Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Анохина, А. Ю. Морозов, Ш. Р. Шакиров, Результат как детерминант комплекса Кошуля, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 3, 403–433

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6407>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 18:16:43

© 2009 г. А. С. Анохина^{*†}, А. Ю. Морозов^{*}, Ш. Р. Шакиров^{*†}

РЕЗУЛЬТАНТ КАК ДЕТЕРМИНАНТ КОМПЛЕКСА КОШУЛЯ

Важной характеристикой линейного отображения между векторными пространствами является детерминант. В современной теории активно используются два обобщения линейных отображений: линейные комплексы (нильпотентная цепочка линейных отображений) и нелинейные отображения. При этом обобщениями детерминанта линейного отображения являются соответственно детерминант комплекса и результат. Оказывается, что эти две величины связаны: результат нелинейного отображения есть детерминант соответствующего комплекса Кошуля. Приведены элементарное введение в эти понятия и соотношения, которые определенно займут свое место в дальнейшем развитии теоретической физики.

Ключевые слова: результат, комплекс Кошуля, нелинейная алгебра.

1. ВВЕДЕНИЕ

Происхождение матриц и детерминантов восходит к древним цивилизациям. Примерно во II веке до н.э. вавилоняне изучали линейные уравнения, а китайцы использовали матрицы для решения простых систем линейных уравнений от двух или трех неизвестных [1]. Однако только в конце XVII века эти идеи получили широкое распространение и дополнились различными приложениями. Теория линейных уравнений и преобразований, ныне известная как линейная алгебра, полностью доказала свою состоятельность не только в чистой науке, но и в прикладных задачах и в технике. Например, Гаусс применял линейную алгебру для определения орбиты астероида Паллада [2]. Используя данные наблюдения за Палладой, снятые с 1803 г. по 1809 г., Гаусс получил и решил систему линейных уравнений с шестью неизвестными.

Вскоре после этого ученые (Кэли, Сильвестр и др. [3], [4]) осознали, что линейная алгебра представляет собой лишь простейший случай более общей конструкции – теории полиномиальных уравнений и преобразований. Оказалось, что многие разделы линейной алгебры имеют естественное обобщение на случай произвольных

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: SashaAnokhina@yandex.ru, morozov@itep.ru, shakirov@itep.ru

[†]Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Московская обл., Россия

полиномов, не обязательно линейных. Замечательно, что детерминант тоже имеет такое обобщение. Линейная система уравнений с двумя неизвестными

$$f_0x + f_1y = 0, \quad g_0x + g_1y = 0$$

разрешима (имеет ненулевое решение x, y), если и только если ее детерминант равен нулю: $f_0g_1 - f_1g_0 = 0$. Точно так же квадратичная система

$$f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2 = 0, \quad g_0x^2 + g_1xy + g_2y^2 = 0$$

разрешима, если и только если равно нулю определенное выражение, зависящее от коэффициентов:

$$f_0^2g_2^2 - f_1f_2g_0g_1 + f_1^2g_0g_2 - 2f_0f_2g_0g_2 + f_0f_2g_1^2 - f_0f_1g_1g_2 + f_2^2g_0^2 = 0.$$

Это выражение – обобщение (2×2) -детерминанта на случай системы квадратных уравнений – называется *результантом*. Впервые он был изучен Сильвестром [4], который также нашел аналогичные выражения для систем двух уравнений третьей, четвертой и высших степеней. Кроме того, результат существует в случае трех и более переменных; он является обобщением $(n \times n)$ -детерминанта. Система

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad f_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad f_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (1.1)$$

из n однородных полиномов степени r от n неизвестных,

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^n f_i^{j_1, j_2, \dots, j_r} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_r},$$

разрешима, если и только если ее результат равен нулю: $R_{n|r}\{f_1, f_2, \dots, f_n\} = 0$. Для линейной системы результат $R_{n|1}$ – это обычный детерминант, широко известный и хорошо понятый объект линейной алгебры. К сожалению, знание и понимание результатов в общем случае еще не достигло столь глубокого уровня. Более того, само направление обобщения – от линейной алгебры к произвольным алгебраическим уравнениям – было практически забыто по прошествии XIX века и возродилось только недавно, после глубокого исследования Гельфанда, Капранова и Зелевинского [5].

По ряду причин мы предлагаем называть это направление *нелинейной алгеброй* [6]. Мы ожидаем, что она получит так же много (если не больше) приложений, как и ее линейный аналог. Результат, основная “специальная функция” нелинейной алгебры, уже используется в физике для описания, например, многочастичного сплетения [7], сингулярностей трехмерных многообразий Калаби–Яу [8], дискретной динамики [9]. Имеются приложения в моделировании и робототехнике [10]. Тем не менее приложения пока ограничены отчасти из-за того, что вычислять результаты не так просто, как детерминанты, особенно если число переменных велико.

Зачастую удобно говорить о системах уравнений в терминах отображений. Линейная алгебра изучает линейные отображения $L_1 \xrightarrow{f} L_2$ между двумя пространствами размерностей m и n , заданные линейными полиномами:

$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \dots + f_{1n}x_n \\ f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \dots + f_{2n}x_n \\ \dots \\ f_{m1}x_1 + f_{m2}x_2 + \dots + f_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Нелинейная алгебра изучает нелинейные (полиномиальные) отображения

$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Система (1.1) отвечает особенно интересному случаю $m = n$. Если система (1.1) разрешима, то соответствующее отображение (1.2) вырождено, т.е. имеет ненулевое ядро. Результат, как можно видеть, определяет условие вырожденности для полиномиальных отображений. Безусловно, очень интересно изучать дальнейшие обобщения на произвольные нелинейные отображения (не обязательно полиномиальные). Такие обобщения и соответствующее понятие результата рассматриваются в работах [11], [12].

Еще одно обобщение детерминанта, существенно отличающееся от рассмотренного выше, было введено Кэли приблизительно в то же время [3]. Вместо одного линейного отображения $L_1 \xrightarrow{f} L_2$ между двумя векторными пространствами Кэли рассмотрел *комплекс* – последовательность $L_1 \xrightarrow{f_1} L_2 \xrightarrow{f_2} L_3$ двух линейных отображений между тремя пространствами с наложенным условием *нильпотентности* $f_2 \circ f_1 = 0$. Вообще говоря, можно считать, что число пространств произвольно, $L_1 \xrightarrow{f_1} L_2 \xrightarrow{f_2} L_3 \xrightarrow{f_3} \dots$, а отображения удовлетворяют условию $f_{i+1} \circ f_i = 0$ при всех i . Кэли нашел величину, связанную с комплексом так же, как детерминант связан с линейным отображением. Эта величина теперь называется *детерминантом комплекса*. Рассмотрим, например, два отображения между пространствами размерностей 1, 2 и 1:

$$f_1: x \mapsto \begin{pmatrix} a_1x \\ a_2x \end{pmatrix}, \quad f_2: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto b_1y_1 + b_2y_2.$$

Потребуем, чтобы композиция $f_2 \circ f_1: x \mapsto (a_1b_1 + a_2b_2)x$ этих отображений обращалась в нуль. Детерминант Кэли $\text{DET}(f_1, f_2)$ может быть представлен тремя различными способами:

$$\text{DET}(f_1, f_2) = \frac{a_2}{b_1} = -\frac{a_1}{b_2} = \frac{|b|}{|a|},$$

где $|a|$ есть евклидова длина вектора $a = (a_1, a_2)$. Эквивалентность всех трех формулировок следует из приведенного выше условия $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. Этот пример

показывает, что определитель комплекса – не полином, а рациональная функция. Он обращается в нуль при $|b| = 0$ и сингулярен при $|a| = 0$. Может быть, в данный момент это не очевидно, но в дальнейшем мы увидим, что эта величина является естественным обобщением детерминанта и имеет ряд важных свойств. В частности, детерминант комплекса (с точностью до знака) инвариантен относительно перестановок базисных векторов линейных пространств.

Нужно подчеркнуть, что комплекс является по существу объектом линейной алгебры, и с ним фактически можно работать, используя линейные методы. По этой причине теория комплексов и их детерминантов, которая в настоящий момент называется *гомологической алгеброй*, более развита и привлекает несравнимо больше внимания, чем теория результатов. Гомологическая алгебра имеет широкий спектр физических применений, от топологических теорий поля и инвариантов [13] до духов Фадеева–Попова, метода Баталина–Вилковицкого квантования лагранжиана частицы и лагранжианов струнной теории поля [14] и в дальнейшем описания бран в терминах производных категорий [15].

Со времен Кэли известно, что результаты нелинейных отображений и детерминанты комплексов на самом деле связаны: если дано нелинейное отображение, то можно построить комплекс, называемый *комплексом Кошуля*, определитель которого равен результату исходного отображения. Фактически, это соотношение – один из немногих надежных способов вычисления результатов, известных в настоящий момент. Некоторые другие способы вычисления результатов, без использования комплексов, описаны в работах [11], [16]. Цель настоящей статьи – пояснить это соотношение на понятном и удобном с практической точки зрения языке, сделав изложение доступным для начинающих. Наша работа может рассматриваться, прежде всего, как методическая, поскольку большинство результатов являются вполне классическими и известны специалистам (см., например, монографию [5] и статьи [17], [18]).

2. РЕЗУЛЬТАНТЫ

2.1. Свойства результатов. Итак, понятно, что вычислять результаты интересно и важно. Перед тем как обсуждать методы вычисления, мы сформулируем основные свойства результатов. Как сказано выше, результат $R_{n|r}\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ определяет условие вырожденности для полиномиального отображения степени r от n переменных,

$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

где

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^n f_i^{j_1, j_2, \dots, j_r} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_r}.$$

Результант $R_{n|r}(f)$ обращается в нуль на вырожденных отображениях и только на них. Иначе говоря, результат – это общий делитель всех полиномов, обращающихся в нуль на вырожденных отображениях. По самому этому определению $R_{n|r}(f)$

является неприводимым многочленом от коэффициентов отображения f . Неприводимость результата есть обобщение хорошо известного факта неприводимости детерминанта. Например, результат

$$R_{3|1}(f) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = \\ = f_{11}f_{22}f_{33} - f_{11}f_{23}f_{32} - f_{21}f_{12}f_{33} + f_{21}f_{13}f_{32} + f_{31}f_{12}f_{23} - f_{31}f_{13}f_{22}$$

не разлагается на множители. Тем не менее в частных случаях (скажем, если некоторые коэффициенты полиномов обращаются в нуль) такое разложение имеет место. Например, результат

$$\begin{vmatrix} f_{11} & 0 & 0 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = f_{11}(f_{22}f_{33} - f_{23}f_{32})$$

на множители разлагается. То же справедливо для уравнений более высоких степеней. Для дальнейшего изучения свойств неприводимости результатов см. работу [19].

Другое важное свойство $R_{n|r}$ состоит в том, что он имеет простую интерпретацию в терминах корней полиномов. Рассмотрим, например, систему двух полиномов произвольной степени от двух переменных:

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i y), \quad g(x, y) = \prod_{i=1}^r (x - \beta_i y).$$

Результант этой системы дается простой формулой

$$R_{2|r} \sim \prod_{i,j=1}^r (\beta_i - \alpha_j),$$

так как система разрешима, если и только если $\alpha_j = \beta_i$ для некоторых i, j . Фактически, произведение в правой части последнего соотношения есть не что иное, как произведение значений функции $f(x, y)$ на 2-векторах $\vec{\beta}_1 = (\beta_1, 1), \dots, \vec{\beta}_r = (\beta_r, 1)$ – корнях функции $g(x, y)$:

$$R_{2|r} \sim f(\vec{\beta}_1) \dots f(\vec{\beta}_r). \quad (2.1)$$

Этот факт непосредственно обобщается на случай n переменных. Результант системы

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad f_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad f_n(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

где $f_1, f_2, \dots, f_n$ – однородные многочлены степени r , дается простой формулой

$$R_{n|r} \sim f_1(\vec{\beta}_1) \dots f_n(\vec{\beta}_N), \quad (2.2) \\ \vec{\beta}_i - \text{общий корень } f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, N.$$

Число общих корней системы из $n - 1$ уравнений степеней $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ равно $N = r_1 r_2 \dots r_{n-1}$. В нашем случае имеем $r_i = r$, так что число общих корней $N = r^{n-1}$. Отсюда непосредственно следует, что $R_{n|r}$ есть однородный многочлен степени N от коэффициентов первого уравнения. Поскольку (2.2) может быть записано аналогичным образом для любой f_i вместо f_1 , результат $R_{n|r}$ в действительности имеет степень N по коэффициентам любого из уравнений системы. Следовательно, он является однородным многочленом степени

$$\deg R_{n|r} = nN = nr^{n-1} \quad (2.3)$$

по коэффициентам всех уравнений. Для $r = 1$ получаем $\deg R_{n|1} = n$. Для систем квадратных уравнений мы имеем $\deg R_{n|1} = n2^n$, для систем кубических уравнений $\deg R_{n|1} = n3^n$ и т.д.

Несмотря на простоту формулы (2.2), называемой *пуассоновой формулой произведения*, она не слишком удобна для вычисления результатов, поскольку довольно трудно искать корни $n - 1$ нелинейных уравнений от n неизвестных. Эти корни – сложные функции от коэффициентов, вообще говоря, не выражающиеся в радикалах. К счастью, есть несколько способов переписать пуассонову формулу произведения так, чтобы она не содержала корней в явном виде. Такие формулировки [11], [16] более удобны в практических вычислениях.

2.2. Примеры результатов.

СЛУЧАЙ $r = 1$. Простейшим примером является линейное отображение, для определенности, от двух переменных:

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_0x + f_1y \\ g_0x + g_1y \end{pmatrix}.$$

Отображение f является вырожденным тогда, когда линейная система

$$f_0x + f_1y = 0, \quad g_0x + g_1y = 0$$

имеет ненулевое решение, т.е. если ее детерминант обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ g_0 & g_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому результат $R_{2|1}$ есть не что иное, как (2×2) -детерминант:

$$R_{2|1}(f) = \det_{2 \times 2} f = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ g_0 & g_1 \end{vmatrix}.$$

Точно так же результат $R_{n|1}$ линейной системы от n переменных – это просто $(n \times n)$ -детерминант:

$$R_{n|1}(f) = \det_{n \times n} f = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

СЛУЧАЙ $n = 2, r = 2$. В качестве примера нелинейного отображения рассмотрим квадратичное отображение

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2 \\ g_0x^2 + g_1xy + g_2y^2 \end{pmatrix}.$$

Вырожденность f означает существование x и y таких, что

$$f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2 = 0, \quad g_0x^2 + g_1xy + g_2y^2 = 0.$$

При условии $f_0 \neq 0, g_0 \neq 0$ последняя система может быть переписана как

$$f_0(x - \alpha_1y)(x - \alpha_2y) = 0, \quad g_0(x - \beta_1y)(x - \beta_2y) = 0.$$

Данная система имеет нетривиальное решение, если и только если полиномы имеют общий корень, т.е. если $(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) = 0$. Так как в этом случае явные формулы для корней известны, можно выразить результат через коэффициенты f_i и $g_i, i = 0, 1, 2$. После раскрытия скобок получается следующий многочлен (если добавить множитель $f_0^2g_0^2$):

$$\begin{aligned} R_{2|2}(f) &= f_0^2g_0^2(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) = \\ &= f_0^2(g_0^2\alpha_1^2 + g_1\alpha_1 + g_2)(g_0^2\alpha_2^2 + g_1\alpha_2 + g_2) = \\ &= f_0^2(g_0^2\alpha_1^2\alpha_2^2 + g_0g_1\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \\ &\quad + g_0g_2((\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2) + g_1^2\alpha_1\alpha_2 + g_1g_2(\alpha_1 + \alpha_2) + g_2^2) = \\ &= g_0^2f_2^2 - g_0g_1f_1f_2 + g_0g_2(f_1^2 - 2f_0f_2) + g_1^2f_0f_2 - g_1g_2f_0f_1 + f_0^2g_2^2. \end{aligned}$$

Таким образом, нам удалось вычислить результат двух квадратных уравнений от двух неизвестных. Заметим, что он имеет степень 4 по коэффициентам отображения, что согласуется с общей формулой $nr^{n-1} = 2 \cdot 2^1 = 4$. Однако такой подход едва ли применим, если степень уравнений (или, что еще хуже, число неизвестных) больше двух. Чтобы продвинуться дальше простейших примеров, нужен другой метод.

2.3. Метод Сильвестра. Классический метод вычисления результатов, который позволяет продвинуться дальше простейших примеров, был открыт Сильвестром [4]. Этот метод состоит в том, что результат выражается как детерминант некоторой вспомогательной матрицы. Такое выражение, очевидно, существует для линейного отображения от двух неизвестных:

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_0x + f_1y \\ g_0x + g_1y \end{pmatrix}, \quad R_{2|1}\{f, g\} = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ g_0 & g_1 \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Сильвестр показал, что соответствующее выражение существует для квадратичных отображений от двух неизвестных:

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2 \\ g_0x^2 + g_1xy + g_2y^2 \end{pmatrix}, \quad R_{2|2}\{f, g\} = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & 0 \\ 0 & f_0 & f_1 & f_2 \\ g_0 & g_1 & g_2 & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & g_2 \end{vmatrix}, \quad (2.5)$$

а также для кубических отображений от двух переменных:

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_0x^3 + f_1x^2y + f_2xy^2 + f_3y^3 \\ g_0x^3 + g_1x^2y + g_2xy^2 + g_3y^3 \end{pmatrix},$$

$$R_{2|3}\{f, g\} = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & 0 \\ 0 & 0 & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}, \quad (2.6)$$

и отображений от двух переменных всех высших степеней:

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_0x^r + f_1x^{r-1}y + \dots + f_r y^r \\ g_0x^r + g_1x^{r-1}y + \dots + g_r y^r \end{pmatrix},$$

$$R_{2|r}(f) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \dots & \dots & f_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_0 & f_1 & \dots & \dots & f_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_0 & f_1 & \dots & \dots & f_r \\ g_0 & g_1 & \dots & \dots & g_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & \dots & \dots & g_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & g_0 & g_1 & \dots & \dots & g_r \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

Благодаря своей красоте и простоте эта формула и соответствующий результат $R_{2|r}$ широко известны. Заметим, что результат имеет степень $2r$ по коэффициентам отображения, что согласуется с общей формулой $nr^{n-1} = 2r^1 = 2r$.

В наше время метод Сильвестра представляет собой основной инструмент вычисления двумерных результатов, и это единственная часть теории результатов, включенная в элементарные учебники (см., например, книгу [20]). Однако его обобщение на размерности $n > 2$ далеко не прямолинейно. Одно из возможных обобщений – представление результата в виде детерминанта комплекса Кошуля – как раз и является предметом настоящей статьи. Данное обобщение формулы Сильвестра получило наиболее широкую известность, а другие обобщения, которые дают детерминантные формулы для $n > 2$, до сих пор являются предметом исследования (см., например, статью [17]).

2.4. Обобщение метода Сильвестра: комплекс Кошуля. Чтобы описать комплекс Кошуля, нам потребуется несколько определений. Основной объект, с которым мы столкнемся – это однородные полиномы. Все однородные многочлены $F^{i_1 \dots i_p} x_{i_1} \dots x_{i_p}$ степени p от n переменных образуют линейное пространство с базисом из мономов $x_{i_1} \dots x_{i_p}$. Введем n вспомогательных грассмановых переменных θ_i , $i = 1, \dots, n$, таких, что $\theta_i \theta_j + \theta_j \theta_i = 0$. Множество однородных многочленов степени p от $x_1, \dots, x_n$ и степени q от $\theta_1, \dots, \theta_n$ есть опять же линейное пространство

с базисом из мономов $x_{i_1} \dots x_{i_p} \theta_{j_1} \dots \theta_{j_q}$. Мы будем использовать обозначение $\Omega(p, q)$ для этого линейного пространства. Заметим, что $q \leq n$, поскольку если многочлен имеет степень по переменным θ , большую чем n , то он тождественно обращается в нуль, так как θ_i антикоммутируют. Введение таких антикоммутирующих переменных предоставляет новую возможность: если дано полиномиальное отображение,

$$x_j \rightarrow f_j(x) = f_j^{i_1 i_2 \dots i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r},$$

то можно построить линейный оператор $d = f_j(x) \frac{\partial}{\partial \theta_j}$, являющийся нильпотентным:

$$dd = f_j(x) f_k(x) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_k} = f_j(x) f_k(x) \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_k} + \frac{\partial}{\partial \theta_k} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) = 0.$$

Этот оператор, называемый *дифференциалом Кошуля*, действует на пространствах $\Omega(p, q)$ следующим образом:

$$\Omega(p, q) \xrightarrow{d} \Omega(p + r, q - 1) \xrightarrow{d} \Omega(p + 2r, q - 2) \rightarrow \dots$$

Оператор d порождает последовательность линейных пространств, которая называется *комплексом Кошуля*. Если в каждом из линейных пространств выбрать некоторый базис, то оператор d будет представлен последовательностью матриц (вообще говоря, не одной матрицей). Обобщение идеи Сильвестра состоит в том, что результат f может быть выражен через миноры этих матриц. Перед тем как обсуждать детали, мы проиллюстрируем это утверждение простыми примерами.

СЛУЧАЙ $n = 2, r = 1$. Рассмотрим линейное отображение от двух переменных

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_0 x + f_1 y \\ g_0 x + g_1 y \end{pmatrix}.$$

По определению дифференциал Кошуля есть

$$d = (f_0 x + f_1 y) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + (g_0 x + g_1 y) \frac{\partial}{\partial \theta_2}.$$

Он действует на линейные пространства следующим образом:

$$\Omega(1, 0) \xrightarrow{d} \Omega(0, 1): \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \begin{pmatrix} f_0 x + f_1 y \\ g_0 x + g_1 y \end{pmatrix}.$$

В вышеприведенной паре базисов дифференциал представлен (2×2) -матрицей:

$$d = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ g_0 & g_1 \end{vmatrix},$$

и можно видеть, что

$$R_{2|1} = \det d = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ g_0 & g_1 \end{vmatrix}.$$

Этот пример иллюстрирует определение дифференциала Кошуля. Безусловно, этот пример слишком прост, так как в данном случае матрица оператора d совпадает с матрицей отображения f .

СЛУЧАЙ $n = 2, r = 2$. В этом случае отображение записывается как

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2 \\ g_0x^2 + g_1xy + g_2y^2 \end{pmatrix},$$

а дифференциал есть

$$d = (f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + (g_0x^2 + g_1xy + g_2y^2) \frac{\partial}{\partial \theta_2}.$$

Он действует на линейные пространства следующим образом:

$$\Omega(0, 1) \xrightarrow{d} \Omega(2, 0): \begin{pmatrix} \theta_1x \\ \theta_2x \\ \theta_1y \\ \theta_2y \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \begin{pmatrix} (f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2)x \\ (g_0x^2 + g_1xy + g_2y^2)x \\ (f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2)y \\ (g_0x^2 + g_1xy + g_2y^2)y \end{pmatrix}.$$

В вышеприведенной паре базисов дифференциал представлен (4×4) -матрицей

$$d = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & 0 \\ 0 & f_0 & f_1 & f_2 \\ g_0 & g_1 & g_2 & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & g_2 \end{vmatrix}.$$

Как видно, мы получили в точности матрицу Сильвестра. Согласно (2.5)

$$R_{2|2} = \det d = f_0^2g_2^2 - f_1f_2g_0g_1 + f_1^2g_0g_2 - 2f_0f_2g_0g_2 + f_0f_2g_1^2 - f_0f_1g_1g_2 + f_2^2g_0^2,$$

и это не случайно: если f имеет нетривиальное ядро, то система

$$\begin{aligned} (f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2)x &= 0, & (g_0x^2 + g_1xy + g_2y^2)x &= 0, \\ (f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2)y &= 0, & (g_0x^2 + g_1xy + g_2y^2)y &= 0 \end{aligned}$$

имеет нетривиальное решение, и, поскольку система линейна относительно мономов x^3, x^2y, xy^2, y^3 , ее детерминант $\det d$ должен обратиться в нуль. Таким образом, если результат $R_{2|2} = 0$, то детерминант должен быть равен нулю, $\det d = 0$. По этой причине $\det d = \mu R_{2|2}$. Так как и $\det d$, и $R_{2|2}$ суть многочлены четвертой степени от f_0, f_1, g_0, g_1 , коэффициент μ – это просто численный множитель. Данный пример показывает применение комплекса Кошуля в случае нелинейных отображений.

СЛУЧАЙ $n = 2, r = 1$: ПРИМЕР ТРЕХЧЛЕННОГО КОМПЛЕКСА. В обоих примерах, разобранных выше, дифференциал d был представлен одной квадратной матрицей. Теперь мы рассмотрим пример, в котором возникает нетривиальный комплекс – последовательность нескольких матриц. Вернемся к случаю линейного отображения от двух переменных, в котором дифференциал d имеет вид

$$d = (f_0x + f_1y) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + (g_0x + g_1y) \frac{\partial}{\partial \theta_2},$$

и рассмотрим его действие на других пространствах:

$$\Omega(0, 2) \xrightarrow{d} \Omega(1, 1) \xrightarrow{d} \Omega(2, 0).$$

В базисе $(\theta_1\theta_2)$, $(\theta_1x, \theta_1y, \theta_2x, \theta_2y)$, (x^2, xy, y^2) дифференциал представлен двумя прямоугольными матрицами (на этот раз – не единственной квадратной матрицей)

$$d_1 = \begin{vmatrix} -g_0 & -g_1 & f_0 & f_1 \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & 0 \\ 0 & f_0 & f_1 \\ g_0 & g_1 & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 \end{vmatrix}.$$

Результант $R_{2|1}$ имеет непосредственное отношение к этим матрицам: система с матрицей d_2 ,

$$\begin{aligned} (f_0x + f_1y)x &= f_0x^2 + f_1xy + 0 \cdot y^2 = 0, \\ (f_0x + f_1y)y &= 0 \cdot x^2 + f_0xy + f_1y^2 = 0, \\ (g_0x + g_1y)x &= g_0x^2 + g_1xy + 0 \cdot y^2 = 0, \\ (g_0x + g_1y)y &= 0 \cdot x^2 + g_0xy + g_1y^2 = 0, \end{aligned}$$

линейная относительно мономов x^2 , xy , y^2 , имеет ненулевое решение, если результат $R_{2|1}$ обращается в нуль. В этом случае матрица d_2 вырождается: из того, что $R_{2|1} = 0$, следует, что все (3×3) -миноры матрицы d_2 равны нулю. Это возможно, только если все миноры матрицы d_2 делятся на $R_{2|1}$, поэтому $R_{2|1}$ должен быть общим делителем всех этих миноров. Как показывает прямое вычисление,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & 0 \\ 0 & f_0 & f_1 \\ g_0 & g_1 & 0 \end{vmatrix} &= -f_1 \begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ g_0 & g_1 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & 0 \\ 0 & f_0 & f_1 \\ 0 & g_0 & g_1 \end{vmatrix} &= f_0 \begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ g_0 & g_1 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & 0 \\ g_0 & g_1 & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 \end{vmatrix} &= g_1 \begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ g_0 & g_1 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 0 & f_0 & f_1 \\ g_0 & g_1 & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 \end{vmatrix} &= -g_0 \begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ g_0 & g_1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

и, действительно, общий множитель равен $f_0g_1 - f_1g_0 = R_{2|1}$.

Этот пример показывает, что для одного и того же полиномиального отображения существует множество различных комплексов Кошуля, различающихся выбором линейного пространства $\Omega(p, q)$. В зависимости от этого выбора комплекс может стать или более простым, или более сложным: в вышеприведенных примерах более простым является комплекс $\Omega(1, 0) \xrightarrow{d} \Omega(0, 1)$, а более сложным – $\Omega(0, 2) \xrightarrow{d} \Omega(1, 1) \xrightarrow{d} \Omega(2, 0)$. Другими словами, дифференциал задан, но остается свобода в выборе линейных пространств. На практике обычно используется как можно более простой комплекс.

Последний пример также показывает, какую роль играет первая матрица d_1 . Так как результат есть общий делитель миноров d_2 , его можно определить, используя только матрицу d_2 . С этой точки зрения кажется, что d_1 не несет никакой информации о результате. Это верно лишь отчасти: d_1 содержит точную информацию

о посторонних множителях. Как можно видеть, дополнительные множители в минорах матрицы d_2 с точностью до знака равны элементам d_1 . Поэтому $R_{2|1}$ может быть найден делением миноров матрицы d_2 на “сопряженные” миноры матрицы d_1 . Эта дробь есть частный случай того, что мы называем определителем комплекса. Замечательно, что для комплекса Кошуля эта дробь на самом деле оказывается многочленом от коэффициентов отображения f .

3. КОМПЛЕКСЫ И ДЕТЕРМИНАНТЫ

3.1. Комплекс. Последовательность линейных отображений между несколькими линейными пространствами

$$0 \xrightarrow{d_0} L_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{p-1}} L_p \xrightarrow{d_p} 0$$

называется p -членным комплексом, если для всех $i = 0, 1, \dots, p-1$ выполнено условие нильпотентности $d_{i+1} \circ d_i = 0$. Линейное пространство L_i размерности $l_i = \dim L_i$ называется членом комплекса. Таким образом, обычное линейное отображение есть двучленный комплекс (комплекс, состоящий из двух линейных пространств и одного линейного отображения между ними). Операторы d_i называются операторами дифференциала. По стандартной терминологии, если вектор равен дифференциалу некоторого другого вектора (т.е. лежит в образе дифференциала d_i), $v = d_i w$, то он называется точным. Если дифференциал от вектора равен нулю (т.е. вектор лежит в ядре d_{i+1}), $d_{i+1} v = 0$, то вектор называется замкнутым. Эквивалентная формулировка условия нильпотентности такова: $\text{Im } d_i \subset \text{Ker } d_{i+1}$ для всех $i = 0, 1, \dots, p-1$, т.е. любой точный вектор является замкнутым. Очень важно, что обратное, вообще говоря, неверно: замкнутый вектор может не оказаться точным. Другими словами, может найтись вектор, принадлежащий $\text{Ker } d_{i+1}$, но не принадлежащий $\text{Im } d_i$. Такие векторы, в свою очередь, образуют линейное пространство $H_i = \text{Ker } d_{i+1} / \text{Im } d_i$ размерности h_i , называемое i -м пространством когомологий d (см. рис. 1). Элементы пространства H_i называются когомологиями. Комплекс, не имеющий когомологий (т.е. такой, что $h_i = 0$ при всех i), называется точным комплексом, так как все замкнутые элементы такого комплекса являются точными. Понятие когомологии так важно в теории комплексов, что вся эта область называется гомологической алгеброй.

Из линейной алгебры хорошо известно, что $\dim \text{Im } d_i + \dim \text{Ker } d_i = \dim L_i$. В то же время по определению когомологии $\dim \text{Im } d_i = \dim \text{Ker } d_{i+1} - \dim H_i$. Из этих двух равенств следует, что

$$\dim L_i = \dim \text{Ker } d_i + \dim \text{Ker } d_{i+1} + \dim H_i.$$

Если взять знакопеременную сумму, то размерности ядер сокращаются:

$$\sum_{k=1}^p (-1)^k \dim L_k = \sum_{k=1}^p (-1)^k \dim H_k \equiv \chi. \quad (3.1)$$

Знакопеременная комбинация χ обычно называется *эйлеровой характеристикой комплекса*. Как следует из (3.1), если комплекс точен, то его эйлерова характеристика равна нулю:

$$l_1 - l_2 + l_3 - \dots - (-1)^p l_p = 0. \quad (3.2)$$

Рис. 1. Последовательность линейных отображений между несколькими линейными пространствами, $\dim \operatorname{Im} d_i + \dim \operatorname{Ker} d_i = \dim L_i$.

Обратное, вообще говоря, неверно: обращение в нуль эйлеровой характеристики не означает, что все $h_i = 0$, а означает только, что

$$h_1 - h_2 + h_3 - \dots - (-1)^p h_p = 0.$$

Следовательно, (3.2) есть необходимое условие того, что комплекс точен. Иначе говоря, если $\chi \neq 0$, комплекс заведомо не точен, а если $\chi = 0$, нам требуется дополнительная информация, чтобы определить, является ли данный комплекс точным. Эту дополнительную информацию предоставляет детерминант комплекса: детерминант не равен нулю только для точных комплексов.

3.2. Детерминант комплекса. В этом пункте мы выведем выражение для детерминанта комплекса. Начнем с конкретных примеров, для облегчения понимания использующих векторные обозначения и геометрические аналогии. Цель этих примеров – создание интуитивного образа детерминанта комплекса как коэффициента пропорциональности между двумя естественными геометрическими величинами. Имея это в виду, мы будем двигаться от простых примеров к общим случаям.

3.2.1. Случай $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Этот простейший пример является трехчленным комплексом $L_1 \xrightarrow{d_1} L_2 \xrightarrow{d_2} L_3$ с размерностями линейных пространств $l = (1, 2, 1)$. Его эйлерова характеристика $\chi = 1 - 2 + 1 = 0$. Первый дифференциал действует как $d_1: x \mapsto \vec{a}x$, где x – это скаляр из L_1 , а $\vec{a}$ – некоторый постоянный 2-вектор из L_2 . Второй дифференциал действует как $d_2: \vec{y} \mapsto \vec{b}\vec{y}$, где $\vec{y}$ и $\vec{b}$ – это 2-векторы из L_2 , а $\vec{b}\vec{y} = b_1y_1 + b_2y_2$ – скалярное произведение. Видно, что в данном случае линейные отображения d_1 и d_2 заданы векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно. Их композиция есть $d_2 \circ d_1: x \mapsto \vec{a}\vec{b} \cdot x$, а условие нильпотентности записывается как $\vec{a}\vec{b} = 0$, т.е. $\vec{b}$ ортогонален $\vec{a}$. В двумерном пространстве все векторы, ортогональные $\vec{a}$, пропорциональны вектору $(a_2, -a_1)$, т.е. их координаты пропорциональны $\epsilon_{ij}a_j$, в том числе это

справедливо для вектора $\vec{b}$: $b_i = \eta \cdot \epsilon_{ij} a_j$ (см. рис. 2). Коэффициент пропорциональности η есть в точности детерминант нашего комплекса. Если $\eta \neq 0$, то ядро $\text{Ker } d_2$ одномерно, состоит из векторов, пропорциональных $\vec{a}$, и совпадает с образом $\text{Im } d_1$. Поэтому когомологий нет, и комплекс точен. Если $\eta = 0$, то ядро $\text{Ker } d_2$ становится двумерным, а образ $\text{Im } d_1$ остается одномерным, так что появляется одномерная когомология ($2 - 1 = 1$), и комплекс перестает быть точным. Таким образом, η действительно позволяет различать случаи точных и неточных комплексов.

Рис. 2. Любой вектор в двумерном пространстве, ортогональный (a_1, a_2) , пропорционален $(a_2, -a_1)$.

Детерминант может быть записан в компонентах двумя различными способами: $\eta = b_1/a_2 = -b_2/a_1$, в третьей, наиболее симметричной, формулировке детерминант равен отношению длин векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$,

$$\eta = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{a_1^2 + a_2^2}},$$

что подчеркивает его инвариантность относительно ортогональных преобразований. Эквивалентность всех формулировок следует из того, что $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$.

3.2.2. Случай $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Следующим по простоте примером является трехчленный комплекс $L_1 \xrightarrow{d_1} L_2 \xrightarrow{d_2} L_3$, в котором размерности линейных пространств $l = (2, 3, 1)$. Его эйлерова характеристика $\chi = 2 - 3 + 1 = 0$. Первый дифференциал действует как $d_1: \vec{x} \mapsto \vec{a}x_1 + \vec{b}x_2$, где $\vec{x}$ — 2-вектор из L_1 , а $\vec{a}, \vec{b}$ — два 3-вектора из L_2 . Второй дифференциал действует как $d_2: \vec{y} \mapsto \vec{c}\vec{y}$, где $\vec{y}$ и $\vec{c}$ — 3-векторы из L_2 , а $\vec{c}\vec{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$ — скалярное произведение. В этом примере линейные отображения d_1 и d_2 определяются векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ соответственно. Композиция d_1 и d_2 задается формулой

$$d_2 \circ d_1: \vec{x} \mapsto \vec{a}\vec{c} \cdot x_1 + \vec{b}\vec{c} \cdot x_2$$

с условием нильпотентности $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = 0$, т.е. вектор $\vec{c}$ ортогонален обоим векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В трехмерном пространстве все векторы, ортогональные одновременно и $\vec{a}$, и $\vec{b}$, имеют координаты, пропорциональные $\epsilon_{ijk} a_j b_k$, т.е. пропорциональны векторному произведению $\vec{a} \times \vec{b}$. В том числе, ему пропорционален вектор $\vec{c}$:

$$\vec{c} = \eta \cdot \vec{a} \times \vec{b}, \quad c_i = \eta \cdot \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

(см. рис. 3). Коэффициент пропорциональности η есть в точности детерминант нашего комплекса. Если $\eta \neq 0$, то ядро $\text{Ker } d_2$ двумерно, состоит из линейных

комбинаций векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и совпадает с образом $\text{Im } d_1$, так что когомологий нет, и комплекс точен. Если $\eta = 0$, то ядро $\text{Ker } d_2$ становится трехмерным, а образ $\text{Im } d_1$ остается двумерным, так что появляется одномерная когомология ($3 - 2 = 1$), и комплекс перестает быть точным. Таким образом, η действительно позволяет различать точные и неточные комплексы.

Рис. 3. Любой вектор в трехмерном пространстве, ортогональный $\vec{a}$ и $\vec{b}$, пропорционален $\vec{a} \times \vec{b}$.

Детерминант может быть записан в компонентах тремя различными способами:

$$\eta = \frac{c_1}{a_2 b_3 - a_3 b_2} = \frac{c_2}{a_3 b_1 - a_1 b_3} = \frac{c_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Эквивалентность всех трех формулировок следует из условия нильпотентности

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0.$$

3.2.3. Случай $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$. Наш следующий пример – это трехчленный комплекс $L_1 \xrightarrow{d_1} L_2 \xrightarrow{d_2} L_3$ с размерностями линейных пространств $l = (1, 3, 2)$. Его эйлерова характеристика $\chi = 1 - 3 + 2 = 0$. Первый дифференциал действует как $d_1: x \mapsto \vec{a} \cdot x$, где x – это скаляр из L_1 , а $\vec{a}$ – некоторый постоянный 3-вектор из L_2 . Второй дифференциал действует как $d_2: \vec{y} \mapsto \begin{pmatrix} b\vec{y} \\ \vec{c}\vec{y} \end{pmatrix}$, где $\vec{y}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – 3-векторы из L_2 , а $d_2 y$ – 2-вектор из L_3 . В этом примере линейные отображения d_1 и d_2 заданы векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{c}$ соответственно. Их композиция есть

$$d_2 \circ d_1: x \mapsto \begin{pmatrix} \vec{a}\vec{b} \\ \vec{a}\vec{c} \end{pmatrix} \cdot x$$

с условием нильпотентности $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c} = 0$, т.е. вектор $\vec{a}$ ортогонален обоим векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Как и в предыдущем примере, это означает, что векторное произведение $\vec{b} \times \vec{c}$ пропорционально $\vec{a}$:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \eta \cdot \vec{a}, \quad \epsilon_{ijk} b_j c_k = \eta \cdot a_i.$$

Коэффициент пропорциональности η есть в точности детерминант нашего комплекса. Если $\eta \neq 0$, то ядро $\text{Ker } d_2$ одномерно и состоит из векторов $\vec{a}$. Оно совпадает с образом $\text{Im } d_1$, так что когомологий нет, и комплекс точен. Если η обращается в нуль, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ становятся коллинеарными, и ядро $\text{Ker } d_2$, которое является пространством всех векторов, ортогональных и $\vec{b}$, и $\vec{c}$, становится двумерной плоскостью (см. рис. 4). Образ $\text{Im } d_1$ остается одномерным, так что возникает одномерная когомология ($2 - 1 = 1$), и комплекс перестает быть точным. Таким образом, η действительно позволяет различать точные и неточные комплексы.

Рис. 4. Пространство векторов, ортогональных одновременно и $\vec{b}$, и $\vec{c}$, одномерно, если $\vec{b}$ и $\vec{c}$ различны. Пространство векторов, ортогональных и $\vec{b}$, и $\vec{c}$, двумерно, если $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны.

Детерминант может быть записан в компонентах тремя различными способами:

$$\eta = \frac{b_2 c_3 - b_3 c_2}{a_1} = \frac{b_3 c_1 - b_1 c_3}{a_2} = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_3}.$$

Эквивалентность трех формулировок опять же следует из условия нильпотентности

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0.$$

3.2.4. *Случай $2 \rightarrow 4 \rightarrow 2$.* Более сложным примером является трехчленный комплекс $L_1 \xrightarrow{d_1} L_2 \xrightarrow{d_2} L_3$ с размерностями линейных пространств $l = (2, 4, 2)$. Его эйлерова характеристика $\chi = 2 - 4 + 2 = 0$. Первый дифференциал действует как $d_1: \vec{x} \mapsto \vec{a}x_1 + \vec{b}x_2$, где x — 2-вектор из L_1 , а $\vec{a}$, $\vec{b}$ — два 4-вектора из L_2 . Второй дифференциал действует как $d_2: \vec{y} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{p} \vec{y} \\ \vec{q} \vec{y} \end{pmatrix}$, где $\vec{y}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ — 4-векторы из L_2 , а $d_2 y$ — 2-вектор из L_3 . Как можно видеть, в этом примере линейные отображения d_1 и d_2 заданы векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{p}$, $\vec{q}$ соответственно. Их композиция такова:

$$d_2 \circ d_1: \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{p} \vec{a} \\ \vec{q} \vec{a} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} \vec{p} \vec{b} \\ \vec{q} \vec{b} \end{pmatrix} \cdot x_2,$$

а условие нильпотентности записывается как $\vec{a} \vec{p} = \vec{a} \vec{q} = \vec{b} \vec{p} = \vec{b} \vec{q} = 0$.

Подобные соотношения весьма типичны для вычислений с 4-векторами. Заметим, что комбинация $p_\mu q_\nu - q_\nu p_\mu$ антисимметрична по μ, ν и удовлетворяет соотношениям

$$(p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu) a_\mu = 0, \quad (p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu) b_\mu = 0,$$

так как выполнено условие нильпотентности. Другая антисимметричная комбинация, удовлетворяющая тем же соотношениям, есть $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} a_\alpha b_\beta$, что следует из полной антисимметрии тензора ϵ . Следовательно, одна комбинация должна быть пропорциональна другой: $p_\mu q_\nu - q_\nu p_\mu = \eta \cdot \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} a_\alpha b_\beta$, где коэффициент пропорциональности η есть в точности детерминант нашего комплекса. Если $\eta \neq 0$, то ядро $\text{Ker } d_2$ двумерно, состоит из линейных комбинаций векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и совпадает с образом $\text{Im } d_1$, так что когомологий нет, и комплекс точен. Если η обращается в нуль, то векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ становятся коллинеарными, и ядро $\text{Ker } d_2$ как пространство всех векторов, ортогональных и $\vec{p}$, и $\vec{q}$, становится трехмерной (гипер)плоскостью. Образ $\text{Im } d_1$ остается двумерным, так что возникает одномерная ($3 - 2 = 1$) когомология, и комплекс перестает быть точным. Таким образом, η действительно позволяет различать точные и неточные комплексы.

Детерминант может быть записан в компонентах шестью различными способами:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{p_1q_2 - p_2q_1}{a_3b_4 - a_4b_3} = \frac{p_1q_3 - p_3q_1}{a_2b_4 - a_4b_2} = \frac{p_1q_4 - p_4q_1}{a_2b_3 - a_3b_2} = \\ &= \frac{p_2q_3 - p_3q_2}{a_1b_4 - a_4b_1} = \frac{p_2q_4 - p_4q_2}{a_1b_3 - a_3b_1} = \frac{p_3q_4 - p_4q_3}{a_1b_2 - a_2b_1},\end{aligned}$$

эквивалентность всех формулировок, как обычно, следует из условия нильпотентности. Здесь мы не приводим рисунок: изображение ортогональных векторов в четырех измерениях не слишком наглядно.

3.2.5. *Случай $n \rightarrow n + m \rightarrow m$.* Подводя итог приведенным выше примерам, рассмотрим трехчленный комплекс $L_1 \xrightarrow{d_1} L_2 \xrightarrow{d_2} L_3$ с размерностями линейных пространств $l = (n, n + m, m)$. Его эйлерова характеристика $\chi = n - n - m + m = 0$. Первый дифференциал действует как $d_1: x_i \mapsto A_{ij}x_j$, где A_{ij} – матрица размера $n \times (n + m)$, т.е. индекс i пробегает значения от 1 до n , а индекс j – от 1 до $n + m$. Второй дифференциал действует как $d_2: y_i \mapsto B_{ij}y_j$, где B_{ij} – матрица размера $(n + m) \times m$, т.е. индекс i пробегает значения от 1 до $n + m$, а индекс j – от 1 до m . Векторные обозначения, использованные в предыдущих примерах, удобны только в маломерных случаях, и мы больше не будем их использовать. С этого момента мы переходим к матричным обозначениям: как можно видеть, линейные отображения d_1 и d_2 заданы матрицами A и B . Их композиция записывается как $d_2 \circ d_1: x_i \mapsto A_{ij}B_{jk}x_k$, а условие нильпотентности – как $A_{ij}B_{jk} = 0$.

Введем миноры матриц A, B : пусть $(M_A)_{i_1 \dots i_n} - (n \times n)$ -минор матрицы A , составленный из столбцов с номерами $i_1, \dots, i_n$, $(M_B)_{i_1 \dots i_n} - (m \times m)$ -минор матрицы B , получающийся при вычеркивании из B строк с номерами $i_1, \dots, i_n$. Эти миноры можно записать явно с помощью ϵ -тензоров:

$$\begin{aligned}(M_A)_{i_1 \dots i_n} &= \epsilon_{j_1 \dots j_n} A_{j_1 i_1} \dots A_{j_n i_n}, \\ (M_B)_{i_1 \dots i_n} &= \epsilon_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m} \epsilon_{k_1 \dots k_m} B_{j_1 k_1} \dots B_{j_m k_m}.\end{aligned}$$

Заметим, что M_A и M_B антисимметричны по индексам $i_1, \dots, i_n$ и обращаются в нуль при свертке с B :

$$(M_A)_{i_1 \dots i_n} \cdot B_{i_1 s_1} = 0, \quad (M_B)_{i_1 \dots i_n} \cdot B_{i_1 s_1} = 0,$$

где равенство для тензора M_A вытекает из условия нильпотентности, а для тензора M_B – из полной антисимметрии ϵ -тензоров. Следовательно, точно так же, как и в предыдущем примере, один минор должен быть пропорционален другому, $(M_B)_{i_1 \dots i_n} = \eta \cdot (M_A)_{i_1 \dots i_n}$, поскольку только тогда они удовлетворяют столь жесткой системе ограничений:

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m} \epsilon_{k_1 \dots k_m} B_{j_1 k_1} \dots B_{j_m k_m} = \eta \cdot \epsilon_{j_1 \dots j_n} A_{j_1 i_1} \dots A_{j_n i_n}.$$

Коэффициент пропорциональности η есть в точности детерминант нашего комплекса. Когда $\eta \neq 0$, ядро $\text{Ker } d_2$ n -мерно. Оно совпадает с образом $\text{Im } d_1$, так что когомологий нет, и комплекс точен. Если η обращается в нуль, то все миноры матрицы B также обращаются в нуль, так что ядро $\text{Ker } d_2$ становится $(n + 1)$ -мерным.

Рис. 5. Пример выбора миноров в случае $2 \rightarrow 5 \rightarrow 3$. Детерминант равен отношению двух незаштрихованных миноров: (3×3) -минора справа и (2×2) -минора слева.

Образ $\text{Im } d_1$ остается n -мерным, возникает одномерная когомология, и комплекс перестает быть точным. Таким образом, η действительно позволяет различать точные и неточные комплексы.

Детерминант может быть записан $C_{n+m}^n = (n+m)!/n!m!$ различными способами:

$$\eta = \text{DET}(A, B) = \frac{(M_B)_{i_1 \dots i_n}}{(M_A)_{i_1 \dots i_n}};$$

C_{n+m}^n — это число компонент антисимметричного тензора с n индексами, пробегающими значения от 1 до $n+m$, другими словами, это число способов выбрать n индексов $i_1, \dots, i_n$ из $n+m$ возможных. Эквивалентность этих представлений, как мы показали, следует из условий нильпотентности. На практике различные способы соответствуют различному выбору строк и столбцов (частный случай выбора для $n=2, m=3$ показан на рис. 5).

3.2.6. Случай $n \rightarrow n+m \rightarrow m+k \rightarrow k$. Продвигаясь дальше, рассмотрим четырехчленный комплекс $L_1 \xrightarrow{d_1} L_2 \xrightarrow{d_2} L_3 \xrightarrow{d_3} L_4$ с размерностями линейных пространств $l = (n, n+m, m+k, k)$. Его эйлерова характеристика $\chi = n - n - m + m + k - k = 0$. Первый дифференциал действует как $d_1: x_i \mapsto A_{ij}x_j$, где A_{ij} — матрица размера $n \times (n+m)$, т.е. индекс i пробегает значения от 1 до n , а индекс j — от 1 до $n+m$. Второй дифференциал действует как $d_2: y_i \mapsto B_{ij}y_j$, где B_{ij} — матрица размера $(n+m) \times (m+k)$, т.е. индекс i пробегает значения от 1 до $n+m$, а индекс j — от 1 до $m+k$. Третий дифференциал действует как $d_3: z_i \mapsto C_{ij}z_j$, где C_{ij} — матрица размера $(m+k) \times k$, т.е. индекс i пробегает значения от 1 до $m+k$, а индекс j — от 1 до k . Линейные отображения d_1, d_2, d_3 задаются матрицами A, B и C . Их композиции определяются как

$$d_2 \circ d_1: x_i \mapsto A_{ij}B_{jk}x_k, \quad d_3 \circ d_2: y_i \mapsto B_{ij}C_{jk}y_k,$$

а условия нильпотентности суть

$$A_{ij}B_{jk} = 0, \quad B_{ij}C_{jk} = 0.$$

Пусть $(M_A)_{i_1 \dots i_n} - (n \times n)$ -минор матрицы A , составленный из столбцов с номерами $i_1, \dots, i_n$, $(M_B)_{i_1 \dots i_n | j_1 \dots j_m} - (m \times m)$ -минор матрицы B , получающийся при вычеркивании из B строк с номерами $i_1, \dots, i_n$ и выборе столбцов с номерами $j_1, \dots, j_m$,

Рис. 6. Пример выбора миноров в случае $3 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 1$. Детерминант равен отношению произведения незаштрихованных (3×3) -минора слева и (1×1) -минора справа к незаштрихованному (6×6) -минору в середине.

$(M_C)_{j_1 \dots j_m} - (k \times k)$ минор матрицы C , получающийся при вычеркивании из C строк с номерами $j_1, \dots, j_m$. Выражения для этих миноров записываются явно с помощью ϵ -тензоров:

$$\begin{aligned} (M_A)_{i_1 \dots i_n} &= \epsilon_{j_1 \dots j_n} A_{j_1 i_1} \dots A_{j_n i_n}, \\ (M_B)_{i_1 \dots i_n | j_1 \dots j_m} &= \epsilon_{i_1 \dots i_n s_1 \dots s_m} B_{s_1 j_1} \dots B_{s_m j_m}, \\ (M_C)_{j_1 \dots j_m} &= \epsilon_{j_1 \dots j_m s_1 \dots s_k} \epsilon_{w_1 \dots w_k} C_{s_1 w_1} \dots C_{s_k w_k}. \end{aligned}$$

Покажем, что $(M_A)_{i_1 \dots i_n} (M_C)_{j_1 \dots j_m} = \eta \cdot (M_B)_{i_1 \dots i_n | j_1 \dots j_m}$. В самом деле, оба тензора обращаются в нуль и при свертке с B , и при свертке с C :

$$\begin{aligned} (M_A)_{i_1 \dots i_n} (M_C)_{j_1 \dots j_m} \cdot B_{i_1 s_1} &= (M_B)_{i_1 \dots i_n | j_1 \dots j_m} \cdot B_{i_1 s_1} = 0, \\ (M_A)_{i_1 \dots i_n} (M_C)_{j_1 \dots j_m} \cdot C_{j_1 s_1} &= (M_B)_{i_1 \dots i_n | j_1 \dots j_m} \cdot C_{j_1 s_1} = 0; \end{aligned}$$

кроме того, они антисимметричны отдельно по $i_1, \dots, i_n$ и по $j_1, \dots, j_m$. Следовательно, эти тензоры должны быть пропорциональны друг другу, так как только в этом случае они удовлетворяют столь жесткой системе ограничений. Коэффициент пропорциональности η есть в точности детерминант комплекса. Если $\eta \neq 0$, то матрицы A и C имеют полный ранг, что гарантирует отсутствие кохомологий. Если η обращается в нуль, то или все миноры A обращаются в нуль, или все миноры C обращаются в нуль; при этом соответственно либо в первом, либо в третьем члене комплекса возникает кохомология, и комплекс перестает быть точным. Таким образом, η действительно позволяет различать точные и неточные комплексы.

Детерминант может быть записан $C_{n+m}^n C_{m+k}^m$ различными способами:

$$\eta = \text{DET}(A, B, C) = \frac{(M_A)_{i_1 \dots i_n} (M_C)_{j_1 \dots j_m}}{(M_B)_{i_1 \dots i_n | j_1 \dots j_m}};$$

$C_{n+m}^n C_{m+k}^m$ — это число способов выбрать n индексов $i_1, \dots, i_n$ из $n + m$ возможных и m индексов $j_1, \dots, j_m$ из $m + k$ возможных. Эквивалентность всех способов, как

было показано, следует из условий нильпотентности. На практике различные способы соответствуют различному выбору строк и столбцов (частный случай выбора для $n = 3$, $m = 6$, $k = 1$ показан на рис. 6).

3.2.7. *Общий случай.* Наконец, рассмотрим p -членный комплекс

$$L_1 \xrightarrow{d_1} L_2 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{p-1}} L_p$$

с размерностями линейных пространств $l_m = k_{m-1} + k_m$, $m = 1, \dots, p$, где k_0 и k_p равны нулю по определению. Его эйлерова характеристика

$$\chi = \sum_{m=1}^p (-1)^{m-1} (k_{m-1} + k_m) = k_0 + (-1)^{p-1} k_p = 0.$$

На самом деле, это общий вид комплекса с нулевой эйлеровой характеристикой. Дифференциалы действуют следующим образом: $d_m: x_i \mapsto (d_m)_{ij} x_j$, где $(d_m)_{ij} - (l_m \times l_{m+1})$ -матрица, т.е. индекс i пробегает значения от 1 до l_m , а индекс j — от 1 до l_{m+1} , $m = 1, \dots, p-1$. Таким образом, комплекс представлен последовательностью прямоугольных матриц. Композиции отображений задаются как

$$d_{m+1} \circ d_m: x_i \mapsto (d_m)_{ij} (d_{m+1})_{jk} x_k,$$

а условия нильпотентности таковы:

$$(d_m)_{ij} (d_{m+1})_{jk} = 0.$$

Как и раньше, рассмотрим миноры матриц $d_1, \dots, d_{p-1}$: пусть $(M_1)_{\sigma_2}$ есть $(k_1 \times k_1)$ -минор матрицы d_1 содержащий столбцы с номерами σ_2 ; $(M_2)_{\sigma_2|\sigma_3}$ есть $(k_2 \times k_2)$ -минор матрицы d_2 , получающийся при вычеркивании из d_2 строк с номерами σ_2 и выборе столбцов с номерами σ_3 ; и вообще $(M_i)_{\sigma_i|\sigma_{i+1}} - (k_i \times k_i)$ -минор матрицы d_i , получающийся при вычеркивании из d_i строк с номерами σ_i и выборе столбцов с номерами σ_{i+1} ; наконец, $(M_{p-1})_{\sigma_{p-1}} - (k_{p-1} \times k_{p-1})$ -минор матрицы d_{p-1} , получающийся при вычеркивании из d_{p-1} строк с номерами σ_{p-1} . Здесь $\sigma_i \subset \{1, 2, \dots, l_i\}$ — произвольный набор индексов длины $|\sigma_i| = k_{i-1}$. Точно так же, как в предыдущих примерах, для этих миноров существуют явные (хотя и несколько громоздкие) выражения через ϵ -тензор:

$$\begin{aligned} (M_1)_{a_1 \dots a_{k_1}} &= \epsilon_{s_1 \dots s_{k_1}} (d_1)_{s_1 a_1} \dots (d_1)_{s_{k_1} a_{k_1}}, \\ (M_i)_{a_1 \dots a_{k_{i-1}} | b_1 \dots b_{k_i}} &= \epsilon_{a_1 \dots a_{k_{i-1}} s_1 \dots s_{k_i}} (d_i)_{s_1 b_1} \dots (d_i)_{s_{k_i} b_{k_i}}, \quad i = 2, \dots, p-2, \\ (M_{p-1})_{a_1 \dots a_{k_{p-2}}} &= \epsilon_{a_1 \dots a_{k_{p-2}} s_1 \dots s_{k_{p-1}}} \epsilon_{j_1 \dots j_{k_{p-1}}} (d_{p-1})_{s_1 b_1} \dots (d_{p-1})_{s_{k_{p-1}} b_{k_{p-1}}}. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$(M_1)_{\sigma_2} (M_3)_{\sigma_3|\sigma_4} (M_5)_{\sigma_5|\sigma_6} \dots = \eta^{\pm 1} \cdot (M_2)_{\sigma_2|\sigma_3} (M_4)_{\sigma_4|\sigma_5} (M_6)_{\sigma_6|\sigma_7} \dots$$

В самом деле, обе части равенства обращаются в нуль при свертке с матрицами d_i (как в предыдущем примере, в силу условий нильпотентности или в силу полной антисимметрии ϵ -тензоров) и при этом антисимметричны относительно перестановок

индексов внутри множеств σ_i . Это очень сильные ограничения: любые два тензора, удовлетворяющие им, должны быть пропорциональны друг другу. Коэффициент пропорциональности равен либо детерминанту, либо обратному детерминанту комплекса, в зависимости от числа p членов комплекса. Самый простой способ определить этот знак – воспользоваться тем, что крайний правый дифференциал d_{p-1} должен входить в выражение для детерминанта в числителе, а не в знаменателе. Следовательно,

$$\eta = \text{DET}(d_1, d_2, \dots, d_{p-1}) = \frac{(M_{p-1})_{\sigma_{p-1}}(M_{p-3})_{\sigma_{p-3}|\sigma_{p-2}}(M_{p-5})_{\sigma_{p-5}|\sigma_{p-4}} \cdots}{(M_{p-2})_{\sigma_{p-2}|\sigma_{p-1}}(M_{p-4})_{\sigma_{p-4}|\sigma_{p-3}}(M_{p-6})_{\sigma_{p-6}|\sigma_{p-5}} \cdots} \quad (3.3)$$

или, в более удобной форме,

$$\eta^{(-1)^p} = \frac{(M_1)_{\sigma_2}(M_3)_{\sigma_3|\sigma_4}(M_5)_{\sigma_5|\sigma_6} \cdots}{(M_2)_{\sigma_2|\sigma_3}(M_4)_{\sigma_4|\sigma_5}(M_6)_{\sigma_6|\sigma_7} \cdots}.$$

Набор σ_i может быть сформирован $C_{l_2}^{k_1} C_{l_3}^{k_2} \dots C_{l_{p-1}}^{k_{p-2}}$ различными способами, любой выбор приводит к одному и тому же детерминанту. Эта независимость детерминанта от способа выбора гарантирована тем, что, во-первых, числитель и знаменатель зависят от одних и тех же индексов; во-вторых, числитель и знаменатель антисимметричны по каждой группе индексов σ_i в отдельности; в-третьих, числитель и знаменатель удовлетворяют одной и той же сильно переопределенной системе линейных уравнений в силу нильпотентности d и полной антисимметрии ϵ .

3.3. Степень детерминанта. Из формулы (3.3) и из того факта, что минор M_i имеет размер k_i , следует, что результат имеет степень

$$\deg(\text{DET}(d_1, d_2, \dots, d_{p-1})) = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{p+i+1} k_i = k_{p-1} - k_{p-2} + \cdots + (-1)^p k_1$$

по коэффициентам дифференциалов. В терминах размерностей имеем

$$\begin{aligned} k_i &= \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j} l_j = l_i - l_{i-1} + \cdots + (-1)^{i-1} l_1, \\ \deg(\text{DET}(d_1, d_2, \dots, d_{p-1})) &= \sum_{i=1}^{p-1} i(-1)^{i-1} l_{p-i} = \\ &= l_{p-1} - 2l_{p-2} + \cdots + (p-1)(-1)^p l_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.4. Как вычислять детерминант комплекса: краткая сводка. В качестве справочного руководства, а также для тех, кто хочет вычислить детерминант комплекса, не тратя время на чтение предыдущих разделов, мы приводим короткую понятную процедуру вычисления детерминанта произвольного комплекса $L_1 \xrightarrow{d_1} L_2 \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{p-1}} L_p$ с эйлеровой характеристикой

$$\chi = \dim L_1 - \dim L_2 + \dim L_3 - \cdots - (-1)^p \dim L_p = 0.$$

Выберем базис в каждом из линейных пространств, тогда комплекс будет представлен последовательностью прямоугольных матриц. Матрица оператора d_i состоит из l_i строк и l_{i+1} столбцов, $i = 1, \dots, p-1$. Детерминант комплекса $\eta = \text{DET}(d_1, d_2, \dots, d_{p-1})$ строится из миноров этой матрицы следующим образом. Выберем множество $\{1, 2, \dots, l_i\}$, которое перечисляет базисные элементы в пространстве L_i . Выберем произвольные подмножества $\sigma_i \subset \{1, 2, \dots, l_i\}$, состоящие из $|\sigma_i| = \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k+1} l_k$ элементов, т.е.

$$|\sigma_1| = 0, \quad |\sigma_2| = l_1, \quad |\sigma_3| = l_2 - l_1, \quad |\sigma_4| = l_3 - l_2 + l_1$$

и т.д. Найдем дополнительные подмножества $\tilde{\sigma}_i = \{1, 2, \dots, l_i\} \setminus \sigma_i$, состоящие из $|\tilde{\sigma}_i| = l_i - |\sigma_i| = |\sigma_{i+1}|$ элементов. Вычислим миноры M_i матрицы d_i , составленные из строк с номерами $\tilde{\sigma}_i$ и столбцов с номерами σ_{i+1} . Тогда детерминант равен

$$\text{DET}(d_1, d_2, \dots, d_{p-1}) = \prod_{i=1}^{p-1} (M_i)^{(-1)^{p+i+1}} = \frac{M_{p-1} M_{p-3} \dots}{M_{p-2} M_{p-4} \dots}, \quad (3.5)$$

причем ответ не зависит от σ_i (более подробно мы об этом говорили в предыдущем пункте).

4. КОМПЛЕКСЫ КОШУЛЯ

Обсудив общую теорию комплексов и их детерминантов, мы возвращаемся к комплексам Кошуля, имеющим отношение к теории результатов. Основные объекты уже были упомянуты во введении к настоящей статье.

Рассмотрим полиномиальное отображение типа $n|r$,

$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

где f_i — полиномы степени r от n переменных:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^n f_i^{j_1, j_2, \dots, j_r} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_r}.$$

Дополним коммутирующие переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($x_i x_j - x_j x_i = 0$) антикоммутирующими переменными $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ($\theta_i \theta_j + \theta_j \theta_i = 0$) и рассмотрим полиномы, зависящие как от $x_1, \dots, x_n$, так и от $\theta_1, \dots, \theta_n$. Через $\Omega(p, q)$ обозначим пространство таких полиномов степени p по переменным x и степени q по переменным θ . Его размерность

$$\dim \Omega(p, q) = C_{p+n-1}^p C_n^q, \quad (4.1)$$

причем степень q не может превосходить n , так как θ_j антикоммутируют. Дифференциал Кошуля, построенный из f , есть линейный оператор, который действует на этих пространствах по правилу

$$d = f_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial \theta_n};$$

этот оператор автоматически нильпотентен:

$$dd = f_j(x)f_k(x)\frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_k} = f_j(x)f_k(x)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_k} + \frac{\partial}{\partial\theta_k}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right) = 0.$$

Оператор $d: \Omega(p, q) \rightarrow \Omega(p+r, q-1)$ порождает следующий комплекс Кошуля:

$$\Omega(p, q) \xrightarrow{d} \Omega(p+r, q-1) \xrightarrow{d} \Omega(p+2r, q-2) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega(R, 0).$$

Таким образом, одному и тому же оператору d соответствуют несколько комплексов Кошуля, зависящих от единственного целого R – степени по x крайнего правого пространства. Используя формулу (4.1) для размерностей, нетрудно выписать их все. Таблицы комплексов Кошуля для различных n и r приведены в приложении.

Многие свойства комплексов Кошуля очевидны уже из этих таблиц. Можно, например, увидеть, что эйлерова характеристика χ обращается в нуль, если $R > n(r-1)$. При этих значениях R согласно предыдущему разделу у комплекса Кошуля определен детерминант $\text{DET}(d_1, \dots, d_{p-1})$, где $p = 1 + [R/r]$ – число членов комплекса. Основной вывод состоит в том, что детерминант комплекса Кошуля равен результату исходного отображения:

$$R_{n|r}(f_1, \dots, f_n) = \text{DET}(d_1, \dots, d_{p-1}). \quad (4.2)$$

Заметим, что детерминант комплекса есть, вообще говоря, рациональная функция, но комплекс Кошуля – это очень специальный случай комплекса, и его детерминант оказывается полиномом (точнее, результатом исходного отображения f). Несмотря на важность этой математической теоремы, мы не приводим ее доказательства, оно может быть найдено, например, в книге [5]. Вместо доказательства мы приведем несколько примеров и иллюстраций, которые не требуют какого-либо опыта в работе с гомологической алгеброй.

Простейший способ понять соотношение (4.2) – заметить, что детерминант имеет ту же степень по коэффициентам $f_1, \dots, f_n$, что и результат. Действительно, подставляя (4.1) в (3.4), получаем

$$\begin{aligned} \deg(\text{DET}(d_1, d_2, \dots, d_{p-1})) &= \sum_{i=1}^{p-1} i(-1)^{i-1} l_{p-i} = \sum_{i=1}^{[R/r]} i(-1)^{i-1} \dim \Omega(R - ir, i) = \\ &= \sum_{i=1}^{[R/r]} i(-1)^{i-1} C_n^i C_{R-ir+n-1}^{R-ir} = \sum_{i=1}^{[R/r]} \frac{(-1)^{i-1}}{(n-i)!(i-1)!} \oint \frac{dz}{z} z^{ir-R} \frac{n!}{(1-z)^n} = \\ &= \oint \frac{dz}{z} \frac{n!}{(1-z)^n} \cdot \sum_{i=1}^{[R/r]} \frac{(-1)^{i-1}}{(n-i)!(i-1)!} z^{ir-R} = \\ &= \oint \frac{dz}{z} \frac{n!}{(1-z)^n} \cdot \frac{z^{r-R}(1-z^r)^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= n \oint \frac{dz(1-z^r)^{n-1}}{(1-z)^n} z^{r-R-1} = n \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1-z^r}{1-z} \right)^{n-1} = nr^{n-1}, \end{aligned}$$

т.е. если детерминант определен, то его степень равна степени результата (см. формулу (2.3)):

$$\deg(\text{DET}(d_1, d_2, \dots, d_{p-1})) = \deg(R_{n|r}(f_1, \dots, f_n)).$$

Следовательно,

$$\text{DET}(d_1, d_2, \dots, d_{p-1}) = C(d_1, d_2, \dots, d_{p-1}) \cdot R_{n|r}(f_1, \dots, f_n),$$

где коэффициент пропорциональности C имеет нулевую степень по коэффициентам всех уравнений. Поскольку детерминант комплекса Кошуля – полином, а не рациональная функция [5], C – просто ни от чего не зависящая константа. Это подтверждает формулу (4.2).

Установить соотношение между результатом и детерминантом комплекса Кошуля можно еще одним, более прямым, способом. Рассмотрим крайний правый дифференциал в комплексе Кошуля $d: \Omega(R-r, 1) \xrightarrow{d} \Omega(R, 0)$, действующий на этих пространствах как

$$(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}) \cdot \theta_j \mapsto (x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}) \cdot f_j(x_1, \dots, x_n)$$

и представленный матрицей d_{p-1} размера $nC_{R-r+n-1}^{R-r} \times C_{R+n-1}^R$. Если результат $R_{n|r}(f_1, \dots, f_n) = 0$, то система

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

разрешима, т.е. существует вектор $(v_1, \dots, v_n)$ такой, что $f_j(v_1, \dots, v_n) = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Как следствие, существует $(nC_{R-r+n-1}^{R-r})$ -мерный вектор $(v_1^{i_1} v_2^{i_2} \dots v_n^{i_n}) \cdot \theta_j$ из $\Omega(R-r, 1)$, обращающийся в нуль под действием d_{p-1} . Поэтому из того, что $R_{n|r} = 0$, следует, что ранг d_{p-1} уменьшается на единицу. В то же время из того, что $R_{n|r} = 0$, следует, что все миноры матрицы d_{p-1} максимального размера равны нулю. Это возможно, только если все миноры матрицы d_{p-1} максимального размера делятся на $R_{n|r}$. Как следует из (3.3), детерминант такого комплекса также делится на $R_{n|r}$. Если результат $R_{n|r}$ обращается в нуль, то детерминант комплекса Кошуля также обращается в нуль. Этого опять же достаточно для доказательства равенства (4.2), если известно, что детерминант комплекса Кошуля есть полином.

В завершение нашей дискуссии о комплексах Кошуля получим простую производящую функцию

$$\sum_{R=0}^{\infty} \chi_R t^R = \left(\frac{1-t^r}{1-t} \right)^n \quad (4.3)$$

для их эйлеровых характеристик χ_R . Такие функции весьма интересны: при $r = 2$ они совпадают с биномиальными коэффициентами (как можно видеть из справочных таблиц), так что для $r > 2$ они являются обобщением биномиальных коэффици-

ентов. Применяя тот же трюк с контурным интегралом, что и выше, мы получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{R=0}^{\infty} \chi_R t^R &= \sum_{R=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim \Omega(R - ir, i) t^R = \sum_{R=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_n^i C_{R-ir+n-1}^{R-ir} t^R = \\
 &= \sum_{R=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} t^R \oint \frac{dz}{z} z^{ir-R} \frac{n!}{(1-z)^n} = \\
 &= \oint \frac{dz}{z} \frac{n!}{(1-z)^n} \cdot \sum_{R=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} t^R z^{ir-R} = \\
 &= \oint \frac{dz}{z} \frac{n!}{(1-z)^n} \cdot \frac{z(1-z^r)^n}{n!(z-t)} = \oint \frac{dz}{z-t} \left(\frac{1-z^r}{1-z} \right)^n = \left(\frac{1-t^r}{1-t} \right)^n,
 \end{aligned}$$

что приводит к выражению (4.3) для производящей функции.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ $R_{3|2}$

В качестве заключительной иллюстрации ко всей статье рассмотрим подробно случай $3 \mid 2$, т.е. систему из трех квадратных уравнений от трех неизвестных,

$$\begin{aligned}
 F_1 &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2, \\
 F_2 &= b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2, \\
 F_3 &= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{22}x_2^2 + c_{23}x_2x_3 + c_{33}x_3^2.
 \end{aligned}$$

Этот случай очень важен в теории результатов по ряду причин. Прежде всего, это простейший случай многомерного ($n > 2$) результата, в то же время это весьма поучительный пример. Результат $R_{3|2}(F_1, F_2, F_3)$ есть однородный полином степени $3 \cdot 2^2 = 12$ по a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} . Полностью выписать этот многочлен затруднительно, он состоит из 21894 мономов и занимает 30–50 страниц формата A4, в зависимости от шрифта, которым он написан. Весьма удивительно, что такая простая система уравнений имеет такое невероятно длинное условие совместности (разрешимости). Сегодня известно, что за этими 21894 слагаемыми на самом деле стоят различные скрытые структуры [6], [21]. Явное знание этих структур позволяет записать $R_{3|2}$ в разумно короткой форме. Комплекс Кошуля, выражающий $R_{3|2}$ через несколько матриц небольшого размера, – исторически первый пример такой структуры.

Как обычно, кошулевский дифференциал равен

$$d = F_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + F_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3}.$$

Башня комплексов Кошуля приведена в первой таблице приложения. Опишем подробно случай $R = 4$ и следующий по простоте случай $R = 5$. Комплекс с $R = 4$ – это первый комплекс, имеющий детерминант (т.е. с нулевой эйлеровой характеристикой): $\Omega(0, 2) \rightarrow \Omega(2, 1) \rightarrow \Omega(4, 0)$. Его размерности суть $3 \rightarrow 18 \rightarrow 15$. Если выбрать базис в $\Omega(0, 2)$ как

$$\{\theta_2\theta_3, \theta_1\theta_3, \theta_1\theta_2\},$$

базис в $\Omega(2, 1)$ – как

$$\{x_1^2\theta_3, x_1^2\theta_2, x_1^2\theta_1, x_1x_2\theta_3, x_1x_2\theta_2, x_1x_2\theta_1, x_1x_3\theta_3, x_1x_3\theta_2, \\ x_1x_3\theta_1, x_2^2\theta_3, x_2^2\theta_2, x_2^2\theta_1, x_2x_3\theta_3, x_2x_3\theta_2, x_2x_3\theta_1, x_3^2\theta_3, x_3^2\theta_2, x_3^2\theta_1\}$$

и, наконец, базис в $\Omega(4, 0)$ – как

$$\{x_1^4, x_1^3x_2, x_1^3x_3, x_1^2x_2^2, x_1^2x_2x_3, x_1^2x_3^2, x_1x_2^3, x_1x_2^2x_3, x_1x_2x_3^2, x_1x_3^3, x_2^4, x_2^3x_3, x_2^2x_3^2, x_2x_3^3, x_3^4\},$$

то дифференциал Кошуля будет представлен двумя матрицами размера 3×18 и 18×15 . Выбрав какие-нибудь 3 столбца из d_1 и дополнительные к ним 15 строк из d_2 , мы получаем искомый результат как отношение двух миноров. Результат, разумеется, не зависит от такого выбора: подходят любые три столбца. Нужно только позаботиться о том, чтобы детерминант в знаменателе не обращался в нуль. Если он не равен нулю, то верхний минор делится на нижний, и дробь равна (с точностью до знака) результату.

Еще один комплекс с нулевой эйлеровой характеристикой χ соответствует $R = 5$: $\Omega(1, 2) \rightarrow \Omega(3, 1) \rightarrow \Omega(5, 0)$. Его размерности суть $9 \rightarrow 30 \rightarrow 21$. Если выбрать базис в $\Omega(1, 2)$ как

$$\{x_1\theta_2\theta_3, x_1\theta_1\theta_3, x_1\theta_1\theta_2, x_2\theta_2\theta_3, x_2\theta_1\theta_3, x_2\theta_1\theta_2, x_3\theta_2\theta_3, x_3\theta_1\theta_3, x_3\theta_1\theta_2\},$$

базис в $\Omega(3, 1)$ – как

$$\{x_1^3\theta_3, x_1^3\theta_2, x_1^3\theta_1, x_1^2x_2\theta_3, x_1^2x_2\theta_2, x_1^2x_2\theta_1, x_1^2x_3\theta_3, x_1^2x_3\theta_2, x_1^2x_3\theta_1, \\ x_1x_2^2\theta_3, x_1x_2^2\theta_2, x_1x_2^2\theta_1, x_1x_2x_3\theta_3, x_1x_2x_3\theta_2, x_1x_2x_3\theta_1, x_1x_3^2\theta_3, x_1x_3^2\theta_2, x_1x_3^2\theta_1, \\ x_2^3\theta_3, x_2^3\theta_2, x_2^3\theta_1, x_2^2x_3\theta_3, x_2^2x_3\theta_2, x_2^2x_3\theta_1, x_2x_3^2\theta_3, x_2x_3^2\theta_2, x_2x_3^2\theta_1, x_3^3\theta_3, x_3^3\theta_2, x_3^3\theta_1, \\ x_1x_3\theta_1, x_2^2\theta_3, x_2^2\theta_2, x_2^2\theta_1, x_2x_3\theta_3, x_2x_3\theta_2, x_2x_3\theta_1, x_3^2\theta_3, x_3^2\theta_2, x_3^2\theta_1\},$$

а базис в $\Omega(5, 0)$ – как

$$\{x_1^5, x_1^4x_2, x_1^4x_3, x_1^3x_2^2, x_1^3x_2x_3, x_1^3x_3^2, x_1^2x_2^3, x_1^2x_2^2x_3, x_1^2x_2x_3^2, x_1^2x_3^3, \\ x_1x_2^4, x_1x_2^3x_3, x_1x_2^2x_3^2, x_1x_2x_3^3, x_1x_3^4, x_2^5, x_2^4x_3, x_2^3x_3^2, x_2^2x_3^3, x_2x_3^4, x_3^5\},$$

то дифференциал Кошуля будет представлен двумя матрицами размера 9×30 и 30×21 . Выбрав какие-нибудь 9 столбцов из d_1 и 21 дополнительную к ним строку из d_2 , мы получаем исходный результат как отношение двух миноров, если только минор в знаменателе не обращается в нуль. Прямое вычисление (деление одного минора на другой) должно показать, что два комплекса $3 \rightarrow 18 \rightarrow 15$ и $9 \rightarrow 30 \rightarrow 21$ приводят к одному и тому же выражению для результата. То же должно произойти для детерминантов всех комплексов из табл. 1 при $R > 3$. Явные формулы для матриц комплексов с $R = 4$ и $R = 5$ приведены в электронном архиве по адресу <http://arxiv.org/abs/0812.5013>.

Существуют и другие представления, которые выражают результат $R_{3|2}$ в гораздо более компактной форме (см., например, работы [6], [16], [21]). Преимущество комплексов Кошуля, однако, в том, что они дают явную формулу для любого результата при помощи общего прямолинейного и легко формулируемого алгоритма:

результант отображения равен детерминанту любого связанного с ним комплекса Кошуля.

Этот ответ чересчур сложен по ряду причин: во-первых, отношение различных детерминантов фактически сводится к многочлену, но это сокращение не очевидно, во-вторых, детерминант на самом деле не зависит от выбора комплекса Кошуля, но эта независимость также не очевидна. Тем не менее до недавнего времени, пока не были развиты альтернативные подходы [11], [12], [16], указанный алгоритм в течение нескольких лет оставался единственным *универсальным* представлением для результатов в общем случае.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эта статья представляет собой краткий обзор трех важных понятий завтрашней математической физики: детерминанта линейного комплекса, результата нелинейного отображения и комплекса Кошуля. Каждое из них имеет свое значение и большой диапазон возможных применений. Замечательно, что они связаны: результат есть детерминант комплекса Кошуля. Мы дали набор простых иллюстраций этой общей теоремы, которые не требуют никакой предварительной подготовки, но выявляют все существенные нюансы и неоднозначности. Тем не менее дальнейшее упрощение изложения было бы важным, это позволит сделать из этих результатов хорошо развитый и широко используемый инструмент теоретической физики и теории струн.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблицы возможных комплексов Кошуля

ТАБЛИЦА 1. Случай $n = 3$, $r = 2$.

R	Пространства	Размерности	χ
0	$\Omega(0, 0)$	1	1
1	$\Omega(1, 0)$	3	3
2	$\Omega(0, 1) \rightarrow \Omega(2, 0)$	$3 \rightarrow 6$	3
3	$\Omega(1, 1) \rightarrow \Omega(3, 0)$	$9 \rightarrow 10$	1
4	$\Omega(0, 2) \rightarrow \Omega(2, 1) \rightarrow \Omega(4, 0)$	$3 \rightarrow 18 \rightarrow 15$	0
5	$\Omega(1, 2) \rightarrow \Omega(3, 1) \rightarrow \Omega(5, 0)$	$9 \rightarrow 30 \rightarrow 21$	0
6	$\Omega(0, 3) \rightarrow \Omega(2, 2) \rightarrow \Omega(4, 1) \rightarrow \Omega(6, 0)$	$1 \rightarrow 18 \rightarrow 45 \rightarrow 28$	0
7	$\Omega(1, 3) \rightarrow \Omega(3, 2) \rightarrow \Omega(5, 1) \rightarrow \Omega(7, 0)$	$3 \rightarrow 30 \rightarrow 63 \rightarrow 36$	0

ТАБЛИЦА 2. Случай $n = 3, r = 3$.

R	Размерности	χ
0	1	1
1	3	3
2	6	6
3	$3 \rightarrow 10$	7
4	$9 \rightarrow 15$	6
5	$18 \rightarrow 21$	3
6	$3 \rightarrow 30 \rightarrow 28$	1
7	$9 \rightarrow 45 \rightarrow 36$	0
8	$18 \rightarrow 63 \rightarrow 45$	0
9	$1 \rightarrow 30 \rightarrow 84 \rightarrow 55$	0
10	$3 \rightarrow 45 \rightarrow 108 \rightarrow 66$	0
11	$6 \rightarrow 63 \rightarrow 135 \rightarrow 78$	0

ТАБЛИЦА 3. Случай $n = 3, r = 4$.

R	Размерности	χ
0	1	1
1	3	3
2	6	6
3	10	10
4	$3 \rightarrow 15$	12
5	$9 \rightarrow 21$	12
6	$18 \rightarrow 28$	10
7	$30 \rightarrow 36$	6
8	$3 \rightarrow 45 \rightarrow 45$	3
9	$9 \rightarrow 63 \rightarrow 55$	1
10	$18 \rightarrow 84 \rightarrow 66$	0
11	$30 \rightarrow 108 \rightarrow 78$	0

ТАБЛИЦА 4. Случай $n = 4, r = 2$.

R	Размерности	χ
0	1	1
1	4	4
2	$4 \rightarrow 10$	6
3	$16 \rightarrow 20$	4
4	$6 \rightarrow 40 \rightarrow 35$	1
5	$24 \rightarrow 80 \rightarrow 56$	0
6	$4 \rightarrow 60 \rightarrow 140 \rightarrow 84$	0
7	$16 \rightarrow 120 \rightarrow 224 \rightarrow 120$	0

ТАБЛИЦА 5. Случай $n = 4, r = 3$.

R	Размерности	χ
0	1	1
1	4	4
2	10	10
3	$4 \rightarrow 20$	16
4	$16 \rightarrow 35$	19
5	$40 \rightarrow 56$	16
6	$6 \rightarrow 80 \rightarrow 84$	10
7	$24 \rightarrow 140 \rightarrow 120$	4
8	$60 \rightarrow 224 \rightarrow 165$	1
9	$4 \rightarrow 120 \rightarrow 336 \rightarrow 220$	0
10	$16 \rightarrow 210 \rightarrow 480 \rightarrow 286$	0
11	$40 \rightarrow 336 \rightarrow 660 \rightarrow 364$	0
12	$1 \rightarrow 80 \rightarrow 504 \rightarrow 880 \rightarrow 455$	0
13	$4 \rightarrow 140 \rightarrow 720 \rightarrow 1144 \rightarrow 560$	0
14	$10 \rightarrow 224 \rightarrow 990 \rightarrow 1456 \rightarrow 680$	0

ТАБЛИЦА 6. Случай $n = 4$, $r = 4$.

R	Размерности	χ
0	1	1
1	4	4
2	10	10
3	20	20
4	$4 \rightarrow 35$	31
5	$16 \rightarrow 56$	40
6	$40 \rightarrow 84$	44
7	$80 \rightarrow 120$	40
8	$6 \rightarrow 140 \rightarrow 165$	31
9	$24 \rightarrow 224 \rightarrow 220$	20
10	$60 \rightarrow 336 \rightarrow 286$	10
11	$120 \rightarrow 480 \rightarrow 364$	4
12	$4 \rightarrow 210 \rightarrow 660 \rightarrow 455$	1
13	$16 \rightarrow 336 \rightarrow 880 \rightarrow 560$	0
14	$40 \rightarrow 504 \rightarrow 1144 \rightarrow 680$	0

ТАБЛИЦА 7. Случай $n = 5$, $r = 2$.

R	Размерности	χ
0	1	1
1	5	5
2	$5 \rightarrow 15$	10
3	$25 \rightarrow 35$	10
4	$10 \rightarrow 75 \rightarrow 70$	5
5	$50 \rightarrow 175 \rightarrow 126$	1
6	$10 \rightarrow 150 \rightarrow 350 \rightarrow 210$	0
7	$50 \rightarrow 350 \rightarrow 630 \rightarrow 330$	0

Благодарности. Мы признательны А. Городенцеву и В. Долотину за разъяснения и обсуждения. Наша работа частично поддержана Федеральным агентством по атомной энергетике, Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3035.2008.2), РФФИ (гранты № 07-02-00645 (А. А.), 07-02-00645 (А. М. и Ш. Ш.), совместные гранты № 09-01-92440-СЕ, 09-02-91005-АНФ) и проектом 047.011.2004.026 (А. М.). Работа Ш. Шакирова выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда поддержки молодых ученых “Конкурс Мёбиуса” и фонда “Династия”.

Список литературы

- [1] A. Jennings, *Bull. Inst. Math. Appl.*, **13**:5 (1977), 117–123.
- [2] E. G. Forbes, *Historia Math.*, **5**:2 (1978), 167–181.
- [3] “On the theory of elimination”, *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*, V. I, The University Press, Cambridge, 1888, 370–375; F. S. Macaulay, *Proc. London Math. Soc.*, **35**:1 (1903), 3–27; A. L. Dixon, *Proc. London Math. Soc.*, **6** (1908), 468–478; *General Theory of Algebraic Equations*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2006.
- [4] “A method of determining by mere inspection the derivatives from two equations of any degree”, *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, V. I, The University Press, Cambridge, 1904, 54–57.
- [5] I. M. Gel’fand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Math. Theory Appl., Birkhäuser, Boston, MA, 1994.
- [6] V. Dolotin, A. Morozov, *Introduction to Non-Linear Algebra*, World Scientific, Hackensack, NJ, 2007.
- [7] A. Miyake, M. Wadati, *Quant. Info. Comp.*, **2**, Special (2002), 540–555; [arXiv: quant-ph/0212146](#); M. Duff, *Phys. Rev. D*, **76**:2 (2007), 025017; [arXiv: hep-th/0601134](#);

- Phys. Lett. B*, **641**:3–4 (2006), 335–337; [arXiv: hep-th/0602160](#); R. Kallosh, A. Linde, *Phys. Rev. D*, **73**:10 (2006), 104033; [arXiv: hep-th/0602061](#).
- [8] S. Kachru, A. Klemm, W. Lerche, P. Mayr, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **459**:3 (1996), 537–558; [arXiv: hep-th/9508155](#); T. Eguchi, Y. Tachikawa, *JHEP*, **08** (2007), 068; [arXiv: hep-th/0706.2114](#); P. S. Aspinwall, B. R. Greene, D. R. Morrison, *Nucl. Phys. B*, **420**:1–2 (1994), 184–242; [arXiv: hep-th/9311042](#).
- [9] A. Morozov, A. J. Niemi, *Nucl. Phys. B*, **666**:3 (2003), 311–336; [arXiv: hep-th/0304178](#); V. Dolotin, A. Morozov, *The Universal Mandelbrot Set. Beginning of the Story*, World Sci., Hackensack, NJ, 2006; *Algebraic geometry of discrete dynamics: the case of one variable*, [arXiv: hep-th/0501235](#); *Internat. J. Modern Phys. A*, **23**:22 (2008), 3613–3684; [arXiv: hep-th/0701234](#); A. Morozov, *Письма в ЖЭТФ*, **86**:11 (2007), 856–859; [arXiv: 0710.2315](#).
- [10] D. Manocha, *Algebraic and numeric techniques for modeling and robotics*, Ph. D. thesis, Univ. California, Berkeley, 1992.
- [11] A. Morozov, Sh. Shakirov, *Resultants and contour integrals*, [arXiv: 0807.4539](#).
- [12] B. Gustafsson, V. G. Tkachev, *Comm. Math. Phys.*, **286**:1 (2009), 313–358; [arXiv: 0710.2326](#).
- [13] E. Witten, *Comm. Math. Phys.*, **118**:3 (1988), 411–449; *Mirror manifolds and topological field theory*, [arXiv: hep-th/9112056](#); A. Losev, I. Polyubin, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:29 (1995), 4161–4178; [arXiv: hep-th/9305079](#); M. Alexandrov, A. Schwarz, O. Zaboronsky, M. Kontsevich, *Internat. J. Modern Phys. A*, **12**:7 (1997), 1405–1429; [arXiv: hep-th/9502010](#); A. Losev, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Nucl. Phys. B*, **534**:3 (1998), 549–611; [arXiv: hep-th/9711108](#).
- [14] L. D. Faddeev, V. N. Popov, *Phys. Lett. B*, **25**:1 (1967), 29–30; I. V. Tyutin, *Gauge invariance in field theory and statistical physics in operator formalism*, Preprint № 39, P. N. Lebedev Phys. Inst., 1975; [arXiv: 0812.0580](#); R. Stora, “Algebraic structure and topological origin of anomalies”, *Progress in Gauge Field Theory*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B, **115**, eds. G. 't Hooft, A. Jaffe, H. Lehmann, P. K. Mitter, I. M. Singer, R. Stora, Plenum Press, New York, 1984, 543–562; I. A. Batalin, G. A. Vilkoviski, *Nucl. Phys. B*, **234**:1 (1984), 106–124; A. Schwarz, *Comm. Math. Phys.*, **155**:2 (1993), 249–260; [arXiv: hep-th/9205088](#).
- [15] M. Douglas, *J. Math. Phys.*, **42**:7 (2001), 2818–2843; [arXiv: hep-th/0011017](#); G. Moore, *Internat. J. Modern Phys. A*, **16**:5 (2001), 936–944; C. I. Lazaroiu, *JHEP*, **12** (2001), 031; [arXiv: hep-th/0102183](#); D.-E. Diaconescu, *JHEP*, **06** (2001), 016; [arXiv: hep-th/0104200](#); A. Kapustin, D. Orlov, *J. Geom. Phys.*, **48**:1 (2003), 84–99; [arXiv: hep-th/0109098](#); J. Distler, H. Jockers, H. Park, *D-brane monodromies, derived categories and boundary linear sigma models*, [arXiv: hep-th/0206242](#); Sh. Katz, E. Sharpe, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **6**:6 (2003), 979–1030; [arXiv: hep-th/0208104](#); P. S. Aspinwall, “D-branes on Calabi–Yau manifolds”, *Progress in String Theory*, ed. J. M. Maldacena, World Sci., Hackensack, NJ, 2005, 1–152; [arXiv: hep-th/0403166](#); O. Lechtenfeld, A. D. Popov, R. J. Szabo, *JHEP*, **09** (2006), 054; [arXiv: hep-th/0603232](#); A. Kapustin, E. Witten, *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:1 (2007), 1–236; [arXiv: hep-th/0604151](#).
- [16] A. Morozov, Sh. Shakirov, *Analogue of the identity $\text{Log Det} = \text{Trace Log}$ for resultants*, [arXiv: 0804.4632](#).
- [17] D. Eisenbud, F.-O. Schreyer, *J. Amer. Math. Soc.*, **16**:3 (2003), 537–579; [arXiv: math/0111040](#).

- [18] C. D'Andrea, A. Dickenstein, *J. Pure Appl. Algebra*, **164**:1–2 (2001), 59–86; [arXiv:math/0007036](#); M. Chardin, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **319**:5 (1994), 433–436; D. Manocha, J.F. Canny, *J. Symbolic Computation*, **15**:2 (1993), 99–122; J. Canny, E. Kaltofen, L. Yagati, “Solving systems of non-linear polynomial equations faster”, *Proc. ACM-SIGSAM 1989 Int. Symp. Symbolic Algebraic Comput.*, ed. G. H. Gonnet, ACM, New York, 1989, 121–128.
- [19] A. Ostrowski, *Arch. Math.*, **29**:3 (1977), 252–260; L. Busé, C. D'Andrea, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **338**:4 (2004), 287–290; [arXiv:math.AG/0309374](#).
- [20] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру*, Наука, М., 1977.
- [21] A. Morozov, Sh. Shakirov, *Introduction to integral discriminants*, [arXiv:0903.2595](#).

Поступила в редакцию 6.02.2009