(\mu, \rho_0)]$, найдем

$$\Upsilon_3 \leq \text{const} \cdot e^{-\beta V \delta}, \quad (19)$$

где $\delta > 0$. Объединяя вместе оценки (12), (13) и (19), получаем требуемое неравенство (5). Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА. Системы с гамильтонианами (2) и (3) термодинамически эквивалентны в смысле Вентцеля, т.е.

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \sup_c p_\Lambda(c) = p, \quad (20)$$

где $p_\Lambda(c) = (\beta V)^{-1} \ln \text{tr} e^{-\beta \hat{H}_\Lambda(c)}$, $p_\Lambda = (\beta V)^{-1} \ln \text{tr} e^{-\beta \hat{H}_\Lambda}$, $p = \lim_{V \rightarrow \infty} p_\Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся неравенством Боголюбова для давлений [19], которое с учетом леммы 1 примет вид

$$0 \leq p_\Lambda - p_\Lambda(c) \leq \frac{1}{V} \langle \hat{H}_\Lambda(c) - \hat{H}_\Lambda \rangle_{\hat{H}_\Lambda}. \quad (21)$$

Чтобы записать среднее в правой части неравенства (21), воспользуемся приемом Жинибра [18], разлагая гамильтониан $\hat{H}_\Lambda(c)$ в ряд Тейлора около значений $\hat{a}_0^\#$. Производные $\hat{H}_\Lambda$ по $\hat{a}_0^\#$ можно представить через соответствующие коммутаторы с операторами $\hat{a}_0^\#$, поскольку $[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = 1$ и выполняется тождество Якоби. Тогда

$$\begin{aligned}
\hat{H}_\Lambda(c) - \hat{H}_\Lambda &= (\bar{c}\sqrt{V} - \hat{a}_0^\dagger)[\hat{a}_0, \hat{H}_\Lambda] + \text{э.с.} + \\
&+ \frac{1}{2}(\bar{c}\sqrt{V} - \hat{a}_0^\dagger)^2[\hat{a}_0, [\hat{a}_0, \hat{H}_\Lambda]] + \text{э.с.} + \\
&+ (\bar{c}\sqrt{V} - \hat{a}_0^\dagger)[\hat{a}_0, [\hat{H}_\Lambda, \hat{a}_0^\dagger]](c\sqrt{V} - \hat{a}_0) + \\
&+ \frac{1}{2}(\bar{c}\sqrt{V} - \hat{a}_0^\dagger)^2[\hat{a}_0, [\hat{a}_0, [\hat{H}_\Lambda, \hat{a}_0^\dagger]]](c\sqrt{V} - \hat{a}_0) + \text{э.с.} + \\
&+ \frac{1}{4}(\bar{c}\sqrt{V} - \hat{a}_0^\dagger)^2[\hat{a}_0, [\hat{a}_0, [[\hat{H}_\Lambda, \hat{a}_0^\dagger], \hat{a}_0^\dagger]]](c\sqrt{V} - \hat{a}_0)^2.
\end{aligned}$$

После элементарных преобразований последнюю формулу можно переписать в виде

$$\hat{H}_\Lambda(c) - \hat{H}_\Lambda = -\frac{1}{2}[\hat{A}^\dagger \hat{A}, [\hat{H}_\Lambda, \hat{A}^\dagger \hat{A}]] + 2\hat{A}^\dagger[\hat{A}, [\hat{H}_\Lambda, \hat{A}^\dagger]]\hat{A} - \frac{3}{2}\hat{A}^\dagger[\hat{A}, \hat{H}_\Lambda] - \frac{3}{2}[\hat{H}_\Lambda, \hat{A}^\dagger]\hat{A}, \quad (22)$$

где $\hat{A} \equiv \hat{a}_0 - c\sqrt{V}$. Рассмотрим отдельные слагаемые в формуле (22). Среднее от первого слагаемого неположительно, что следует из неравенства

$$\langle [\hat{B}, [\hat{\Gamma}, \hat{B}^\dagger]] \rangle_{\hat{\Gamma}} \geq 0,$$

справедливого для произвольного оператора $\hat{B}$ и самосопряженного оператора $\hat{\Gamma}$ – гамильтониана. Чтобы доказать последнее неравенство, достаточно заметить, что

$$\beta([\hat{B}, \hat{\Gamma}], [\hat{B}, \hat{\Gamma}])_{\hat{\Gamma}} = \langle [\hat{B}, [\hat{\Gamma}, \hat{B}^\dagger]] \rangle_{\hat{\Gamma}},$$

где $(\dots)_{\hat{\Gamma}}$ – внутреннее произведение Боголюбова [20] по гамильтониану $\hat{\Gamma}$:

$$(\hat{X}, \hat{Y})_{\hat{\Gamma}} = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau \langle e^{-(\beta-\tau)\hat{\Gamma}} \hat{X}^\dagger e^{-\tau\hat{\Gamma}} \hat{Y} \rangle_{\hat{\Gamma}}.$$

Рассмотрим второе слагаемое в формуле (22). Поскольку

$$[\hat{a}_0, [\hat{H}_\Lambda, \hat{a}_0^\dagger]] = -\mu + \frac{4\gamma_0}{V} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0, \quad (23)$$

его можно записать в виде

$$2\hat{A}^\dagger[\hat{A}, [\hat{H}_\Lambda, \hat{A}^\dagger]]\hat{A} = -2\mu(\hat{a}_0^\dagger - \bar{c}\sqrt{V})(\hat{a}_0 - c\sqrt{V}) + \frac{8\gamma_0}{V}(\hat{a}_0^\dagger - \bar{c}\sqrt{V})\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0(\hat{a}_0 - c\sqrt{V}). \quad (24)$$

Средние от двух последних слагаемых в (22) не зависят от c , действительны и равны. Воспользуемся тождеством

$$-2\hat{A}^\dagger[\hat{A}, \hat{H}_\Lambda] = [\hat{A}^\dagger, [\hat{H}_\Lambda, \hat{A}]] + [\hat{A}^\dagger, [\hat{H}_\Lambda, \hat{A}]]_+, \quad (25)$$

где $[\dots]_+$ обозначает антикоммутатор. Используя спектральное разложение гамильтониана $\hat{H}_\Lambda$, можно показать, что

$$|\langle [\hat{A}^\dagger[\hat{A}, \hat{H}_\Lambda]]_+ \rangle_{\hat{H}_\Lambda}| \leq \langle [\hat{A}, [\hat{H}_\Lambda, \hat{A}^\dagger]] \rangle_{\hat{H}_\Lambda} + 2\beta^{-1} \langle [\hat{A}, \hat{A}^\dagger]_+ \rangle_{\hat{H}_\Lambda}. \quad (26)$$

С учетом формул (23), (25), (26) среднее от суммы двух последних слагаемых в формуле (22) принимает вид

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{2} \langle \hat{A}^\dagger[\hat{A}, \hat{H}_\Lambda] \rangle_{\hat{H}_\Lambda} - \frac{3}{2} \langle [\hat{H}_\Lambda, \hat{A}^\dagger]\hat{A} \rangle_{\hat{H}_\Lambda} = -3 \langle \hat{A}^\dagger[\hat{A}, \hat{H}_\Lambda] \rangle_{\hat{H}_\Lambda} \leq \\ & \leq \frac{3}{2} \left[-2\mu + \frac{8\gamma_0}{V} \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle_{\hat{H}_\Lambda} + 2\beta^{-1} \langle [\hat{A}, \hat{A}^\dagger]_+ \rangle_{\hat{H}_\Lambda} \right] = \\ & = 3\beta^{-1} \langle [\hat{a}_0 - c\sqrt{V}, \hat{a}_0^\dagger - \bar{c}\sqrt{V}]_+ \rangle_{\hat{H}_\Lambda} + 3 \left(\frac{4\gamma_0}{V} \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle_{\hat{H}_\Lambda} - \mu \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, учитывая неположительность первого слагаемого в (22), а также формулы (24) и (27), имеем

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}_\Lambda(c) - \hat{H}_\Lambda \rangle_{\hat{H}_\Lambda} &\leq -2\mu \langle (\hat{a}_0^\dagger - \bar{c}\sqrt{V})(\hat{a}_0 - c\sqrt{V}) \rangle_{\hat{H}_\Lambda} + \\ &+ \frac{8\gamma_0}{V} \langle (\hat{a}_0^\dagger - \bar{c}\sqrt{V})\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 (\hat{a}_0 - c\sqrt{V}) \rangle_{\hat{H}_\Lambda} + \\ &+ 3 \left(\frac{4\gamma_0}{V} \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle_{\hat{H}_\Lambda} - \mu \right) + 3\beta^{-1} \langle [\hat{a}_0 - c\sqrt{V}, \hat{a}_0^\dagger - \bar{c}\sqrt{V}]_+ \rangle_{\hat{H}_\Lambda}. \end{aligned} \quad (28)$$

Учтем теперь неравенство (5) из леммы 2. Тогда неравенство (28) примет вид

$$\langle \hat{H}_\Lambda(c) - \hat{H}_\Lambda \rangle_{\hat{H}_\Lambda} \leq \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2} \langle [\hat{a}_0 - c\sqrt{V}, \hat{a}_0^\dagger - \bar{c}\sqrt{V}]_+ \rangle_{\hat{H}_\Lambda}, \quad (29)$$

где σ_1, σ_2 — определенные положительные постоянные, не зависящие от V . Теперь для доказательства теоремы с учетом неравенства (21) необходимо показать, что

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \inf_c \left[\frac{1}{V} \langle \hat{H}_\Lambda(c) - \hat{H}_\Lambda \rangle_{\hat{H}_\Lambda} \right] = 0. \quad (30)$$

Воспользуемся методом работы [21], применявшимся позднее при доказательстве основного результата в работе [18]. Введем источники, т.е. рассмотрим гамильтонианы

$$\begin{aligned} \hat{H}_\Lambda^{(\nu)} &\equiv \hat{H}_\Lambda - \sqrt{V}(\bar{\nu}\hat{a}_0 + \nu\hat{a}_0^\dagger), \\ \hat{H}_\Lambda^{(\nu)}(c) &\equiv \hat{H}_\Lambda(c) - V(\bar{\nu}c + \nu\bar{c}). \end{aligned}$$

Наилучшая оценка достигается в (29) при $c^* = \langle \hat{a}_0 / \sqrt{V} \rangle_{\hat{H}_\Lambda^{(\nu)}}$, причем $|c^*| \leq M < \infty$. Воспользуемся неравенством [22]

$$\frac{1}{2} \langle [\delta\hat{a}_0^\dagger, \delta\hat{a}_0]_+ \rangle_{\hat{H}_\Lambda^{(\nu)}} \leq (\delta\hat{a}_0^\dagger, \delta\hat{a}_0)_{\hat{H}_\Lambda^{(\nu)}} + \frac{\beta}{12} \langle [\delta\hat{a}_0, [\hat{H}_\Lambda^{(\nu)}, \delta\hat{a}_0^\dagger]] \rangle_{\hat{H}_\Lambda^{(\nu)}}, \quad (31)$$

где обозначено $\delta\hat{a}_0^\# = \hat{a}_0^\# - \langle \hat{a}_0^\# \rangle_{\hat{H}_\Lambda^{(\nu)}}$. Второе слагаемое в правой части неравенства (31) оценивается как

$$\langle [\delta\hat{a}_0, [\hat{H}_\Lambda^{(\nu)}, \delta\hat{a}_0^\dagger]] \rangle_{\hat{H}_\Lambda^{(\nu)}} \leq -\mu + 4\gamma_0\rho_\Lambda^{(\nu)}, \quad (32)$$

где $\rho_\Lambda^{(\nu)} \equiv \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle_{\hat{H}_\Lambda^{(\nu)}} / V < \infty$. Для оценки первого слагаемого в правой части (31) воспользуемся формулой

$$(\delta\hat{a}_0^\dagger, \delta\hat{a}_0)_{\hat{H}_\Lambda^{(\nu)}} = \beta^{-1} \frac{\partial^2 p_\Lambda^{(\nu)}}{\partial \bar{\nu} \partial \nu},$$

где $p_\Lambda^{(\nu)} \equiv (\beta V)^{-1} \ln \text{tr} e^{-\beta \hat{H}_\Lambda^{(\nu)}}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\bar{\nu} = \nu = r \geq 0$. Тогда

$$(\delta\hat{a}_0^\dagger, \delta\hat{a}_0)_{\hat{H}_\Lambda^{(\nu)}} = \frac{1}{4\beta r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp_\Lambda^{(\nu)}}{dr} \right). \quad (33)$$

Обозначив

$$\Delta(r) \equiv p_{\Lambda}^{(\nu)} - \sup_c p_{\Lambda}^{(\nu)}(c),$$

получим с учетом соотношений (21), (29), (31), (32)

$$\Delta(r) \leq V^{-1} \left[\sigma_3 + \sigma_2 (\delta \hat{a}_0^\dagger, \delta \hat{a}_0)_{\hat{H}_{\Lambda}^{(\nu)}} \right], \quad (34)$$

где $\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2 \beta [4\gamma_0 \rho_{\Lambda}^{(\nu)} - \mu]/12$. Умножим обе стороны неравенства (34) на r , проинтегрируем по r в пределах от R до $R + \varepsilon$ и воспользуемся формулой (33). Тогда

$$\int_R^{R+\varepsilon} r \Delta(r) dr \leq V^{-1} \left[\sigma_3 \frac{(R + \varepsilon)^2 - R^2}{2} + \frac{\sigma_2}{4\beta} \left(r \frac{dp_{\Lambda}^{(\nu)}}{dr} \right) \Big|_R^{R+\varepsilon} \right].$$

Заметим теперь, что

$$\frac{dp_{\Lambda}^{(\nu)}}{dr} = \frac{2}{V} \langle \hat{a}_0 \rangle_{\hat{H}_{\Lambda}^{(\nu)}} \leq 2\sqrt{\rho_{\Lambda}^{(\nu)}}. \quad (35)$$

Поэтому

$$\int_R^{R+\varepsilon} r \Delta(r) dr \leq V^{-1} \left[\sigma_3 \frac{(R + \varepsilon)^2 - R^2}{2} + \frac{\sigma_2}{2\beta} \sqrt{\rho_{\Lambda}^{(\nu)}} (2R + \varepsilon) \right]. \quad (36)$$

Учтем, что

$$\left| \frac{d\Delta(r)}{dr} \right| \leq 2 \left(\sqrt{\rho_{\Lambda}^{(\nu)}} + M \right). \quad (37)$$

Оценка (37) следует из определения $\Delta(r)$ и неравенства (35) и ведет к неравенству

$$\Delta(R) \leq \Delta(r) + 2(r - R) \left(\sqrt{\rho_{\Lambda}^{(\nu)}} + M \right), \quad (38)$$

где $r \in [R, R + \varepsilon]$. Умножая (38) на r и интегрируя, имеем

$$\Delta(R) \frac{(R + \varepsilon)^2 - R^2}{2} \leq \int_R^{R+\varepsilon} r \Delta(r) dr + 2 \left(\sqrt{\rho_{\Lambda}^{(\nu)}} + M \right) \left(\frac{r^3}{3} - R \frac{r^2}{2} \right) \Big|_R^{R+\varepsilon}.$$

Воспользуемся теперь неравенством (36). Тогда получим, что

$$\Delta(R) \leq \frac{1}{V} \left[\sigma_3 + \frac{\sigma_2}{\beta \varepsilon} \sqrt{\rho_{\Lambda}^{(\nu)}} + \left(\sqrt{\rho_{\Lambda}^{(\nu)}} + M \right) \varepsilon \frac{R + 2\varepsilon/3}{R + \varepsilon/2} \right]. \quad (39)$$

Минимизируя правую часть (39) по ε , получаем, что при $V \rightarrow \infty$ наилучшую оценку дает $\varepsilon \sim 1/\sqrt{V}$. При этом $\Delta(R) \leq \eta V^{-1/2}$, где постоянная η не зависит от объема V и может быть взята не зависящей от R на любом ограниченном интервале, что после предельного перехода $\nu \rightarrow 0$ доказывает неравенство (30). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и леммы Гриффитса [23] следует уравнение для определения плотности бозе-конденсата:

$$\rho_0 = \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0}{V} \right\rangle_{\hat{H}_\Lambda^{(\nu)}} = |c^*|^2.$$

Это уравнение выражает необходимое условие максимума выпуклой функции $p(c) = \lim_{V \rightarrow \infty} p_\Lambda(c)$ и имеет вид

$$\left\langle \frac{\partial \hat{H}_\Lambda(c)}{\partial c} \right\rangle_{\hat{H}_\Lambda(c)} = 0. \quad (40)$$

Из уравнения (40) получаем для плотности бозе-конденсата

$$\rho_0 = \max\left(\frac{\mu}{2\gamma_0}, 0\right). \quad (41)$$

Заметим, что $\hat{H}_\Lambda(\rho_0) \leq \hat{H}_\Lambda(0)$, т.е. нетривиальное решение уравнения самосогласования (40) предпочтительнее тривиального решения, всегда существующего для градиентно-инвариантного случая ($\nu = 0$).

Таким образом, в модели с гамильтонианом (2) при любых температурах и пространственных размерностях для всех положительных значений химического потенциала существует бозе-конденсат, плотность которого линейно растет с ростом химического потенциала.

3. МОДЕЛЬ С ИСКЛЮЧЕННОЙ МОДОЙ $p = 0$

Полученный в предыдущем разделе результат (41) связан со специально подобранной структурой исходного гамильтониана (2), обеспечивающей сверхустойчивость модели. Если в гамильтониане (2) положить $f(\hat{n}^i) = 0$ и считать, например, что

$$\gamma g(\hat{n}_p) = \frac{1}{V} g_p(\hat{n}_p^2 - \hat{n}_p) \geq 0, \quad g_p > 0,$$

то модель будет обладать устойчивостью лишь при $\mu \leq 0$. В этом случае из условия (41) будет следовать, что $\rho_0 = 0$ при $\gamma_0 \neq 0$, и мы получаем результат работы [14]. Поэтому в данном разделе мы изучим случай, когда $\gamma_0 = 0$, и рассмотрим модельный гамильтониан

$$\hat{H}_\Lambda = \sum_{p \in \Lambda^*} (\epsilon_p - \mu) \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \gamma \sum_{p \in \Lambda^* \setminus \{0\}} g(\hat{n}_p). \quad (42)$$

Для этой модели уравнение самосогласования (40) примет вид $\mu c = 0$, т.е. мы получаем аналогично случаю идеального бозе-газа [18], что бозе-конденсация возможна только при $\mu = 0$, а плотность бозе-конденсата $|c|^2$ не определяется уравнением самосогласования. Будем считать, что в гамильтониане (42) функция $g(x)$ положительна и монотонно возрастает при $x \in [0, \infty)$, а $\gamma > 0$. В этом случае условие устойчивости, очевидно, имеет вид $\mu \leq 0$.

Воспользуемся корреляционным неравенством [7]

$$\beta \langle \hat{X}^\dagger [\hat{H}_\Lambda, \hat{X}] \rangle_{\hat{H}_\Lambda} \geq \langle \hat{X}^\dagger \hat{X} \rangle_{\hat{H}_\Lambda} \ln \frac{\langle \hat{X}^\dagger \hat{X} \rangle_{\hat{H}_\Lambda}}{\langle \hat{X} \hat{X}^\dagger \rangle_{\hat{H}_\Lambda}}, \quad (43)$$

справедливым для любой локальной наблюдаемой $\hat{X}$ из области определения $[\hat{H}_\Lambda, \cdot]$. Положим в неравенстве (43) $\hat{X} = \hat{a}_k$, $k \neq 0$. Поскольку

$$[\hat{H}_\Lambda, \hat{a}_k] = -(\epsilon_k - \mu)\hat{a}_k - \gamma\hat{a}_k[g(\hat{n}_k) - g(\hat{n}_k - 1)],$$

то

$$-(\epsilon_k - \mu)\langle \hat{n}_k \rangle_{\hat{H}_\Lambda} - \gamma\langle \hat{n}_k[g(\hat{n}_k) - g(\hat{n}_k - 1)] \rangle_{\hat{H}_\Lambda} \geq \frac{1}{\beta} \langle \hat{n}_k \rangle_{\hat{H}_\Lambda} \ln \frac{\langle \hat{n}_k \rangle_{\hat{H}_\Lambda}}{1 + \langle \hat{n}_k \rangle_{\hat{H}_\Lambda}}. \quad (44)$$

С учетом свойства монотонности функции $g(x)$ получаем

$$\begin{aligned} \langle n_k[g(\hat{n}_k) - g(\hat{n}_k - 1)] \rangle_{\hat{H}_\Lambda} &= \Xi_{k\Lambda}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n[g(n) - g(n-1)]e^{-\beta h_k(n)} = \\ &= \Xi_{k\Lambda}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n[g(n) - g(n-1)]e^{-\beta h_k(n)} \geq 0, \end{aligned}$$

где

$$\Xi_{k\Lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta h_k(n)}, \quad h_k(n) = (\epsilon_k - \mu)n + \gamma g(n).$$

Тогда неравенство (44) примет вид

$$\ln \frac{1 + \langle \hat{n}_k \rangle_{\hat{H}_\Lambda}}{\langle \hat{n}_k \rangle_{\hat{H}_\Lambda}} \geq \beta(\epsilon_k - \mu),$$

откуда следует, что

$$\langle \hat{n}_k \rangle_{\hat{H}_\Lambda} \leq \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}, \quad k \neq 0. \quad (45)$$

Поскольку средняя плотность полного числа частиц в системе есть по определению

$$\rho_\Lambda(\beta, \mu) = \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*} \langle \hat{n}_k \rangle_{\hat{H}_\Lambda},$$

то неравенство (45) приводит к условию появления в системе (42) бозе-конденсата

$$\rho = \lim_{V \rightarrow \infty} \rho_\Lambda > \rho_c^{(ид)}(\theta),$$

причем предельная плотность бозе-конденсата

$$\rho_0(\theta) \equiv \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \langle \hat{n}_0 \rangle_{\hat{H}_\Lambda} = \rho - \rho_c^{(ид)}(\theta).$$

Полученные условия бозе-конденсации для модели (42) полностью совпадают с соответствующими условиями в идеальном бозе-газе, т.е. в данном случае мы получаем стандартный случай бозе-конденсации, возможной только при пространственных размерностях, больших двух, и при значении химического потенциала $\mu = 0$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как отмечалось во введении, строгое доказательство возможности образования бозе-конденсата в системах взаимодействующих бозонов составляет важную задачу современных исследований в теории фазовых переходов. Эксперименты с парами щелочных металлов, удерживаемыми магнитными ловушками [9]–[11], показали, что во всех исследованных случаях образование бозе-конденсата происходит при более высоких температурах, чем те, которые предсказывает теория идеального бозе-газа для соответствующих плотностей и атомных масс. Связано ли такое повышение критической температуры только с наличием взаимодействия и какова при этом роль внешнего отталкивательного потенциала, еще предстоит выяснить. Следует при этом обратить внимание, что в экспериментах с ^7Li [11] длина рассеяния $a < 0$; это соответствует случаю межатомного притяжения. С точки зрения гиббсовской равновесной термодинамики этот случай отвечает неустойчивому взаимодействию, приводящему к коллапсу конденсата.

В данной работе мы рассмотрели случай однородных модельных систем (2) и (42) (без наличия внешнего поля) с эффективным отталкиванием между частицами. Существенное различие этих случаев состоит в том, что для модели (2) выполнено условие сверхустойчивости, т.е. $\mu \in \mathbb{R}^1$, а для модели (42) $\mu \leq 0$. При этом взаимодействие в обоих случаях носит специфический характер: отсутствует взаимодействие моды $p = 0$ с модами $p \neq 0$. Оказалось, что для модели (2) возможно образование бозе-конденсата при всех температурах и любых положительных химических потенциалах. Плотность бозе-конденсата (41) не зависит от пространственной размерности системы. В модели (42) условие образования бозе-конденсата (46) более привычно и совпадает с соответствующим случаем идеального бозе-газа. Бозе-конденсация типа (41) была недавно получена в работах [14], [15]. Однако там рассматривалась несверхустойчивая система, для которой $\mu \leq 0$, и возможность появления конденсата была связана со специальным видом одночастичного спектра ϵ_p , когда $\epsilon_0 < 0$, $\epsilon_{p \neq 0} = \hbar^2 p^2 / (2m)$. Данный вид спектра ϵ_p вошел в употребление после работ [24], где рассматривался идеальный бозе-газ с граничными условиями смешанного типа, отвечающими притяжению (см., например, [25] – одну из последних работ на эту тему). Такой тип граничных условий означает, что конденсат локализован вблизи границы, и бозе-конденсация, таким образом, является чисто поверхностным эффектом.

Благодарности. Работа частично финансово поддержана FONDECYT, grant 1010759 (Chile–2001), Programa de Magister en Matemáticas, Universidad de La Serena, Chile; РФФИ, проект 02-01-00795, и программой РАН “Математические методы нелинейной динамики”.

Список литературы

- [1] *S. N. Bose.* Z. Phys. 1924. V. 26. P. 178; *A. Einstein.* Sitz. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. 1925. V. 1. P. 3.
- [2] *П. Л. Капица.* ДАН СССР. 1938. Т. 18. С. 21.
- [3] *Н. Н. Боголюбов.* Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. Т. 11. № 1. С. 77; Вестн. МГУ. 1947. № 7. С. 43.
- [4] *П. А. М. Дирак.* Основы квантовой механики. М.: ОНТИ, 1937.

- [5] *K. Huang, C. N. Yang, J. M. Luttinger.* Phys. Rev. 1957. V. 105. P. 776; *E. B. Davies.* Commun. Math. Phys. 1972. V. 28. P. 69; *M. Fannes, A. Verbeure.* J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 1809; *T. C. Dorlas, J. T. Lewis, J. V. Pulè.* Commun. Math. Phys. 1993. V. 156. P. 37.
- [6] *M. van den Berg, J. T. Lewis, J. V. Pulè.* Commun. Math. Phys. 1988. V. 118. P. 61; 1990. V. 127. P. 41.
- [7] *M. Fannes, A. Verbeure.* Commun. Math. Phys. 1977. V. 55. P. 125; V. 57. P. 165.
- [8] *Д. П. Санкович.* ТМФ. 1989. Т. 79. № 3. С. 460.
- [9] *M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell.* Science. 1995. V. 269. P. 198.
- [10] *K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 3969.
- [11] *C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, R. G. Hulet.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 1687.
- [12] *E. H. Lieb, R. Seiringer, J. Yngvason.* Commun. Math. Phys. 2001. V. 224. P. 17; *E. H. Lieb, R. Seiringer.* Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 170409.
- [13] *A. S. Parkins, D. F. Walls.* Phys. Rep. 1998. V. 303. P. 1; *J. A. Dunningham, M. J. Collett, D. F. Walls.* Phys. Lett. A. 1998. V. 245. P. 49.
- [14] *J.-B. Bru, V. A. Zagrebnov.* Physica A. 1999. V. 268. P. 309.
- [15] *J.-B. Bru, B. Nachtergaele, V. A. Zagrebnov.* J. Stat. Phys. 2002. V. 109. P. 143.
- [16] *M. Corgini, D. P. Sankovich.* Int. J. Mod. Phys. B. 1997. V. 11. № 28. P. 3329; *М. Горжени, Д. П. Санкович, Н. И. Танака.* ТМФ. 1999. Т. 120. № 1. С. 130; *M. Corgini, D. P. Sankovich.* Mod. Phys. Lett. B. 1999. V. 13. № 12, 13. P. 411; Int. J. Mod. Phys. B. 2002. V. 16. № 3. P. 497; *М. Горжени, Д. П. Санкович.* ТМФ. 2002. Т. 132. № 1. С. 150.
- [17] *Д. Рюэль.* Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 1971.
- [18] *J. Ginibre.* Commun. Math. Phys. 1968. V. 8. P. 26.
- [19] *N. N. Bogolubov.* Phys. Abh. Sov. 1962. V. 1. P. 113.
- [20] *У. Браттели, Д. Робинсон.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982; *F. J. Dyson, E. H. Lieb, B. Simon.* J. Stat. Phys. 1978. V. 18. P. 335.
- [21] *N. N. Bogolubov, Jr.* Physica. 1966. V. 32. P. 933.
- [22] *A. Brooks Harris.* J. Math. Phys. 1967. V. 8. P. 1044.
- [23] *R. Griffiths.* J. Math. Phys. 1964. V. 5. P. 1215.
- [24] *D. W. Robinson.* Commun. Math. Phys. 1976. V. 50. P. 53; *L. J. Landau, I. F. Wilde.* Commun. Math. Phys. 1979. V. 70. P. 43.
- [25] *J. Lauwers, A. Verbeure.* J. Stat. Phys. 2002. V. 108. P. 123.

Поступила в редакцию 30.I.2003 г.,
после доработки 4.IX.2003 г.