Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Зиновьев, С. В. Молодцов, Моделирование основного состояния КХД в приближении Хартри–Фока–Боголюбова, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 3, 444–470

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6409>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:58:53

© 2009 г.

Г. М. Зиновьев*, С. В. Молодцов†

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ КХД В ПРИБЛИЖЕНИИ ХАРТРИ–ФОКА–БОГОЛЮБОВА

Изучается поведение кварков под действием сильного стохастического глюонного поля. На основе процедуры усредненного описания выведен эффективный гамильтониан и найдено его основное состояние в приближении Хартри–Фока–Боголюбова. Проведено сравнение различных модельных гамильтонианов. На примере модели Келдыша подробно обсуждается переход к киральному пределу.

Ключевые слова: инстантонная модель, модель Намбу–Иона-Лазинию, модель Келдыша, приближение Хартри–Фока–Боголюбова.

1. ВВЕДЕНИЕ

Общепринято считать, что микроскопическим механизмом спонтанного нарушения киральной инвариантности в модели инстантонной жидкости [1] является коллективизация нулевых мод. При этом кварки рассматриваются в заданной глюонной конфигурации, находится спектр соответствующего дираковского оператора, а затем проводится усреднение по стохастическому ансамблю. Полагают, что в области малых энергий нулевые моды эффективно перекрываются, и собственные значения оператора Дирака распределены уже с некоторой плотностью, причем требуется большая аккуратность при выполнении соответствующих предельных переходов. Многие из этого находится в разительном контрасте с моделью Намбу–Иона-Лазинию [2], родственной модели инстантонной жидкости, которая базируется фактически на том же самом мультифермионном взаимодействии. Внешне различия сводятся лишь к появлению вместо соответствующих констант взаимодействия некоторых нелокальных формфакторов, с помощью которых описывается взаимодействие фермионов. На микроскопическом уровне генерация динамической массы кварка в модели Намбу–Иона-Лазинию обусловлена перестройкой основного состояния гамильтониана, а кварки проявляют себя уже как квазичастицы [3]. Для

*Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАНУ, Киев, Украина

†Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Московская обл.; Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.

E-mail: molodtsov@itep.ru

реализации этого механизма требуется лишь достаточная сила мультифермионного притяжения. В настоящей работе мы продемонстрируем, что под определенным углом зрения инстантонная модель и многие другие, базирующиеся на ансамбле сильного стохастического глюонного поля, становятся практически идентичными модели Намбу–Иона-Лазинио.

Напомним, что в основу этих исследований положена идея о населенности вакуума КХД интенсивными стохастическими глюонными полями нетривиальной топологической структуры [4]. Изучение охлажденных решеточных конфигураций свидетельствует о наличии такой компоненты [5], причем успешным оказывается фитирование данных инстантонами в сингулярной калибровке [6]. В результате можно установить как плотность ансамбля (порядка одного топологического заряда на кварт-ферми), так и размер характерной насыщающей конфигурации (порядка 1 ГэВ^{-1}). Эти данные вполне соответствуют оценке, полученной в модели инстантонной жидкости [7]. Также ведется интенсивный поиск элементарных конфайнирующих конфигураций (см., например, работы [8]). Однако если выйти за рамки сферической симметрии, то построение самосогласованного ансамбля конфигураций на сегодняшний день оказывается практически нереализуемой задачей, (см. оценку для (анти)инстантонного ансамбля в работе [9]). Предполагая, что доминирующим вкладом стохастического ансамбля глюонных полей является “высокочастотная” составляющая, мы применяем для кварков процедуру усредненного описания и вводим соответствующие низкоэнергетические эффективные переменные. Мы рассматриваем несколько ансамблей, одним из предельных случаев которых будет модель Намбу–Иона-Лазинио. На величины из этой модели мы будем нормировать наши результаты. Мы подробно изучаем переход к киральному пределу в модели Келдыша с дельтаобразным коррелятором в импульсном пространстве и показываем сингулярность функционала средней энергии.

2. ПРОЦЕДУРА ХАРТРИ–ФОКА–БОГОЛЮБОВА

Рассмотрим кварки (для простоты одного аромата), находящиеся под воздействием сильного стохастического глюонного поля. Предположим, что это поле настолько сильное, что можно пренебречь обменом радиационными глюонами, порождаемыми кварками. Аргументом в пользу такой постановки задачи служит то обстоятельство, что решеточные конфигурации демонстрируют самостоятельное нетривиальное топологическое поведение и без наличия кварков. Стохастическое глюонное поле будет характеризоваться некоторой корреляционной функцией, вид которой оговорим ниже. Плотность лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L}_E = \bar{q}(i\gamma_\mu D_\mu + im)q, \quad (1)$$

где q – поля кварков, $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a$, A_μ^a – глюонное поле, $\mu = 1, 2, 3, 4$, $t^a = \lambda^a/2$ – генераторы цветовой калибровочной группы $SU(N_c)$, m – токовая масса. Плотность лагранжиана приведена в евклидовом виде, γ_μ обозначают эрмитовы матрицы

Дирака ($\gamma_\mu^+ = \gamma_\mu$, $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$), для определенности взятые в киральном представлении. Для плотности гамильтониана имеем

$$\mathcal{H} = \pi \dot{q} - \mathcal{L}_E, \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial \dot{q}} = iq^+, \quad (2)$$

в частности, для невзаимодействующих полей

$$\mathcal{H}_0 = -\bar{q}(i\gamma\nabla + im)q. \quad (3)$$

В представлении Шредингера эволюция квантового кваркового поля определяется с помощью уравнения

$$\dot{\Psi} = -H\Psi \quad (4)$$

на волновую функцию состояния Ψ , причем операторы кваркового поля не зависят явно от времени:

$$q_{\alpha i}(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2|p_4|)^{1/2}} [a(\mathbf{p}, s, c)u_{\alpha i}(\mathbf{p}, s, c)e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + b^+(\mathbf{p}, s, c)v_{\alpha i}(\mathbf{p}, s, c)e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}] \quad (5)$$

(всюду подразумевается суммирование по индексам s и c). Вид дираковски сопряженного спинора оговорим ниже. В этом выражении индекс s описывает две спинные поляризации кварка, а c играет аналогичную роль по отношению к цветовой поляризации. Как известно, фиксация спиновой поляризации осуществляется наложением на спинор соответствующего дополнительного условия (см. ниже). Прямого аналога такого условия для цветовой поляризации не существует, и состояние фиксируется некоторым полным набором соответствующих коммутирующих генераторов, включающих, в частности, генераторы Казимира. Однако настолько полная спецификация спинора по цвету нам не понадобится, поскольку наблюдаемые выражаются через суммы по всем поляризациям некоторых билинейных комбинаций спиноров.

Плотность гамильтониана взаимодействия записывается как

$$\mathcal{V} = \bar{q}(\mathbf{x})t^a\gamma_\mu A_\mu^a(t, \mathbf{x})q(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Явная зависимость от времени в плотности взаимодействия имеется только у глюонного поля. Мы уже говорили, что будем интересоваться стохастическим глюонным полем, причем даже не детерминированной случайной функцией, а таким случайным процессом, когда можно лишь говорить о вероятности появления той или иной глюонной конфигурации. В частности, инстантонный ансамбль задается суперпозицией (анти)инстантонов в сингулярной калибровке

$$A_\mu^a(x) = \sum_{i=1}^N A_\mu^a(x; \gamma_i), \quad (7)$$

где $A_\mu^a(x; \gamma_i)$ обозначает вклад отдельного (анти)инстантона, N – число псевдочастиц, $\gamma_i = (\rho_i, z_i, \omega_i)$ служит для обозначения параметров, описывающих i -й (анти)инстантон: ρ_i – размер, ω_i – матрица цветовой ориентации и z_i – координата

центра псевдочастицы. Предполагается, что распределение ориентаций в цветовом пространстве однородно, т.е. вероятность цветовой ориентации лежать в элементе объема $d\omega$ пропорциональна $d\omega$, однородной также полагается вероятность появления псевдочастицы в элементе объема dz/V , где V – объем рассматриваемой системы. Отметим, что зависимость насыщающей конфигурации от времени как раз обусловлена наличием центра у псевдочастицы. Выбор насыщающей конфигурации в виде (7) неявным образом фиксирует калибровку. Учитывая квантовые поправки для каждой отдельной псевдочастицы в однопетлевом приближении (соответственно, нулевой порядок по N/V -разложению) и используя вариационный принцип [7], [9], можно получить распределение псевдочастиц по размерам. Таким способом мы можем придать смысл производящему функционалу и построить в термодинамическом пределе $\lim_{V \rightarrow \infty} (N/V) \rightarrow n$ модель состояния, обладающего отрицательной плотностью энергии и ненулевым глюонным конденсатом. Сама возможность рассчитать производящий функционал представляется далеко не тривиальной в силу неясности соотношения пертурбативных и непертурбативных вкладов в континуальный интеграл [10].

Для описания поведения кварков под действием стохастического процесса типа (7) резонно прибегнуть к процедуре усредненного описания кваркового поля и трактовать уравнение (4) как вероятностный процесс. Итак, будем описывать состояния системы соответствующими средними (по времени или, что тоже самое согласно эргодической гипотезе, по ансамблю). Однако в случае квантовой теории имеется определенная трудность. По своему физическому смыслу волновая функция Ψ является амплитудой вероятности, и непосредственное усреднение $\langle \Psi \rangle$ может оказаться бессодержательным. Более последовательным было бы изучение среднего от плотности вероятности $\langle \Psi^* \Psi \rangle$, которое, кстати сказать, реализуется путем соответствующего усложнения процедуры континуального интегрирования [11]. Процедура усреднения приводит к появлению набора соответствующих корреляционных функций $\langle A^2 \rangle$, $\langle A^4 \rangle$ и т.д. В частности, на этой основе строится описание спонтанного нарушения киральной инвариантности в инстантонной модели [12], [13]. При этом сумма ряда корреляционных функций в старшем порядке по упаковочному параметру $n\bar{\rho}^4$ (где n – плотность инстантонной жидкости, а $\bar{\rho}$ – средний размер (анти)инстантона) выражается через ковариантную производную с полем каждого отдельного (анти)инстантона, а также содержит свободную функцию Грина. По-видимому, можно все же указать один пример, когда использование усредненной амплитуды вероятности $\langle \Psi \rangle$ оправданно – это случай основного состояния.

В представлении взаимодействия $\Psi = e^{H_0 t} \Phi$ уравнение (4) перепишется в виде

$$\dot{\Phi} = -V\Phi, \quad V = e^{H_0 t} V_S e^{-H_0 t}. \quad (8)$$

Теперь, наряду с глюонным полем, зависимость от времени появилась и в операторах кварков. Запишем уравнение (8) в интегральном виде

$$\Phi(t) = \Phi(0) - \int_0^t d\tau V(\tau) \Phi(\tau), \quad (9)$$

где $\Phi(0)$ – произвольное начальное состояние ансамбля. Итерируя еще раз, получим

$$\Phi(t) = \Phi(0) - \int_0^t d\tau V(\tau)\Phi(0) + \int_0^t d\tau V(\tau) \int_0^\tau d\tau' V(\tau')\Phi(\tau'). \quad (10)$$

Путем усреднения по быстроизменяющейся компоненте, расцепляя корреляторы, для длинноволновой составляющей $\langle\Phi\rangle$ в старшем порядке с учетом $\langle V\rangle = 0$ записывают приближенное равенство

$$\langle\Phi(t)\rangle \approx \Phi(0) + \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \langle V(\tau)V(\tau')\rangle \langle\Phi(\tau')\rangle. \quad (11)$$

При этом предполагается, что характерное корреляционное время стохастического процесса меньше времени протекания процесса $\langle\Phi\rangle$. Дифференцируя уравнение (11), мы можем избавиться от зависимости процесса от начального условия $\Phi(0)$:

$$\langle\dot{\Phi}(t)\rangle = \int_0^t d\tau' \langle V(t)V(\tau')\rangle \langle\Phi(\tau')\rangle. \quad (12)$$

Это уравнение призвано описывать установившийся процесс, и при обращении времени решение, вообще говоря, не вернется к начальному значению $\Phi(0)$. Производя замену переменной интегрирования $\tau' = t - \tau$, получим

$$\langle\dot{\Phi}(t)\rangle = \int_0^t d\tau \langle V(t)V(t-\tau)\rangle \langle\Phi(t-\tau)\rangle. \quad (13)$$

Поскольку предполагается, что корреляции спадают достаточно быстро, верхний предел интегрирования можно заменить на ∞ , а для того чтобы иметь дело с локальным процессом, законно, не теряя точности, заменить аргумент функции $\langle\Phi\rangle$ в правой части на t . В результате окончательно получаем

$$\langle\dot{\Phi}(t)\rangle = \int_0^\infty d\tau \langle V(t)V(t-\tau)\rangle \langle\Phi(t)\rangle. \quad (14)$$

Условия, при которых можно факторизовать длинноволновую компоненту, обсуждаются, например, в работах [14]. Отметим, что знак, с которым входит корреляционная функция, строго определен.

В применении приближения (14) к квантовой теории поля мы сталкиваемся еще с одной проблемой. Затруднительно получить корреляционную функцию общего вида, когда характерные кварковые и глюонные корреляционные времена сравнимы. Однако если кварковые поля рассматриваются как постоянные на фоне глюонных полей, то задача допускает существенное упрощение. Глюонный вклад факторизуется в виде соответствующей корреляционной функции $\langle A_\mu^a(x)A_\nu^b(y)\rangle$ [15]. Проведенные недавно решеточные измерения такой корреляционной функции можно интерпретировать как генерацию “массы” глюона порядка 300–400 МэВ в области импульсов порядка 200 МэВ [16]. По-видимому, прием усреднения оправдан в применении к основному состоянию.

Заметим также, что усреднение по ансамблю (по времени) в правой части финальной формулы (14) проводится как бы дважды – и в корреляторе, и в $\langle\Phi(t)\rangle$.

Для квантовой теории поля это означает, что путем пересуммирования и усреднения какого-либо класса диаграмм можно по-разному учитывать вклады высших корреляторов, задавая вид функции $\langle \Phi(t) \rangle$. Кроме того, интересные с точки зрения применения к квантовой теории поля корреляционные функции должны быть трансляционно-инвариантными. Поэтому коррелятор в формуле (14) должен представляться в виде $\langle V(t)V(t-\tau) \rangle = F(\tau)$, т.е., например, одномерный процесс после интегрирования в (14) описывается просто константой, характеризующей медленный процесс. В интересующем нас случае квантовой теории поля вместо константы появляется коррелятор, связывающий две пространственные точки:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\Phi}(t) \rangle &= \int d\mathbf{x} \bar{q}(\mathbf{x}, t) t^a \gamma_\mu q(\mathbf{x}, t) \times \\ &\times \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{y} \bar{q}(\mathbf{y}, t-\tau) t^b \gamma_\nu q(\mathbf{y}, t-\tau) g^2 \langle A_\mu^a(t, \mathbf{x}) A_\nu^b(t-\tau, \mathbf{y}) \rangle \langle \Phi(t) \rangle. \end{aligned}$$

Предполагая, что корреляционная функция как функция времени быстро спадает, заменим приближенно время $t-\tau$ в кварковых полях на t и совершим обратное преобразование к представлению Шредингера. Вводя функцию $\chi = e^{-H_0 t} \langle \Phi \rangle$, получим¹⁾

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= -H_{\text{ind}} \chi, \\ \mathcal{H}_{\text{ind}} &= -\bar{q}(i\gamma\nabla + im)q - \bar{q}t^a \gamma_\mu q \int d\mathbf{y} \bar{q}' t^b \gamma_\nu q' \int_0^\infty d\tau g^2 \langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A_\mu^a &= A_\mu^a(t, \mathbf{x}), & A_\nu^b &= A_\nu^b(t-\tau, \mathbf{y}), \\ q &= q(\mathbf{x}), & \bar{q} &= \bar{q}(\mathbf{x}), & q' &= q(\mathbf{y}), & \bar{q}' &= \bar{q}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

(мы вводим сокращенные обозначения A и A' , q и q' для функций, зависящих от разных аргументов).

Для того чтобы записать окончательный ответ, оговорим вид корреляционной функции. Будем ориентироваться на стохастический ансамбль (анти)инстантонов в сингулярной калибровке. Инстантонное решение представимо в виде

$$A_\mu^a(x) = \frac{2}{g} 4\pi^2 i \rho^2 \omega^{ab} \bar{\eta}_{\mu b \nu} \int \frac{dq}{(2\pi)^4} q_\nu \phi(q) e^{iq(x-z)}, \quad \phi(q) = \frac{1}{q^2} \left(K_2(q\rho) - \frac{2}{q^2 \rho^2} \right), \quad (16)$$

где K_2 – модифицированная функция Бесселя мнимого аргумента, $\bar{\eta}$ – символ 'т Хоофта. В формуле (15) используется проинтегрированная по времени корреляционная функция, для которой в старшем по плотности (анти)инстантонного ансамбля порядке n мы получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx_4 \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dx_4 \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = \\ &= \frac{4(4\pi^2)^2}{g^2} \frac{\delta_{ab} n \rho^4}{N_c^2 - 1} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} - \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta}) \times \\ &\times \int \frac{dp}{(2\pi)^4} p_\alpha p_\beta e^{ip(x-y)} \phi(-p) \phi(p) \frac{1}{2} 2\pi \delta(p_4), \end{aligned} \quad (17)$$

¹⁾Заметим, что в общем случае это выражение не совпадает с $\langle e^{-H_0 t} \Phi \rangle$.

где первое равенство выполнено в силу симметричных свойств инстантонного решения. Корреляционная функция представляется в виде

$$\langle \widetilde{A_\mu^a A_\nu^b}(\mathbf{p}) \rangle = \frac{(4\pi^2)^2 n \rho^4}{g^2} \frac{2\delta_{ab}}{N_c^2 - 1} [I(p)\delta_{\mu\nu} - J_{\mu\nu}(p)], \quad (18)$$

$$I(p) = \mathbf{p}^2 \phi(-p)\phi(p), \quad J_{ij}(p) = p_i p_j \phi(-p)\phi(p), \quad J_{4i} = J_{i4} = J_{44} = 0.$$

Будем полагать далее, что различные стохастические ансамбли глюонных полей характеризуются своими функциями профиля $I(p)$, $J_{\mu\nu}(p)$.

В настоящей работе мы будем анализировать вклад только квадратичного коррелятора. Недостаток неявного фиксирования калибровки, который обсуждался в связи с анзацем (7), будет компенсирован в некоторой степени тем, что мы исследуем в определенном смысле весь спектр разумных корреляционных функций, рассматривая соответствующие взаимно противоположные предельные случаи. Ниже мы также обсудим интерполяцию корреляционной функции при переходе к пертурбативному пределу.

Исходя из вида индуцированного четырехфермионного взаимодействия, будем искать основное состояние как боголюбовскую пробную функцию кварк-антикварковых пар с противоположными импульсами и с вакуумными квантовыми числами²⁾ [17]:

$$|\sigma\rangle = T|0\rangle, \quad T = \Pi_{p,s,c} e^{\varphi[a^+(\mathbf{p},s,c)b^+(-\mathbf{p},s,c) + a(\mathbf{p},s,c)b(-\mathbf{p},s,c)]}, \quad (19)$$

$\varphi = \varphi(\mathbf{p})$, $|0\rangle$ – вакуум свободного гамильтониана, $a(\mathbf{p}, s, c)|0\rangle = 0$, $b(\mathbf{p}, s, c)|0\rangle = 0$. Эту функцию мы найдем из условия минимума средней энергии

$$E = \langle \sigma | H | \sigma \rangle. \quad (20)$$

Вводя с помощью преобразования T операторы рождения и уничтожения квазичастиц

$$A = TaT^{-1}, \quad B^+ = Tb^+T^{-1},$$

представим оператор (5) в виде

$$q(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2|p_4|)^{1/2}} [A(\mathbf{p}, s, c)U(\mathbf{p}, s, c)e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + B^+(\mathbf{p}, s, c)V(\mathbf{p}, s, c)e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}], \quad (21)$$

где спиноры U и V задаются как

$$\begin{aligned} U(\mathbf{p}, s, c) &= \cos \varphi \cdot u(\mathbf{p}, s, c) - \sin \varphi \cdot v(-\mathbf{p}, s, c), \\ V(\mathbf{p}, s, c) &= \sin \varphi \cdot u(-\mathbf{p}, s, c) + \cos \varphi \cdot v(\mathbf{p}, s, c). \end{aligned} \quad (22)$$

Дираковски сопряженный спинор определяется по правилу

$$\bar{q}(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2|p_4|)^{1/2}} [A^+(\mathbf{p}, s, c)\bar{U}(\mathbf{p}, s, c)e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} + B(\mathbf{p}, s, c)\bar{V}(\mathbf{p}, s, c)e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}], \quad (23)$$

²⁾Во избежание недоразумений напомним, что фиксация вида основного состояния одновременно вводит и некоторую преимущественную систему отсчета.

где $\bar{U}(\mathbf{p}, s, c) = U^+(\mathbf{p}, s, c)\gamma_4$, $\bar{V}(\mathbf{p}, s, c) = V^+(\mathbf{p}, s, c)\gamma_4$.

Теперь уточним наш выбор спиноров в евклидовых переменных. Они удовлетворяют уравнению Дирака

$$(\hat{p} - im)u(p, s) = 0, \quad (\hat{p} + im)v(p, s) = 0, \quad \hat{p} = p_4\gamma_4 + \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}, \quad (24)$$

и дополнительным условиям, характеризующим поляризацию спиноров,

$$i\gamma_5\hat{s}u(p, s) = u(p, s), \quad i\gamma_5\hat{s}v(p, s) = v(p, s), \quad (25)$$

где $\gamma_5 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, а 4-вектор s нормирован на единицу, $s^2 = 1$, и ортогонален 4-вектору p , $(ps) = 0$. Например,

$$s_4 = \frac{(\mathbf{p}\mathbf{n})}{im}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{n} + \frac{(\mathbf{p}\mathbf{n})\mathbf{p}}{im(p_4 - im)},$$

а $\mathbf{n}$ – произвольный единичный вектор. При выполнении ковариантных условий нормировки

$$\bar{u}u = 2im, \quad \bar{v}v = -2im \quad (26)$$

спиноры окончательно определяются с точностью до фазового множителя. Этих условий достаточно, чтобы получить следующее матричное представление:

$$u(p, s)\bar{u}(p, s) = \frac{\hat{p} + im}{2} (1 + i\gamma_5\hat{s}), \quad v(p, s)\bar{v}(p, s) = \frac{\hat{p} - im}{2} (1 + i\gamma_5\hat{s}). \quad (27)$$

При нахождении средней энергии (20) нам понадобятся комбинации спиноров с взаимно противоположными импульсами. Для удобства записи введем 4-вектор $q = (p_4, -\mathbf{p})$. С помощью проекционных операторов выразим, например, спинор $v(q, s)$ через спинор $u(p, s)$:

$$v(q, s) = \alpha \frac{\hat{q} - im}{-2im} \frac{1 + i\gamma_5\hat{s}}{2} u(p, s). \quad (28)$$

Коэффициент α находится из ковариантного условия нормировки (26) и определяется с точностью до фазового множителя:

$$\alpha^*\alpha = -\frac{2m^2}{(pq) + m^2} = \frac{m^2}{\mathbf{p}^2}, \quad |\alpha| = \frac{m}{|\mathbf{p}|}.$$

В результате для сумм по спинорным состояниям мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_s u(q, s)\bar{v}(p, s) &= \alpha \frac{\hat{q} + im}{2im} (\hat{p} - im), & \sum_s v(p, s)\bar{u}(q, s) &= \alpha^* (\hat{p} - im) \frac{\hat{q} + im}{2im}, \\ \sum_s u(p, s)\bar{v}(q, s) &= \alpha^* (\hat{p} + im) \frac{\hat{q} - im}{2im}, & \sum_s v(q, s)\bar{u}(p, s) &= \alpha \frac{\hat{q} - im}{2im} (\hat{p} + im). \end{aligned} \quad (29)$$

Наиболее удобной поляризацией представляется поперечная, в которой скалярное произведение импульса на вектор направления поляризации равно нулю, $(\mathbf{p}\mathbf{n}) = 0$. При этом оба оператора $\hat{p}$ и $\hat{q}$ коммутируют с $\gamma_5\hat{s}$, и направления поляризации кварка

и антикварка можно выбрать одинаковыми (в общем случае это два разных направления). В окончательных формулах суммирование по поляризациям кварка и антикварка осуществляется раздельно. Удобно воспользоваться этим и в промежуточных выкладках не следить за тем, чтобы квантовые числа кварк-антикварковой пары были вакуумными.

При вычислении средней энергии (20) нетривиальный вклад, билинейный по кварковым операторам, возникает от комбинаций вида $\langle \sigma | BB^+ | \sigma \rangle$ (напомним, что $B | \sigma \rangle = 0$, $A | \sigma \rangle = 0$). Вклад $\langle \sigma | AA^+ | \sigma \rangle$ отсутствует в силу применяемого представления бислокальных операторов в виде $\bar{q}q$, в результате чего квадратичные вклады выражаются только через спиноры $V, \bar{V}$. Аналогично в четырехкварковых операторах ненулевыми оказываются две комбинации $\langle \sigma | BB^+ B' B'^+ | \sigma \rangle$ и $\langle \sigma | BAA'^+ B'^+ | \sigma \rangle$. Первая отвечает вкладу диаграмм типа “головастик”. Вторая принадлежит классу так называемых звездчатых³⁾ диаграмм. В результате вклад четырехфермионного взаимодействия представляется в виде

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{A_\mu^a A_\nu^b}(0) \rangle & \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{p}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{4|p_4||p'_4|} \bar{V}_{\alpha i}(\mathbf{p}, s, c) t_{ij}^a \gamma_{\alpha\beta}^\mu V_{\beta j}(\mathbf{p}, s, c) \times \\ & \times \bar{V}_{\gamma k}(\mathbf{p}', s', c') t_{kl}^b \gamma_{\gamma\delta}^\mu V_{\delta l}(\mathbf{p}', s', c') + \\ & + \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{p}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{4|p_4||p'_4|} \bar{V}_{\alpha i}(\mathbf{p}, s, c) t_{ij}^a \gamma_{\alpha\beta}^\mu V_{\delta l}(\mathbf{p}, s, c) \times \\ & \times \bar{U}_{\gamma k}(\mathbf{p}', s', c') t_{kl}^b \gamma_{\gamma\delta}^\nu U_{\beta j}(\mathbf{p}', s', c') \langle \widetilde{A_\mu^a A_\nu^b}(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \rangle. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь $\langle \widetilde{A_\mu^a A_\nu^b} \rangle$ обозначает фурье-образ глюонного коррелятора и подразумевается сумма по спинорным и цветовым индексам. Вклад первой диаграммы типа “головастик” тождественно обращается в нуль в силу свойства полноты спинорного базиса в цветовом пространстве, приводящего к единичной цветовой матрице. В электродинамике этот вклад был бы доминирующим, любопытно, что в силу сингулярного характера фотонного пропагатора в инфракрасной области этот случай сложнее для исследования, чем неабелев. В компактной $U(1)$ -электродинамике (на решетке) инфракрасное поведение корреляционной функции определяется монополярными вкладами, но в настоящий момент затруднительно сказать, на каком масштабе могли бы проявляться эти эффекты. Отметим также, что для октетного канала в неабелевом случае получалось бы отталкивание кварков порядка $-1/(4N_c)$, и поэтому этот режим можно не рассматривать при поиске минимума среднего значения (20). Для

³⁾Если интересоваться вкладами стохастических глюонных полей только в старшем одночастичном приближении, то все глюонные линии изображаются на диаграммах Фейнмана исходящими из одной точки, соответствующей координате центра глюонной конфигурации. Вместе с тем использование аппарата функций Грина для вывода уравнений Швингера–Дайсона предполагает пересуммирование целого класса диаграмм, и появление рядов с большим числом звезд (центров глюонных конфигураций) может формально выглядеть, как превышение точности одночастичного приближения. Так, появление второй звезды сигнализирует о возникновении вклада второго порядка по плотности.

просуммированных по поляризациям спиноров получим

$$\begin{aligned} V\bar{V} &= p_4\gamma_4 + \cos\theta \cdot (\mathbf{p}\gamma - im) - \frac{\alpha^* + \alpha}{2im} \sin\theta \cdot (\mathbf{p}^2 - im\mathbf{p}\gamma), \\ U\bar{U} &= p_4\gamma_4 + \cos\theta \cdot (\mathbf{p}\gamma + im) + \frac{\alpha^* + \alpha}{2im} \sin\theta \cdot (\mathbf{p}^2 + im\mathbf{p}\gamma), \end{aligned}$$

где угол $\theta = 2\varphi$. В представленных формулах остается неопределенной фаза, стоящая в сумме $\alpha^* + \alpha$, с точностью до которой определяется спинор. Прямой анализ функционала средней энергии показывает, что наиболее выгодным значением фазового фактора, ответственного за цветное взаимодействие (анти)кварка, является такое, при котором коэффициент α оказывается вещественным числом. Для определенности мы положим, что $\alpha = m/|\mathbf{p}|$. Отметим одно очень интересное обстоятельство. Найденные суммы не совпадают друг с другом, $V\bar{V}(m) = U\bar{U}(-m)$. Равенство имеет место только в киральном пределе $m = 0$, т.е. частицы и античастицы как бы вносят разные вклады.

Вычисления приводят к следующему выражению для средней энергии (20):

$$\begin{aligned} \langle \sigma | H_{\text{ind}} | \sigma \rangle &= - \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{2N_c p_4^2}{|p_4|} (1 - \cos\theta) - \tilde{G} \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \left\{ -(3\tilde{I} + \tilde{J}) \frac{p_4 q_4}{|p_4||q_4|} + \right. \\ &+ (4\tilde{I} + \tilde{J}) \frac{pq}{|p_4||q_4|} \left(\sin\theta - \frac{m}{p} \cos\theta \right) \left(\sin\theta' - \frac{m}{q} \cos\theta' \right) + \\ &+ (-2\tilde{I}\delta_{ij} + 2\tilde{J}_{ij} - \tilde{J}\delta_{ij}) \frac{p_i q_j}{|p_4||q_4|} \times \\ &\times \left(\cos\theta + \frac{m}{p} \sin\theta \right) \left(\cos\theta' + \frac{m}{q} \sin\theta' \right) \Big\}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} p &= |\mathbf{p}|, \quad q = |\mathbf{q}|, \quad p^2 = q^2 = -m^2, \\ \tilde{I} &= \tilde{I}(\mathbf{p} + \mathbf{q}), \quad \tilde{J}_{ij} = \tilde{J}_{ij}(\mathbf{p} + \mathbf{q}), \quad \tilde{J} = \sum_{i=1}^3 \tilde{J}_{ii}, \quad \tilde{G} = (4\pi^2)^2 n \rho^4; \end{aligned}$$

мы также ввели сокращенное обозначение $\theta' = \theta(q)$, чтобы отличать эту функцию от $\theta = \theta(p)$. Удобно выделить цветовой множитель $G' = 2\tilde{G}/(N_c^2 - 1)$, который будет компенсирован в результате взятия следа $\lambda_{ij}^a \lambda_{ji}^a = (N_c^2 - 1)/2$. Оговорим, что попутно мы провели регуляризацию и вычли вклад свободного гамильтониана H_0 с нулевым углом спаривания (в нашем случае это вполне естественная нормировка). В результате в первом слагаемом появилась единица в множителе $(1 - \cos\theta)$. Напомним также, что в евклидовых переменных p_4^2 является отрицательной величиной. Имея выражение (31), можно найти наивыгоднейшее значение угла θ из условия

$$\frac{d\langle \sigma | H_{\text{ind}} | \sigma \rangle}{d\theta} = 0. \quad (32)$$

3. МОДЕЛЬ НАМБУ–ИОНА-ЛАЗИНИО

Начнем со случая, когда корреляционная функция в координатном пространстве имеет дельтаобразный вид (для простоты будем полагать $J_{\mu\nu}(p) = 0$). Легко видеть, что в результате мы приходим к модели Намбу–Иона-Лазинио [2], в которой, как известно, для получения разумного ответа требуется введение регуляризации. Воспользуемся для определенности значениями m , G и Λ из работы [18] и ограничим область интегрирования по импульсу в (31) условием $|\mathbf{p}| < \Lambda$ ($\Lambda = 631$ МэВ). Функционал (31) запишется в виде (несущественные слагаемые, дающие постоянные вклады, мы опускаем)

$$W = \int^{\Lambda} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[|p_4|(1 - \cos \theta) - G \frac{p}{|p_4|} \left(\sin \theta - \frac{m}{p} \cos \theta \right) \times \right. \\ \left. \times \int^{\Lambda} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{q}{|q_4|} \left(\sin \theta' - \frac{m}{q} \cos \theta' \right) \right], \quad (33)$$

где $m = 5.5$ МэВ. Уравнение (32), определяющее оптимальный угол θ , принимает вид

$$(p^2 + m^2) \sin \theta - M_q(p \cos \theta + m \sin \theta) = 0, \quad (34)$$

где

$$M_q = 2G \int^{\Lambda} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{p}{|p_4|} \left(\sin \theta - \frac{m}{p} \cos \theta \right). \quad (35)$$

В единицах функционала для средней энергии (31) константа четырехфермионного взаимодействия выражается как $G = 4\tilde{G}/2N_c$.

В случае модели Намбу–Иона-Лазинио имеется определенное преимущество, связанное с уравнением (34), которое позволяет существенно сузить функциональное пространство, где может реализоваться минимум функционала средней энергии. Это уравнение параметризует функцию $\theta(p)$ сразу на всем отрезке $[0, \Lambda]$, где ищется решение. При этом уравнение (34) само по себе не налагает никаких ограничений на параметр M_q , который может быть любым действительным числом. Функционал (33) становится при этом просто функцией $W(M_q)$ параметра M_q . Выразив тригонометрические функции через M_q , можно с помощью уравнения (34) согласовать представление минимизирующей функции и величину интеграла, через который она выражается. В результате, как известно, получаются три экстремальные точки, две из которых являются точками минимума с отрицательным и положительным M_q , причем отрицательному значению отвечает более устойчивое состояние. Вблизи начала координат ($M_q \sim m$) расположена точка неустойчивого равновесия. Для выбранных параметров динамическая масса кварка оказывается равной $M_q - m = -335$ МэВ. При этом кварковый конденсат равен

$$\langle \sigma | \bar{q}q | \sigma \rangle = \frac{iN_c}{\pi^2} \int_0^{\Lambda} dp \frac{p^2}{|p_4|} (p \sin \theta - m \cos \theta) = -i(247 \text{ МэВ})^3. \quad (36)$$

Константа, характеризующая силу четырехфермионного взаимодействия, оказывается равной $G\Lambda^2/(2\pi^2) = 1.34$. В последующем мы будем ориентироваться на эти данные.

Аналогичным образом может быть проанализирован случай, когда коррелятор $J_{\mu\nu}(p)$ отличен от нуля и имеет тот же дельтаобразный вид в координатном пространстве. Численный анализ показывает, что его влияние может быть весьма существенным. Однако мы не будем приводить этих данных в силу отсутствия каких-либо феноменологических оценок на величину этой корреляционной функции.

В литературе также обсуждается нелокальный вариант модели Намбу–Иона-Лазинио, в рамках которого предполагается, что коррелятор имеет сепарабельную форму $I(p, q) = K(p)K(q)$. Практический интерес к подобного рода моделям продиктован, в частности, исследованиями столкновений ультрарелятивистских тяжелых ионов. В них требуется описание кварков, пригодное и за импульсом обрезания Λ . Понятно, что такой вариант модели может быть рассмотрен аналогично модели Намбу–Иона-Лазинио. Снова обнаруживается отмеченное выше свойство, сводящее, по существу, анализ функционала к анализу функции от некоторого параметра. Существенное отличие заключается в том, что для интегрируемых функций $K(p)$ можно обходиться и без процедуры обрезания интегралов, а регуляризация осуществляется естественным образом за счет вида ядра $K(p)$. Вместе с тем столь сильная регуляризация обусловлена сепарабельной формой ядра взаимодействия. Для более реалистичных корреляторов это свойство может проявляться слабее.

4. МОДЕЛЬ КЕЛДЫША

Рассмотрим другой предельный случай, когда корреляционная функция имеет дельтаобразный вид в импульсном пространстве: $I(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p})$. Этот случай является аналогом широко используемой в физике конденсированного состояния модели Келдыша [19]. Функционал для средней энергии (31) принимает теперь вид⁴⁾

$$W(m) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[|p_4| (1 - \cos \theta) - G \frac{p^2}{|p_4|^2} \left(\sin \theta - \frac{m}{p} \cos \theta \right)^2 \right]. \quad (37)$$

Равновесные значения угла θ определяются как решения уравнения

$$|p_4|^3 \sin \theta - 2G(p \cos \theta + m \sin \theta)(p \sin \theta - m \cos \theta) = 0. \quad (38)$$

Начнем с описания решений в киральном пределе $m = 0$. Одно решение дается нулевым углом $\theta = 0$, а нетривиальное решение удовлетворяет уравнению

$$\cos \theta = \frac{p}{2G}. \quad (39)$$

В силу четности функционала (37) в качестве решений подходят и положительные, и отрицательные углы θ , причем дополнительные к тривиальному вещественные решения существуют на ограниченном отрезке $p < 2G$. При рассмотрении модели Намбу–Иона-Лазинио мы отмечали ее очень удобное свойство. Функция $\theta(p)$, являющаяся решением, определена сразу на всем отрезке, и фактически функционал параметризуется одним числом – интегралом M_q . В модели Келдыша ситуация

⁴⁾Для простоты мы не рассматриваем вклад коррелятора $J_{\mu\nu}(p)$.

несколько сложнее. Фазовый портрет решений в киральном пределе (например, $\sin \theta$ как функция импульса p) состоит из двух кривых с положительным и отрицательным $\sin \theta$ (см. рис. 1) и прямой линии, описывающей тривиальное решение. Таким образом, полуось $0 \leq p < \infty$ можно разделить на две части. На отрезке $p \in [0, 2G]$ имеются три решения: ветви с положительным и отрицательным углами $\theta = \pm \arccos(p/2G)$ и тривиальное решение $\theta = 0$, в то время как на интервале $p \in [2G, \infty)$ имеется только тривиальное вещественное решение $\theta = 0$. Для того чтобы построить решение на всей полуоси $p \in [0, \infty)$, следует к какой-либо ветви решения на отрезке $p \in [0, 2G]$, выделенной из трех ветвей, добавить тривиальное решение на интервале $p \in [2G, \infty)$. Другие потенциально интересные функции $\theta(p)$, на которых целесообразно искать минимум функционала, могут быть получены, если разбить отрезок $p \in [0, 2G]$ на меньшие отрезки и при переходе от одного отрезка к другому (например, в сторону возрастания импульса p), помимо непрерывного продолжения на ту же ветвь, использовать также любую из двух оставшихся ветвей, получая в результате кусочно-непрерывные функции.

В отличие от модели Намбу–Иона-Лазинио, в данном случае нет параметра, который ограничивал бы ход функции, отслеживая некоторую ее интегральную характеристику. В киральном пределе все построенные таким способом траектории, описывающие решения, обладают строго определенным (конечным) значением функционала $W(0)$ (отметим, что функционал не содержит производных угла θ по импульсу). Например, траектория, которая проходит по самой верхней дуге на отрезке $p \in [0, 2G]$ и продолжается затем с помощью тривиального решения на всю полуось, приводит к значению

$$W_{\pm}(0) = -\frac{G^4}{15\pi^2} \quad (40)$$

(и к такому же значению для крайней отрицательной дуги). Киральный конденсат (36) при этом равен

$$\langle \sigma | \bar{q}q | \sigma \rangle(0) = \frac{iN_c G^3}{2\pi}$$

(для проходящего по отрицательной дуге решения получается противоположный знак). Для тривиального решения средняя энергия и киральный конденсат оказываются равными нулю, $W_0(0) = 0$ и $\langle \sigma | \bar{q}q | \sigma \rangle_0(0) = 0$. Понятно, что обсуждавшиеся нами выше кусочно-непрерывные функции будут приводить к значениям функционала $W(0)$, плотно заполняющим отрезок $[W_0(0), W_{\pm}(0)]$, аналогичный факт имеет место и для кирального конденсата.

Используя естественную параметризацию

$$\sin \theta = \frac{M_{\theta}}{(p^2 + M_{\theta})^{1/2}}, \quad (41)$$

для характеризующей угол поворота массы M_{θ} для верхней дуги получим

$$M_{\theta} = (4G^2 - p^2)^{1/2}. \quad (42)$$

Интересно отметить, что энергия нетривиальных решений, определяемая как $E(p) = \sqrt{p^2 + M_{\theta}^2}$, постоянна: $E(p) = 2G$.

Рис. 1. Фазовый портрет модели Келдыша: $\sin \theta$ как функции импульса p . Сплошными и штриховыми линиями показаны ветви решения, пунктиром – нижняя дуга решения в киральном пределе $m = 0$. Точка $\Lambda(g, m)$ обозначает значение импульса, при котором сливаются траектории 2 и 3.

Теперь рассмотрим, что получается вне кирального предела, при $m \neq 0$. На рис. 1 представлены значения $\sin \theta$ как функции импульса p (в МэВ) для решений уравнения (38). Полуось $0 \leq p < \infty$, где ищется решение, можно разбить на несколько частей. Для наглядности соответствующие области разделены на рисунке вертикальными штриховыми линиями. Для значений p , расположенных вблизи начала координат, имеется только одно решение, обозначенное на рисунке буквой A . Мы приводим данные для токовой массы $m = 50$ МэВ, поскольку для меньших токовых масс этот отрезок очень мал, и его затруднительно изобразить на рисунке. На втором отрезке, обозначенном на рисунке как I, имеются две ветви решения a и b . На третьем отрезке, обозначенном через II, имеются три ветви, отмеченные на рисунке номерами 1, 2, 3. И, наконец, в области III существует только одно решение, обозначенное как B , с асимптотикой при больших импульсах $\theta \sim -2Gm/p^2$. Как и в киральном пределе, перспективными функциями для поиска минимума функционала $W(m)$ являются кусочно-непрерывные функции, выделенными представителями которых можно считать следующие траектории: $Aa1B$, $Aa2B$, $Aa3B$, $Ab1B$, $Ab2B$, $Ab3B$. Здесь первый символ обозначает, что мы выбрали ветвь A на первом отрезке значений p , второй символ – ветвь на отрезке I, третий – ветвь на отрезке II, наконец, четвертый символ B обозначает единственное решение в области III. Далее мы не будем, обозначая траектории, писать повторяющиеся во всех ветвях символы A и B .

Обратим теперь внимание на то, что даже если бы угол θ строго обращался в нуль в области III, то второе слагаемое в выражении (37) приводило бы к сингулярному вкладу, возникающему от члена $m^2 \cos^2 \theta / p^2$, с линейной расходимостью при больших импульсах. Кроме того, другие слагаемые также приводят к логарифмической расходимости. Парадоксально, что любое малое значение токовой массы m приводит к сингулярному функционалу, несмотря на то что в киральном пределе выражение $W(0)$ хорошо определено (здесь также уместно упомянуть сингулярность приближения нулевых мод по токовой массе, отмеченную в работе [20]). Аналогичная сингулярность обнаруживается и в выражении для кирального конденсата (см. формулу (36)). Первое и второе слагаемые дают соответственно линейно и квадратично расходящиеся вклады.

Таким образом, если не использовать обрезающий интегралы фактор, а рассматривать решения на всей оси, то абсолютные значения функционала $W(m)$ и кваркового конденсата $\langle \sigma | \bar{q}q | \sigma \rangle(m)$ не определены. Напомним, что по определению приближение (15) призвано описывать кварки низких энергий на фоне быстроменяющегося глюонного поля, по которому проводится усреднение. Вполне естественно поэтому ввести некоторый эффективный параметр обрезания по импульсу $\tilde{\Lambda}$, выше которого условие факторизации вкладов глюонного и кваркового полей нарушается. В этом случае зависимость средней энергии и кваркового конденсата от токовой массы определяется не только формой подынтегральной функции, но также и значением параметра $\tilde{\Lambda}$, причем если он достаточно велик ($\tilde{\Lambda} \gg M$, где M – динамическая масса кварка), то с учетом сингулярного характера интегралов зависимость наблюдаемых от m будет определяться в основном параметром обрезания $\tilde{\Lambda}$. Например, для модели Намбу–Иона-Лазинию его можно оценить как $\tilde{\Lambda} \sim 1$ ГэВ. Таким образом, для получения интересующей нас зависимости средней энергии и кваркового конденсата от токовой массы требуется привлечение дополнительной информации.

Просматривается и другая интересная возможность интерпретации сингулярности функционала средней энергии. Предположим, напротив, что на каждом масштабе увеличивающихся импульсов $\tilde{\Lambda}, \tilde{\Lambda}_1, \dots$ выполняется условие куперовского спаривания. Конечно, при этом необходимо внести некоторые коррективы в обоснование выбранного вида потенциала четырехкваркового взаимодействия. Например, вклад таких стохастических конфигураций, как инстантоны малого рамера, экспоненциально падает, и трудно рассчитывать, что они могут обеспечить куперовское спаривание⁵⁾ для импульсов выше $\tilde{\Lambda}$. Однако на малых расстояниях адекватнее, по-видимому, говорить об обмене жесткими глюонами. В соответствии с этим глюонная корреляционная функция в формуле (15) должна переходить в соответствующий пропагатор глюона, а формфактор должен приобретать факторизованный вид, где константа, характеризующая четырехфермионное взаимодействие, является функцией импульса, $G = G(p)$.

Отметим также, что интересующее нас эффективное четырехкварковое взаимодействие может быть получено в формализме квазисредних [21], гладко аппроксими-

⁵⁾ Не исключено, что на все меньших расстояниях доминирующими могут оказаться воздействия более фундаментальных полей.

рующем инфракрасную и ультрафиолетовую области импульсов. Легко видеть, что можно провести классификацию различных моделей в зависимости от того, сходится или расходится интеграл по импульсу от константы четырехфермионного (факторизованного) взаимодействия, $I_G = \int dp G(p)$. Если имеет место расходимость, то мы получаем сингулярную теорию. В этом случае мы попадаем в ситуацию, хорошо известную в теории перенормировок, постулат которой заключается в том, что физика малых импульсов “не зависит” от физики больших импульсов. В применении к нашему случаю реализация этой идеи принимает следующую форму. Обрежем интегралы по импульсу на очень большом масштабе $\Lambda \gg M$. Средняя энергия и кварковый конденсат (и любые другие наблюдаемые) будут конечными, но их величины будут существенно отличаться от значений, получаемых в киральном пределе. Вклад, приходящий от импульсов больше Λ , нам не известен, но его разрешено описывать путем добавления к интегралу $W_\Lambda = \int_0^\Lambda dp w(p)$ единственной регуляризующей константы C_Λ^W , не зависящей от параметров задачи (в нашем случае от g и m). В результате регуляризационного соглашения получим, что $W = W_\Lambda + C_\Lambda^W$.

Обратимся к рис. 1 и заметим, что любая траектория, задающая вещественное решение, при значениях импульса $p > \Lambda(g, m)$, где импульс $\Lambda(g, m)$ определяется точкой слияния траекторий 2 и 3 (описывающих соответственно метастабильное и неустойчивое решения), выходит на ветвь B , которая и приводит к сингулярному вкладу. Запишем теперь интеграл W в следующем виде:

$$W = \int_0^{\Lambda(g, m)} dp w(p) + \int_{\Lambda(g, m)}^\Lambda dp w(p) + C_\Lambda^W.$$

Положим

$$C^W(g, m) = \int_{\Lambda(g, m)}^\Lambda dp w(p) + C_\Lambda^W,$$

аналогичным образом поступим и с киральным конденсатом. Относительный функционал⁶⁾ средней энергии W_{reg} задан на ограниченном отрезке:

$$W_{\text{reg}}(m) = \int_0^{\Lambda(g, m)} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[|p_4|(1 - \cos \theta) - G \frac{p^2}{|p_4|^2} \left(\sin \theta - \frac{m}{p} \cos \theta \right)^2 \right], \quad (43)$$

аналогичное представление имеет место и для кваркового конденсата:

$$\langle \sigma | \bar{q}q | \sigma \rangle_{\text{reg}}(m) = \frac{iN_c}{\pi^2} \int_0^{\Lambda(g, m)} dp \frac{p^2}{|p_4|} (p \sin \theta - m \cos \theta). \quad (44)$$

На рис. 2 и 3 приведены средняя энергия и кварковый конденсат, вычисленные по формулам (43) и (44) для шести траекторий. Параметры модели выбирались в соответствии с данными модели Намбу–Иона-Лазинию. Константа, характеризующая

⁶⁾ Это, пожалуй, единственная достоверная информация, которой мы располагаем.

Рис. 2. Средняя энергия для шести траекторий, вычисленная с регуляризованным функционалом $W_{\text{reg}}(m)$, как функция токовой массы. Символы у кривой обозначают тип траектории решения. Траектории $b1$, $b2$, $b3$ идентичны траекториям $a1$, $a2$, $a3$ соответственно и показаны точками около соответствующих кривых; $B = W_{\pm}(0)$ для верхней и нижней кривых в киральном пределе $m = 0$. Выходящие из точки B линии, отмеченные пунктиром, получены с помощью дифференцирования функционала средней энергии по токовой массе кварка с использованием положительного и отрицательного решений в киральном пределе.

силу четырехфермионного взаимодействия, выбиралась равной $2G = 335$ МэВ. Численный анализ показывает, что траектории $b1$, $b2$, $b3$ в области малых токовых масс почти идентичны траекториям $a1$, $a2$, $a3$ соответственно. Поэтому на рисунках траектории $a1$, $a2$, $a3$ показаны соответствующими линиями, а траектории $b1$, $b2$, $b3$ – точками рядом с соответствующими линиями. Асимптотика траекторий типа a при малых импульсах имеет вид $\theta_a \sim -p/m \cdot (1 + m/2G)^{-1}$, аналогично для траекторий типа b мы имеем $\theta_b - \pi/2 \sim p/m - m/2G$. Сопоставление асимптотик решений показывает, что при выбранных параметрах G и m решения $a1$, $a2$, $a3$ и $b1$, $b2$, $b3$ приводят к почти одинаковым значениям средней энергии и кваркового конденсата и в этом смысле оказываются почти вырожденными в области малых токовых масс. Точка B на рис. 2 показывает величину $W_{\pm}(0)$ в киральном пределе. Точки C и D на рис. 3 обозначают аналогичные величины кваркового конденсата для двух крайних траекторий $a1$ и $a3$.

Для каждой траектории выберем теперь константы $C^W(g, m)$ и $C^{\bar{q}q}(g, m)$ так, чтобы средняя энергия и кварковый конденсат совпадали со значениями, полученными в киральном пределе. Отметим, что определяемая решением $a1$ самая нижняя

Рис. 3. Кварковый конденсат $\langle \sigma | \bar{q}q | \sigma \rangle_{\text{reg}}(m)$ как функция токовой массы. Обозначения траекторий те же, что и на рис. 2. Точки C и D отвечают значениям кваркового конденсата в киральном пределе $m = 0$.

траектория занимает особое положение – меньшего относительного вклада в среднюю энергию получить нельзя.

Если реализуется обсуждаемый сценарий интерпретации сингулярных функционалов, то парадоксальным образом зависимость наблюдаемых от токовой массы определяется в некотором смысле не ультрафиолетовым параметром Λ , а параметром $\Lambda(g, m)$, контролируемым физикой низких энергий. Отметим также, что токовая масса кварка в свободном гамильтониане (3) (и определяющий ей масштаб) представляет собой единственный априорный масштабный параметр в задаче (см. также работу [22]).

На рис. 4 для сравнения представлены равновесные углы θ в градусах для модели Намбу–Иона-Лазинио (сплошная кривая) и для решения $a1$ в модели Келдыша (штриховая кривая) как функции импульса p в МэВ при значении токовой массы $m = 5.5$ МэВ. Интересно отметить, что любое сферически-симметричное решение без щели вне кирального предела обязательно проходит через нуль при $p = 0$ (см. формулу (45) следующего раздела). Обратим внимание на очень интересное обстоятельство. Представленный рисунок демонстрирует, что вне кирального предела процесс спаривания становится существенным не при нулевом значении импульса (как это имеет место при нулевой токовой массе кварка), а при сдвинутом. Для выбранных настроечных параметров импульс сдвинут до величины $p_\theta \sim 40$ МэВ. Для модели Намбу–Иона-Лазинио можно получить, что

$$p_\theta = \left[m |M_q - m| \right]^{1/2}.$$

Рис. 4. Равновесный угол θ как функция импульса p . Сплошная линия отвечает модели Намбу–Иона-Лазинио, штриховая линия – наиболее устойчивой ветви модели Келдыша. Токовая масса кварка $m = 5.5$ МэВ.

Обратная величина $r_\theta = 1/p_\theta$ определяет характерный размер области, существенной для процесса спаривания. В киральном пределе эта область формально бесконечно велика. Напомним также, что представленные кривые демонстрируют как бы два противоположных предельных режима, и было бы интересно выяснить, к какому из них ближе модель с более реалистичным коррелятором.

Одним из мотивов изучения модели Келдыша был вопрос о том, насколько естественной является регуляризация функционалов, которую демонстрируют модели с взаимодействием, заданным сепарабельным ядром. Мы видели, что в киральном пределе для ядра с наиболее выраженным регуляризующим свойством с дельта-образной по импульсу функцией средняя энергия и киральный конденсат хорошо определены. Вне кирального предела обнаруживается неожиданная сингулярность, которую при выполнении определенных условий можно устранять путем использования информации об относительных значениях средней энергии и кваркового конденсата с последующим продолжением по непрерывности до хорошо определенных в киральном пределе значений. В то же время, введенный плавающий параметр $\Lambda(g, m)$ наглядно демонстрирует сложную параметрическую зависимость сингулярных функционалов. Было бы полезно выяснить, насколько можно ослабить условия построения регулярного функционала. В частности, попробуем использовать наивную аппроксимацию

$$W(m) \simeq W(0) + W'(0)m, \quad \langle \sigma | \bar{q}q | \sigma \rangle(m) \simeq \langle \sigma | \bar{q}q | \sigma \rangle(0) + \langle \sigma | \bar{q}q | \sigma \rangle'(0)m,$$

где W' и $\langle \sigma | \bar{q}q | \sigma \rangle'$ обозначают производную по m . Используя для вычисления решение в киральном пределе для траектории, описываемой верхней и нижней дугами,

получим

$$W(m) \simeq -\frac{G^4}{15\pi^2} \pm \frac{G^3}{4\pi} m, \quad \langle \sigma | \bar{q}q | \sigma \rangle(m) \simeq \pm \frac{iN_c G^3}{2\pi} - \frac{iN_c 4G^2}{3\pi^2} m,$$

где знак плюс отвечает верхней дуге, минус – нижней дуге. На рис. 2 пунктиром показана средняя энергия как функция токовой массы, полученная с использованием положительного (пунктир, идущий вверх) и отрицательного (пунктир, идущим вниз) решений в киральном пределе. Видно, что приближенная формула хорошо работает в области малых токовых масс. При больших токовых массах, порядка 10 МэВ, становятся существенными нелинейные вклады. Данные для кирального конденсата не воспроизводятся.

В приложении мы сравниваем данные, полученные в приближении Хартри–Фока–Боголюбова для моделей Намбу–Иона-Лазинио и Келдыша, с данными, полученными в приближении среднего поля.

5. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ И ГАУССОВ КОРРЕЛЯТОРЫ

Теперь обратимся к более реалистичной ситуации и проанализируем сферически-симметричные решения в случае, когда корреляционная функция $GI(\mathbf{x})$ достаточно быстро спадает с увеличением расстояния. Интегрируя по азимутальным углам, уравнение для определения равновесного угла мы можем привести к следующему виду:

$$|p_4|^2 \sin \theta - \frac{4G}{\pi} \left(\cos \theta + \frac{m}{p} \sin \theta \right) \times \\ \times \int_0^\infty \int_0^\infty dq dx \frac{q}{|q_4|} (q \sin \theta' - m \cos \theta') I(x) \sin(px) \sin(qx) = 0. \quad (45)$$

Рассмотрим асимптотику решений при больших импульсах p . Нас интересуют решения, для которых угол θ стремится к нулю. Разложим выражение (45), считая угол θ малым. С точностью до членов порядка θ имеем

$$p^2 \theta - \frac{4G}{\pi} \int_0^\infty dq (q \theta' - m) I(p, q) = 0.$$

Если функция θ убывает быстрее чем $1/q$, то существенный вклад в интеграл вносит только слагаемое, пропорциональное m . Таким образом, если ядро $I(p, q)$ интегрируемо, то асимптотика имеет вид

$$\theta = -\frac{4Gm}{\pi p^2} \int_0^\infty dq I(p, q).$$

Рассмотрим теперь для конкретности два вида корреляторов: экспоненциальный $I(\mathbf{x}) = e^{-a|\mathbf{x}|}$ и гауссов $I(\mathbf{x}) = e^{-a^2 \mathbf{x}^2}$. В этих случаях интегрирование по x выполняется явно, и ядра интегральных уравнений приобретают вид

$$\int_0^\infty dx e^{-ax} \sin(px) \sin(qx) = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{a^2 + (p-q)^2} - \frac{1}{a^2 + (p+q)^2} \right)$$

Рис. 5. Параметр M_θ (сплошная линия получена при токовой массе $m = 5.5$ МэВ, штриховая линия – в киральном пределе $m = 0$) и корень кубический из модуля кваркового конденсата в киральном пределе (пунктир) для гауссова коррелятора как функции константы G .

для экспоненциального коррелятора и вид

$$\int_0^\infty dx e^{-a^2 x^2} \sin(px) \sin(qx) = \frac{\sqrt{\pi}}{4a} \left(e^{-\frac{(p-q)^2}{4a^2}} - e^{-\frac{(p+q)^2}{4a^2}} \right)$$

для гауссова коррелятора. При больших импульсах p в том и другом случаях мы оставляем вклад только первого слагаемого, в результате асимптотика решений выражается через соответствующую константу, определяемую интегралом с ядром $I(p, q)$. Отсюда легко заключить, что мы снова приходим к сингулярному функционалу для средней энергии вне кирального предела.

На рис. 5 показано поведение параметра M_θ (41) и кваркового конденсата в зависимости от константы G для гауссова коррелятора, полученные путем численного решения уравнения (45). Сплошная линия обозначает решение с токовой массой $m = 5.5$ МэВ, штриховая линия найдена в киральном пределе, пунктиром показан кубический корень из модуля кваркового конденсата, полученный в киральном пределе. Обращает на себя внимание существенное изменение характера генерации параметра M_θ вне кирального предела. Для экспоненциального коррелятора получаются похожие закономерности.

К сожалению, крайне затруднительно получить все решения нелинейного интегрального уравнения (45), мы представили единственную, наиболее устойчивую ветвь. Как мы показали в предыдущем разделе, это обстоятельство может послужить серьезным препятствием для получения информации о наблюдаемых вне ки-

Рис. 6. Параметр M_θ как функция импульса p , соответствующий наилучшему фитированию экспериментальных данных. Жирная сплошная кривая получена для гауссова коррелятора при $m = 5.5$ МэВ, штриховая линия – в киральном пределе. Кривые для экспоненциального коррелятора представлены тонкой сплошной линией (вне кирального предела) и пунктиром (в киральном пределе).

рального предела. Поэтому мы ограничимся только случаем нулевой токовой массы кварка и проведем фитирование “экспериментальных” данных, динамической массы кварка $M = -335$ МэВ и кирального конденсата $|\langle \sigma | \bar{q}q | \sigma \rangle| = (245 \text{ МэВ})^3$, сопоставляя динамическую массу кварка с параметром M_θ и настраивая параметры a и G . Параметр a для экспоненциального и гауссова корреляторов оказался равным, соответственно $a_{\text{ex}} = 0.15$ ГэВ и $a_{\text{gs}} = 0.16$ ГэВ, а наилучшие значения G равны $G_{\text{ex}} = 0.35$ и $G_{\text{gs}} = 0.31$. При этом $|M_\theta^{\text{ex}}| = 338$ МэВ, $|\langle \sigma | \bar{q}q | \sigma \rangle_\theta^{\text{ex}}| = (228 \text{ МэВ})^3$, $|M_\theta^{\text{gs}}| = 340$ МэВ, $|\langle \sigma | \bar{q}q | \sigma \rangle_\theta^{\text{gs}}| = (245 \text{ МэВ})^3$. Можно сопоставить полученные значения константы четырехфермионного взаимодействия и упаковочного фактора, через который выражаются параметры инстантонной модели $\tilde{G} = (4\pi^2)^2 n \rho^4$. Получаемая оценка $n \rho^4 \sim 10^{-3}$ является вполне реалистичной. В то же время имеется серьезное различие в характерном размере конфигурации. Напомним, однако, что все данные получены в киральном пределе.

Для сравнения на рис. 6 представлен параметр M_θ как функция импульса p в ГэВ, полученный с параметрами, отвечающими наилучшему фитированию экспериментальных данных. Жирная сплошная кривая получена для гауссова коррелятора при $m = 5.5$ МэВ, штриховая – в киральном пределе. Результаты расчетов для экспоненциального коррелятора представлены тонкой сплошной линией (вне кирального предела) и пунктиром (в киральном пределе). Параметр p_θ оценивается при токо-

вой массе $m = 5.5$ МэВ как $p_\theta \sim 150$ Мэв, т.е. имеет порядок массы π -мезона. Использование коррелятора с инстантонным профилем, как и подробное исследование случаев с экспоненциальным и гауссовым корреляторами, заслуживает отдельного обсуждения и будет дано в следующей работе.

6. ВЫВОДЫ

В настоящей работе с единых позиций рассмотрено поведение кварков в различных ансамблях стохастических глюонных полей. Использована простейшая аппроксимация ансамбля глюонных полей, построенная на основе двухточечной корреляционной функции. Посредством процедуры усредненного описания “низкочастотной” составляющей выведены эффективные функционалы для средней энергии в приближении Хартри–Фока–Боголюбова. Даны оценки параметров основного состояния. Рассмотрены модели с экспоненциальным и гауссовым корреляторами и проведено их фитирование в киральном пределе. Представленные данные позволяют оценить характерную область, где процессы спаривания кварка и антикварка становятся существенными. Для параметров, характерных для модели Намбу–Иона-Лазинио, размер этой области (квазичастицы) $r_\theta \sim 1/40$ МэВ $^{-1}$. Для экспоненциального и гауссова корреляторов он оценивается как $r_\theta \sim 1/150$ МэВ $^{-1}$. Пр продемонстрирована сингулярность функционала средней энергии вне кирального предела.

Показано, что при определенных условиях может реализоваться весьма интересный сценарий интерпретации сингулярности, и в теории возникает естественный регуляризатор $\Lambda(g, m)$, а также некоторый набор констант (приводящих к значениям, получаемым в киральном пределе), с помощью которых наблюдаемые получают однозначное конечное значение. В этой связи интересно отметить, что эффективные мезонные теории, например модель Намбу–Иона-Лазинио, дают успешные предсказания, работая формально вне предела применимости $1/M$ -разложения, в рамках которого они формулируются. Соответствующие корреляционные функции “насыщаются” в области больших импульсов интегралами с квадратичной и логарифмической расходимостями⁷⁾, при помощи которых выражаются характеристики мезонов. В связи с появившимся естественным параметром регуляризации $\Lambda(g, m)$ резонно задаться вопросом, не могут ли эти расходимости иметь реальный смысл, а не представлять собой досадную особенность моделей, от которой стремятся избавиться, как это делается, например, в приближении нулевых мод.

Наконец заметим, что рассмотренные нами характеристики кваркового ансамбля не являются физическими наблюдаемыми, и, чтобы судить о пригодности моделей, следует обратиться, например, к мезонным корреляционным функциям. Это исследование было проделано для модели Келдыша в работе [23], и в целом ответ оказывается положительным. Мезоны, несмотря на сингулярный характер вакуумного состояния, конечны, вполне узнаваемы и соответствуют шкале энергий экспери-

⁷⁾ Приближение нулевых мод в модели инстантонной жидкости несколько маскирует этот факт, хотя и там актуальны вклады при импульсах больше 1 ГэВ.

ментальных данных. Данное наблюдение позволяет поставить задачу извлечения характеристик стохастического поля путем фитирования экспериментальных данных ежегодника “Particle Data Group”.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Обычно эффективные теории формулируются на языке функционального интегрирования. Для перехода к этому описанию следует сопоставить эффективному гамильтониану (15) соответствующую лагранжеву плотность действия

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma_\mu\partial_\mu + im)q - G'\bar{q}t^a\gamma_\mu q \int d\mathbf{y} I_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\bar{q}'t^a\gamma_\nu q', \quad (46)$$

где $q = q(\mathbf{x}, t)$, $\bar{q} = \bar{q}(\mathbf{x}, t)$, $q' = q(\mathbf{y}, t)$, $\bar{q}' = \bar{q}(\mathbf{y}, t)$. В старшем порядке по N_c для суммы генераторов цветовой группы имеем

$$\sum_{a=1}^{N_c^2-1} t_{ij}^a t_{kl}^a \approx \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{kj}.$$

Для простоты рассмотрим только коррелятор $I_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta_{\mu\nu}I(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Используя преобразование Фирца $\gamma_\mu \otimes \gamma_\mu = 1 \otimes 1 + i\gamma_5 \otimes i\gamma_5 - \frac{1}{2} \gamma_\mu \otimes \gamma_\mu - \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \otimes \gamma_\mu \gamma_5$ и оставляя только скалярный вклад, в приближении среднего поля получим следующую эффективную лагранжеву плотность:

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma_\mu\partial_\mu + im)q - G' \int d\mathbf{y} I(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle \bar{q}q' \rangle \bar{q}' q \quad (47)$$

(угловые скобки обозначают соответствующее среднее). Условие самосогласованности приближения, сформулированное в виде интегрального уравнения

$$-iM(\mathbf{p}) = \int \frac{dq}{(2\pi)^4} G' I(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \text{Tr} \frac{1_c}{\hat{q} + im + iM(\mathbf{q})}, \quad (48)$$

позволяет получить массу кварка. Интегрируя по четвертой компоненте импульса,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_4}{2\pi} \frac{1}{q_4^2 + \mathbf{q}^2 + (m + M(\mathbf{q}))^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\mathbf{q}^2 + (m + M(\mathbf{q}))^2)^{1/2}},$$

имеем

$$M(\mathbf{p}) = 2G' N_c \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} I(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \frac{m + M(\mathbf{q})}{(\mathbf{q}^2 + (m + M(\mathbf{q}))^2)^{1/2}}. \quad (49)$$

Для отвечающего модели Намбу–Иона-Лазинию коррелятора получаем хорошо известное уравнение щели

$$M = 2G' N_c \int^\Lambda \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{m + M}{(\mathbf{q}^2 + (m + M)^2)^{1/2}}.$$

Для модели Келдыша

$$M(\mathbf{p}) = 2G' N_c \frac{m + M(\mathbf{p})}{(\mathbf{p}^2 + (m + M(\mathbf{p}))^2)^{1/2}};$$

напомним, $I(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p})$. Из приведенного выражения легко видеть, что решение удобно представить как функцию $p(M)$.

В приближении Хартри–Фока–Боголюбова используется следующая сумма по цветовым матрицам:

$$\sum_{a=1}^{N_c^2-1} t_{ij}^a t_{jk}^a = \frac{N_c^2-1}{2N_c} \delta_{ik}.$$

В результате для параметра массы, характеризующего угол спаривания пары кварк–антикварк можно получить

$$M_\theta(\mathbf{p}) = 2G' \frac{N_c^2-1}{N_c} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} I(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \frac{|\mathbf{q}|}{|q_4|} \sin \theta(q). \quad (50)$$

Сравнивая это выражение с формулой (49), легко видеть, что константа четырех-фермионного взаимодействия входит с небольшой поправкой $1/N_c$, соответствующей приближению среднего поля, где оставлены старшие вклады по N_c . Легко получить явные формулы для модели Келдыша в киральном пределе. В приближении среднего поля имеем

$$M(p) = ((2G' N_c)^2 - p^2)^{1/2};$$

в приближении Хартри–Фока–Боголюбова получим

$$M(p) = \left(\left(2G' \frac{N_c^2-1}{N_c} \right)^2 - p^2 \right)^{1/2}$$

(см. также формулу (42)). При $m \neq 0$ зависимости масс M_θ и M_q от импульса несколько различаются. Например, для модели Келдыша в приближении среднего поля при нулевом импульсе имеем $M(0) = 2G' N_c$, тогда как в приближении Хартри–Фока–Боголюбова $M_\theta(0) = 0$. При больших импульсах масса в приближении среднего поля ведет себя как $|M(p)| \sim 2G' N_c m/p$, а в приближении Хартри–Фока–Боголюбова – как $|M(p)| \sim (2G'(N_c^2-1)/N_c)^2 m/p^2$ (см. также рис. 6). Однако в целом, если ориентироваться на интегральные характеристики $M(p)$, то результаты будут отличаться не сильно. Аналогичные соотношения можно получить и для модели Намбу–Иона-Лазинио.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Следует заметить, что проведенное нами рассмотрение гамильтониана (15) (а также лагранжианов (46) и (47)) применимо и в лоренц-инвариантной ситуации, когда интегрирование по времени τ проводится и по кварковым полям (для лагранжианов (46), (47) соответственно оставлено интегрирование по “времени” y_4 , а фактор является функцией уже 4-вектора $I(x-y)$):

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma_\mu \partial_\mu + im)q - G \int dy I(x-y) \langle \bar{q}q' \rangle \bar{q}' q. \quad (51)$$

Условие самосогласованности вида (48) приобретает ковариантную форму. В частности, для модели Келдыша в четырехмерном пространстве, когда $I(p) = (2\pi)^4 \delta(p)$,

уравнение щели приобретает вид

$$M = 4GN_c \frac{m + M}{p^2 + (m + M)^2}.$$

Отсюда легко заключить, что кварк никогда не попадает на массовую поверхность, поскольку $p^2 + (m + M)^2 = 4N_c G(m + M)/M > 0$. Это свойство мы уже отмечали в работе [24]. Аналогичное поведение наблюдается и в аналитических моделях конфайнмента [25]. Недостатком четырехмерной модели Келдыша является отсутствие связанных состояний, в отличие от модели Келдыша с трехмерным формфактором. В формуле для средней энергии (31) в члене, описывающем взаимодействие, появляется дополнительное интегрирование по четвертой компоненте вспомогательного 4-импульса l :

$$\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \rightarrow \int \frac{dl_4}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} I(l_4) \frac{1}{|p_4| + |q_4| - il_4},$$

где $I(l_4)$ – соответствующая часть формфактора. В частности, в рамках четырехмерной модели Келдыша с $I(l_4) = 2\pi\delta(l_4)$ для функционала средней энергии можно получить

$$W(m) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[|p_4|(1 - \cos\theta) - G \frac{p^2}{|p_4|^2} \frac{1}{2|p_4|} \left(\sin\theta - \frac{m}{p} \cos\theta \right)^2 \right]. \quad (52)$$

Сингулярность, отмеченная нами выше для трехмерной модели, в данном случае проявляется слабее – в виде логарифмической расходимости.

Благодарности. Авторы выражают благодарность И. В. Аникину, Б. А. Арбузову, М. К. Волкову, С. Б. Герасимову, А. Е. Дорохову, Е.-М. Ильгенфритцу, Н. И. Кочелеву, С. Н. Неделько, А. Е. Раджабову, А. М. Снигиреву, О. В. Теряеву за многочисленные полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 04-84-398), NATO PDD(CP)-NUKR980668, а также гранта отделения физики и астрономии Национальной академии наук Украины.

Список литературы

- [1] T. Schäfer, E. V. Shuryak, *Rev. Modern Phys.*, **70**:2 (1998), 323–425.
- [2] М. К. Волков, А. Е. Раджабов, *УФН*, **176**:6 (2006), 569–580; D. Ebert, H. Reinhardt, M. K. Volkov, *Progr. Part. Nucl. Phys.*, **33** (1994), 1–120.
- [3] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.*, **122**:1 (1961), 345–358.
- [4] C. G. Callan Jr., R. Dashen, D. J. Gross, *Phys. Lett. B*, **66**:4 (1977), 375–381; *Phys. Rev. D*, **17**:10 (1978), 2717–2763.
- [5] A. Di Giacomo, E. Meggiolaro, H. Panagopoulos, *Nucl. Phys. B*, **483**:1–2 (1997), 371–382; M. D’Elia, A. Di Giacomo, E. Meggiolaro, *Phys. Lett. B*, **408**:1–4 (1997), 315–319; *Phys. Rev. D*, **67**:11 (2003), 114504; G. S. Bali, N. Brambilla, A. Vairo, *Phys. Lett. B*, **421**:1–4 (1998), 265–272.
- [6] A. E. Dorokhov, S. V. Esaibegyan, S. V. Mikhailov, *Phys. Rev. D*, **56**:7 (1997), 4062–4068; E.-M. Ilgenfritz, B. V. Martemyanov, S. V. Molodtsov, M. Müller-Preussker, Yu. A. Simonov, *Phys. Rev. D*, **58**:11 (1998), 114508; E.-M. Ilgenfritz, B. V. Martemyanov, M. Müller-Preussker, *Phys. Rev. D*, **62**:9 (2000), 096004.
- [7] D. I. Diakonov, V. Yu. Petrov, *Nucl. Phys. B*, **245** (1984), 259–292.

- [8] L. D. Faddeev, *Knots as possible excitations of the quantum Yang–Mills fields*, [arXiv: hep-th/0805.1624](#); L. Faddeev, A. J. Niemi, *Phys. Rev. Lett.*, **82**:8 (1999), 1624–1627; *Phys. Lett. B*, **449**:3–4 (1999), 214–218; **464**:1–2 (1999), 90–93; А. П. Протогенов, *УФН*, **176**:7 (2006), 689–715; P. van Baal, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **108** (2002), 3–11; [arXiv: hep-th/0109148](#); P. van Baal, A. Wipf, *Phys. Lett. B*, **515**:1–2 (2001), 181–184; E. T. Tomboulis, *Deriving confinement via RG decimations*, [arXiv: 0710.1894](#); *Reply to arXiv:0711.4930[hep-th] by Ito and Seiler*, [arXiv: 0712.2620](#); K. R. Ito, E. Seiler, *On the recent paper on quark confinement by Tomboulis*, [arXiv: 0711.4930](#).
- [9] S. V. Molodtsov, G. M. Zinovjev, *JHEP*, **12** (2008), 112; [arXiv: hep-ph/0704.0141](#).
- [10] T. Schaefer, *Instantons and Monte Carlo Methods in Quantum Mechanics*, [arXiv: hep-lat/0411010](#).
- [11] Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, М., 1968.
- [12] Yu. A. Simonov, *Phys. Lett. B*, **412**:3–4 (1997), 371–376.
- [13] P. V. Pobylitsa, *Phys. Lett. B*, **226**:3–4 (1989), 387–392.
- [14] N. G. Van Kampen, *Phys. Rep.*, **24**:3 (1976), 171–228; *Physica*, **74**:2 (1974), 215–238; 239–247.
- [15] H. G. Dosch, Yu. A. Simonov, *Phys. Lett. B*, **205**:2–3 (1988), 339–344; A. Di Giacomo, H. D. Dosch, V. I. Shevchenko, Yu. A. Simonov, *Phys. Rep.*, **372**:4 (2002), 319–368.
- [16] E.-M. Ilgenfritz, M. Müller-Preussker, A. Sternbeck, A. Schiller, I. L. Bogolubsky, *Braz. J. Phys.*, **37**:1B (2007), 193–200; [arXiv: hep-lat/0609043](#); I. L. Bogolubsky, V. G. Bornyakov, G. Burgio, E.-M. Ilgenfritz, M. Müller-Preussker, V. K. Mitrjushkin, *Lattice results on gluon and ghost propagators in Landau gauge*, [arXiv: hep-lat/0804.1250](#).
- [17] Н. Н. Боголюбов, *Изв. АН СССР. Сер. физ.*, **11** (1947), 77–90.
- [18] T. Hatsuda, T. Kunihiro, *Phys. Rep.*, **247**:5–6 (1994), 221–367.
- [19] Л. В. Келдыш, *Дис. ... докт. физ.-матем. наук*, ФИАН, 1965; Е. О. Кане, *Phys. Rev.*, **131**:1 (1963), 79–88; В. Л. Бонч-Бруевич, *Вопросы электронной теории сильно легированных полупроводников*, Итоги науки. Физика твердого тела. Теория твердого тела, ВИНТИ, М., 1965.
- [20] A. G. Zubkov, O. V. Dubasov, B. O. Kerbikov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **14**:2 (1999), 241–242.
- [21] B. A. Arbuzov, M. K. Volkov, I. V. Zaitsev, *Internat. J. Modern Phys. A*, **21**:28–29 (2006), 5721–5742; B. A. Arbuzov, *Phys. Lett. B*, **656**:1–3 (2007), 67–73.
- [22] O. V. Teryaev, *Czech. J. Phys.*, **53** (2003), B47–B58; [arXiv: hep-ph/0306301](#).
- [23] S. V. Molodtsov, M. K. Volkov, G. M. Zinovjev, *Exploring meson correlators in the model with four-quark interaction Lagrangian*, [arXiv: hep-ph/0812.2666](#).
- [24] А. Е. Дорохов, Г. М. Зиновьев, С. В. Молодцов, *ЯФ*, **71**:4 (2008), 785–797.
- [25] G. V. Efimov, S. N. Nedelko, *Eur. Phys. J. C*, **1**:1–2 (1998), 343–350; A. C. Kolloniatis, S. N. Nedelko, *Phys. Rev. D*, **64**:11 (2001), 114025.

Поступила в редакцию 13.05.2008,
после доработки 11.01.2009