Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. П. Соловцова, В. И. Лашкевич, Представление
Йоста–Лемана–Дайсона и эффекты, связанные с массой
мишени, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 3, 471–486

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6410>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:00:48

© 2009 г.

О. П. Соловцова^{*†}, В. И. Лашкевич^{*}

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЙОСТА–ЛЕМАНА–ДАЙСОНА И ЭФФЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С МАССОЙ МИШЕНИ

Для структурных функций неупругого лептон-адронного рассеяния с использованием аналитических моментов по переменной s (вместо известных переменных Нахтмана ξ и Бьеркена x) развит метод учета эффектов, связанных с массой мишени. Найдены новые выражения для структурных функций F_1 , F_2 и F_3 , содержащие зависимость от массы мишени и находящиеся в согласии со спектральным свойством.

Ключевые слова: представление Йоста–Лемана–Дайсона, структурная функция неупругого лептон-адронного рассеяния, поправка на массу мишени.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теоретическом анализе процесса неупругого лептон-адронного рассеяния широко используется операторное разложение, применяющееся в данном случае для произведения токов и приводящее к твистовой структуре представления для моментов структурных функций. В таком представлении при больших переданных импульсах основной вклад определяется слагаемым с наименьшим значением твиста – разницей между размерностью оператора и его лоренцевым спином, а применение метода ренормализационной группы [1] позволяет установить закон Q^2 -эволюции моментов. При таком рассмотрении, изначально ориентированном на бьеркеновский предел больших энергий и переданных импульсов, остаются скрытыми ряд общих свойств структурных функций, вытекающих из фундаментальных принципов теории.

Метод операторного разложения для изучения эффектов, связанных с массой мишени, впервые был применен в работе [2]. Такой подход, подразумевающий включение в рассмотрение массовых поправок, стали называть методом ξ -скейлинга. Выражения для структурных функций, получаемые этим методом, имеют существенный недостаток, который вызван нарушением условия спектральности. В связи с этим возникла проблема описания структурных функций при стремлении бьеркеновской

^{*}Международный центр перспективных исследований, Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Гомель, Беларусь

[†]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: olsol@theor.jinr.ru

переменной x к единице. Эта проблема с момента возникновения и до сих пор широко обсуждается в литературе [3]–[11] (см. также недавний обзор [12]).

В работе [13] было показано, что эта проблема аналогична той, которая возникает для инвариантного заряда в квантовой хромодинамике, когда нарушение общих принципов теории, отраженных в представлении Челлена–Лемана, приводит к появлению нефизических особенностей. Решение проблемы было предложено в аналитическом подходе Ширкова–Соловцова [14], [15], который далее был обобщен и на случай более сложных объектов, каковыми являются структурные функции (см. обзорные статьи [16], [17]).

Для процесса неупругого лептон-адронного рассеяния общие принципы теории аккумулируются в интегральном представлении Йоста–Лемана–Дайсона (ЙЛД). Это представление было предложено в работе [18] в симметричном случае и в работе [19] – в общем случае. Доказательство представления ЙЛД базируется на самых общих свойствах теории, таких как ковариантность, эрмитовость, спектральность и причинность (см. книгу [1], некоторые математические вопросы в связи с представлением ЙЛД рассмотрены также в [20], [21]). Применению представления ЙЛД для изучения автомодельной асимптотики структурных функций посвящены работы Боголюбова, Владимирова и Тавхелидзе [22], [23]. Представление ЙЛД было также использовано в работе [24]. В работе [13] было показано, что при использовании представления ЙЛД естественной скейлинговой переменной является новая переменная s , моменты по которой $M_n(Q^2)$ являются аналитическими функциями¹⁾. При этом условие спектральности для структурных функций выполняется автоматически, и проблемы при стремлении бьеркеновской переменной x к единице не возникает.

Цель настоящей работы состоит в применении интегрального представления ЙЛД к изучению эффектов, связанных с массой мишени. В разделе 2 приведены основные соотношения. В разделе 3 на примере структурной функции в случае скалярных токов изложена суть метода учета массовых эффектов. Аналогичное рассмотрение для структурных функций нуклона F_1 , F_2 и F_3 , а также сравнение с другими подходами представлены в разделе 4. Результаты анализа обсуждаются в заключении.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Для любой структурной функции $W(\nu, Q^2)$, удовлетворяющей условиям ковариантности, спектральности, действительности, симметрии и причинности, существует единственная вещественная обобщенная функция медленного роста $\psi(\mathbf{u}, \lambda^2)$ такая, что справедливо интегральное представление ЙЛД, которое в системе покоя нуклона можно записать в виде [22], [23]

$$W(\nu, Q^2) = \epsilon(q_0) \int d\mathbf{u} d\lambda^2 \delta[q_0^2 - (M\mathbf{u} - \mathbf{q})^2 - \lambda^2] \psi(\mathbf{u}, \lambda^2). \quad (2.1)$$

¹⁾В отличие от переменной η , введенной в работе [24], переменная s изменяется от нуля до единицы.

Носитель функции $\psi(\mathbf{u}, \lambda^2)$ сосредоточен на множестве

$$\rho = |\mathbf{u}| \leq 1, \quad \lambda^2 \geq M^2(1 - \sqrt{1 - \rho^2})^2. \quad (2.2)$$

Мы используем общепринятые обозначения $Q^2 = -q^2$, $\nu = P \cdot q$, $M = \sqrt{P^2}$ – масса нуклона [25].

Следует отметить, что наряду с представлением ЙЛД в литературе обсуждается также более простое по форме интегральное представление Дезера–Гильберта–Сударшана (ДГС) [26]. Естественно, что более простой вид облегчает применение представления ДГС, однако его статус в квантовой теории поля является менее определенным, чем представления ЙЛД (см. работы [27]–[29]).

В работе [13] было показано, что естественной скейлинговой переменной в представлении (2.1) является переменная

$$s = \sqrt{\frac{Q^4/4 + M^2Q^2}{\nu^2 + M^2Q^2}} = x \sqrt{\frac{1 + 4\epsilon}{1 + 4\epsilon x^2}}, \quad \epsilon = M^2/Q^2, \quad (2.3)$$

аккумулирующая корневую структуру из аргумента δ -функции. Переменная s содержит зависимость от массы мишени (нуклона) и отличается не только от переменной Бьеркена $x = Q^2/2\nu$, но и от переменной Нахтмана [30]

$$\xi = \frac{2x}{1 + \sqrt{1 + 4\epsilon x^2}}, \quad (2.4)$$

которая в партонной интерпретации получается из δ -функции $\delta[(\xi P + q)^2]$. В физической области процесса переменная s изменяется так же, как и переменная x , в пределах от нуля до единицы.

С использованием переменной s в работе [13] были введены s -моменты структурных функций

$$\mathcal{M}_n(Q^2) = \frac{1}{(1 + 4M^2/Q^2)^{(n-1)/2}} \int_0^1 ds s^{n-2} W(\nu, Q^2), \quad (2.5)$$

для которых из (2.1) следует представление

$$\mathcal{M}_n(Q^2) = (Q^2)^{n-1} \int_0^\infty d\sigma \frac{m_n(\sigma)}{(\sigma + Q^2)^n}, \quad (2.6)$$

где $m_n(\sigma)$ – весовая функция для s -моментов,

$$m_n(\sigma) = \frac{1}{n} \int_0^1 d\rho \rho^{n+1} \theta(\sigma - \sigma_{\min}) \psi(\rho, \sigma - M^2\rho^2), \quad (2.7)$$

$$\sigma_{\min} = 2M^2(1 - \sqrt{1 - \rho^2}).$$

Из представления (2.6) вытекает аналитичность $\mathcal{M}_n(Q^2)$ в комплексной плоскости Q^2 , разрезанной вдоль отрицательной полуоси, т.е. аналитичность типа Челлена–Лемана. В работе [16] была установлена связь аналитических моментов $\mathcal{M}_n(Q^2)$

и операторного разложения, в котором тензорная структура матричных элементов операторов по нуклонным состояниям должна быть фиксирована в соответствии с условием их ортогональности импульсу нуклона.

Связь между s -моментами (2.5) и обычными x -моментами

$$M_n(Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-2} W(\nu, Q^2) \quad (2.8)$$

определяется соотношением [16]

$$\mathcal{M}_n(Q^2) = \frac{1}{\Gamma[(n+1)/2]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma[k + (n+1)/2]}{k!} \left(-\frac{4M^2}{Q^2}\right)^k M_{n+2k}(Q^2). \quad (2.9)$$

В асимптотической области, соответствующей большим значениям переданного импульса Q^2 , когда становится возможным пренебречь степенными поправками вида $1/(Q^2)^n$, s - и x -моменты совпадают друг с другом.

Представление ЙЛД (2.1) может быть переписано в виде (см. работу [13])

$$W(x, Q^2) = \int_0^1 d\beta \int_0^\infty d\sigma \delta \left[\sigma + Q^2 + 2M^2(1 - \sqrt{1 - \beta^2}) - \frac{\beta}{s} Q^2 \sqrt{1 + 4\epsilon} \right] H(\beta, \sigma), \quad (2.10)$$

где новая весовая функция $H(\beta, \sigma)$ имеет носитель в области $\{0 < \beta < 1; \sigma > 0\}$ и выражается через исходную функцию $\psi(\rho, \lambda^2)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} H(\beta, \sigma) &= \mathcal{H}(\beta, \sigma + 2M^2(1 - \sqrt{1 - \beta^2})), \\ \mathcal{H}(\beta, \sigma) &= \int_\beta^1 d\rho \rho \theta[\sigma - 2M^2(1 - \sqrt{1 - \rho^2})] \tilde{\psi}(\rho, \sigma - 2M^2(1 - \sqrt{1 - \rho^2})), \\ \tilde{\psi}(\rho, s) &= \psi(\rho, s + \lambda_{\min}^2), \quad \lambda_{\min}^2 = M^2(1 - \sqrt{1 - \rho^2})^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Связь функций $H(\beta, \sigma)$ и $m_n(\sigma)$ имеет вид

$$m_n(\sigma) = \int_0^1 d\beta \beta^{n-1} \tilde{H}(\beta, \sigma), \quad (2.12)$$

где $\tilde{H}(\beta, \sigma) = H(\beta, \sigma - 2M^2(1 - \sqrt{1 - \beta^2}))$. Таким образом, функция $m_n(\sigma)$ является моментом весовой функции $\tilde{H}(\beta, \sigma)$ и, следовательно, $\tilde{H}(\beta, \sigma)$ может быть восстановлена с помощью преобразования Меллина

$$\tilde{H}(\beta, \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dn \beta^{-n} m_n(\sigma). \quad (2.13)$$

Для функции $\mathcal{F}(x, Q^2)$, которая соответствует структурной функции $W(x, Q^2)$, если зависимостью от массы мишени можно пренебречь, справедливо представление [13]

$$\mathcal{F}(x, Q^2) = \int_x^1 dy H \left[y, \left(\frac{y}{x} - 1 \right) Q^2 \right]. \quad (2.14)$$

Партонное распределение $F(x)$ возникает из функции $\mathcal{F}(x, Q^2)$ в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$. Обозначим через $H(x)$ предел весовой функции $H(x, \sigma)$ при стремлении второго аргумента к бесконечности. Тогда из (2.14) находим

$$F(x) = \int_x^1 dy H(y), \quad (2.15)$$

откуда следует, что в бьеркеновском пределе $H(x) = -dF(x)/dx$.

Таким образом, зная выражение для весовой функции $m_n(\sigma)$, можно описанным выше способом найти структурную функцию $W(x, Q^2)$. Понятно, что в общем случае это является сложной задачей, фактически ее решение означает точное решение уравнения (2.1). Здесь же при нахождении весовой функции $m_n(\sigma)$ мы используем выражения для структурных функций, полученные в приближении лидирующего твиста [2], и далее, применяя процедуру, аналогичную той, которая использовалась в аналитическом подходе Ширкова–Соловцова [15], находим выражения для структурных функций, согласующиеся с условием спектральности. Продолжим рассмотрение на примере скалярных токов. В этом случае выкладки наиболее просты, при этом общность подхода к нахождению поправок, связанных с массой мишени, не теряется.

3. СКАЛЯРНЫЙ СЛУЧАЙ

Для моментов структурных функций в методе ξ -скейлинга в случае скалярных токов можно записать [9]

$$M_n(Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-2} W(x, Q^2) = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{m!} \epsilon^m A_{n+2m}, \quad (3.1)$$

где A_k являются моментами партонного распределения,

$$A_k = \int_0^1 dx x^{k-2} F(x). \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1) и выполняя суммирование, получаем

$$M_n(Q^2) = \int_0^1 dx \frac{x^{n-2}}{(1-\epsilon x^2)^{n+1}} F(x). \quad (3.3)$$

Выполняя преобразование Меллина, из (3.3) находим

$$W(x, Q^2) = \frac{x}{\xi} \frac{F(\xi)}{1 + \epsilon \xi^2}. \quad (3.4)$$

Согласно условию спектральности структурная функция W должна обращаться в нуль при $x \rightarrow 1$. Однако правая часть (3.4) в нуль не обращается, поскольку $\xi(x) < 1$ при $x = 1$. Это противоречие, замеченное вскоре после появления работы [2], и есть так называемая “пороговая проблема”.

В нашей работе мы используем аналитические моменты $\mathcal{M}_n(Q^2)$, при этом условие спектральности для структурных функций выполняется автоматически и проблемы при $x \rightarrow 1$ не возникает. Воспользуемся связью (2.9) аналитических моментов и x -моментов, тогда находим

$$\widetilde{\mathcal{M}}_n(Q^2) = \int_0^1 dx \frac{x^{n-2}}{(1 + \epsilon x^2)^{n+1}} F(x). \quad (3.5)$$

Представим это выражение в виде

$$\widetilde{\mathcal{M}}_n(Q^2) = \frac{1}{2M^2} (Q^2)^{n+1} \int_0^\infty d\sigma \frac{\Phi_n(\sigma)}{(\sigma + Q^2)^{n+1}}, \quad (3.6)$$

где

$$\Phi_n(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{M^2} \right)^{(n-3)/2} F\left(\sqrt{\frac{\sigma}{M^2}} \right). \quad (3.7)$$

Мнимая часть $\widetilde{\mathcal{M}}_n(Q^2)$ на разрезе может быть записана следующим образом²⁾:

$$\text{Im } \widetilde{\mathcal{M}}_n(-q^2 - i0) = \pi \frac{(-q^2)^{n+1}}{n!} \Phi_n^{(n)}(q^2). \quad (3.8)$$

Из (2.6) следует, что мнимая часть аналитических моментов представляется в виде

$$\text{Im } \mathcal{M}_n(-q^2 - i0) = \frac{\pi}{2M^2} \frac{(-q^2)^{n-1}}{(n-1)!} m_n^{(n-1)}(q^2). \quad (3.9)$$

Приравнявая мнимые части выражений (3.8) и (3.9), получаем дифференциальное уравнение, решая которое, находим весовую функцию $m_n(\sigma)$:

$$m_n(\sigma) = m_n(\infty) + \frac{1}{2M^2} \left[\frac{\sigma^2}{n} \Phi_n'(\sigma) - 2\sigma \frac{n-1}{n} \Phi_n(\sigma) - (n-1) \int_\sigma^\infty ds \Phi_n(s) \right]. \quad (3.10)$$

Здесь $m_n(\infty)$ определяется формулой $\mathcal{M}_n(\infty) = m_n(\infty)/(n-1)$. Подставляя (3.7) в (3.10), получаем

$$\begin{aligned} m_n(\sigma) - m_n(\infty) = & \frac{1}{2M^2} \frac{\sigma^2}{n} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\left(\frac{\sigma}{M^2} \right)^{(n-3)/2} F\left(\sqrt{\frac{\sigma}{M^2}} \right) \right] - \\ & - \frac{\sigma}{M^2} \frac{n-1}{n} \left(\frac{\sigma}{M^2} \right)^{(n-3)/2} F\left(\sqrt{\frac{\sigma}{M^2}} \right) - \\ & - \frac{n-1}{2M^2} \int_\sigma^\infty ds \left(\frac{s}{M^2} \right)^{(n-3)/2} F\left(\sqrt{\frac{s}{M^2}} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

²⁾Верхний индекс в скобках означает порядок производной.

При нахождении функции $H(\beta, \sigma)$, через которую согласно (2.10) выражается структурная функция $W(x, Q^2)$, удобно представить $H(\beta, \sigma)$ в виде $H(\beta, \sigma) = H_0(\beta) + h(\beta, \sigma)$, где H_0 непосредственно связана с партонным распределением в соответствии с (2.15). Используя (2.13), для $\tilde{h}(\beta, \sigma) = h(\beta, \sigma - 2M^2(1 - \sqrt{1 - \beta^2}))$ получаем

$$\tilde{h}(\beta, \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dn \beta^{-n} [m_n(\sigma) - m_n(\infty)]. \quad (3.12)$$

Далее, представим структурную функцию $W(x, Q^2)$ в виде

$$W(x, Q^2) = W_0(x, Q^2) + w(x, Q^2). \quad (3.13)$$

Из ЙЛД-представления (2.10) для функции $W_0(x, Q^2)$ следует, что

$$W_0(x, Q^2) = \int_0^1 d\beta \theta[f(\beta; x, \epsilon)] H_0(\beta), \quad (3.14)$$

где

$$f(\beta; x, \epsilon) = \frac{\beta}{s} \sqrt{1 + 4\epsilon} - 1 - 2\epsilon(1 - \sqrt{1 - \beta^2}). \quad (3.15)$$

Найдем корни уравнения $f(\beta; x, \epsilon) = 0$. Если $x > \tilde{x} \equiv 1/\sqrt{1 + 4\epsilon^2}$, то мы имеем два корня

$$\beta_{\pm} = \frac{x \sqrt{1 + 4\epsilon x^2}}{1 + 4\epsilon x^2 + 4\epsilon^2 x^2} \left(1 + 2\epsilon \pm 2\epsilon \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + 4\epsilon x^2}} \right); \quad (3.16)$$

если $x < \tilde{x}$, то имеется один корень β_- .

Подставляя $H_0(\beta) = -dF(\beta)/d\beta$ в (3.14), получаем

$$W_0(x, Q^2) = \begin{cases} F(\beta_-) - F(1), & 0 \leq x < \tilde{x}, \\ F(\beta_-) - F(\beta_+), & \tilde{x} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.17)$$

Спектральное свойство функции $W_0(x, Q^2)$ (стремление к нулю при $x \rightarrow 1$) и непрерывность этой функции при $x = \tilde{x}$ вытекают из того, что $\beta_-(x) = \beta_+(x)$ при $x = 1$ и $\beta_+(\tilde{x}) = 1$.

Для функции $w(x, Q^2)$, используя выражение (3.12), получаем

$$w(x, Q^2) = \int_0^1 d\beta \theta[f(\beta; x, \epsilon)] \theta[g(\beta; x, \epsilon)] \phi(\beta; x, \epsilon), \quad (3.18)$$

где $f(\beta; x, \epsilon)$ определена в (3.15),

$$g(\beta; x, \epsilon) = \tau - \beta^2, \quad (3.19)$$

$$\phi(\beta; x, \epsilon) = \frac{1}{4\sqrt{\tau}} \theta(\tau) \theta(1 - \tau) \frac{\partial}{\partial(\sqrt{\tau})} [\sqrt{\tau} F(\sqrt{\tau})], \quad (3.20)$$

$$\tau \equiv \tau(\beta; x, \epsilon) = \frac{(\beta/s) \sqrt{1 + 4\epsilon} - 1}{\epsilon}. \quad (3.21)$$

Уравнение $\tau(\beta; x, \epsilon) = 1$ имеет корень $\beta_\tau = (1 + \epsilon)s/\sqrt{1 + 4\epsilon}$. Уравнение $g(\beta; x, \epsilon) = 0$ имеет два корня $\xi_\pm = (\sqrt{1 + 4\epsilon x^2} \pm 1)/2\epsilon x$, при этом корень ξ_- оказался равным переменной Нахтмана (2.4).

Отметим, что из формул (3.19)–(3.21) следует, что при $\epsilon \leq 1/2$ интегрирование в (3.18) осуществляется от β_- до β_τ для $x \in (0, \sqrt{y}]$, где

$$\bar{y} = \frac{3}{4(1 - \epsilon + \epsilon^2)}. \quad (3.22)$$

При $x > \sqrt{y}$ функция $w(x, Q^2)$ в (3.18) тождественно равна нулю.

При $\epsilon > 1/2$ интегрирование в (3.18) для $x \in (0, \sqrt{y}]$ осуществляется в тех же пределах, что и для $\epsilon \leq 1/2$. Для $x \in [\sqrt{y}, 1)$ функция $w(x, Q^2)$ не равна нулю и интегрирование в (3.18) осуществляется от β_- до β_+ .

Таким образом, искомое выражение для структурной функции W имеет вид суммы (3.13), в которой первое слагаемое определяется выражением (3.17), а добавка – выражением (3.18). Для проведения вычислений необходимо задать вид партонного распределения. В наших расчетах мы используем модельную функцию

$$F(x) = \sqrt{x}(1 - x)^3, \quad (3.23)$$

которая применяется при обработке экспериментальных данных (см., например, работу [31]).

На рис. 1 показано поведение структурной функции $W(x, Q^2)$ как функции x при $\epsilon = 1/2$. Сплошная линия соответствует структурной функции, полученной изложенным выше методом; штриховой линией обозначен результат метода ξ -скейлинга, полученный с использованием выражения (3.4); кривая, соответствующая партонному распределению (3.23), обозначена пунктиром.

Рис. 1. Поведение функции $W(x, \epsilon)$ в случае скалярных токов при $\epsilon = 1/2$. Сплошная линия – результат расчетов с использованием аналитических формул, штриховая линия – результат расчетов по методу ξ -скейлинга [2], пунктир – партонное распределение.

4. СТРУКТУРНЫЕ ФУНКЦИИ НУКЛОНА

Сечение неупругого лептон-адронного рассеяния в случае неполяризованного нуклона определяется адронным тензором $W_{\mu\nu}$, который параметризуется структурными функциями нуклона $F_i(x, Q^2)$ следующим образом:

$$W_{\mu\nu}(q, P) = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) F_1(x, Q^2) + \frac{1}{(q \cdot P)} \left(P_\mu - q_\mu \frac{(q \cdot P)}{q^2} \right) \times \\ \times \left(P_\nu - q_\nu \frac{(q \cdot P)}{q^2} \right) F_2(x, Q^2) - \frac{i}{2(q \cdot P)} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha q^\beta F_3(x, Q^2). \quad (4.1)$$

Начнем рассмотрение с функции $F_3(x, Q^2)$, для которой учет поправок, связанных с массой мишени, менее громоздок. Для x -моментов физической структурной функции $xF_3(x, Q^2)$ в приближении лидирующего твиста в случае безмассовых кварков была получена формула [2]

$$M_n(Q^2) = n \int_0^1 dy \frac{F(y)}{y^2} \int_0^y dz \frac{z^{n-1}}{(1 - \epsilon z^2)^{n+1}}. \quad (4.2)$$

Выполняя преобразование Меллина, из этого соотношения получаем известное выражение

$$xF_3(x, Q^2) = \frac{x^2 F(\xi)}{\xi^2(1 + 4\epsilon x^2)} + \frac{2x^3 \epsilon}{(1 + 4\epsilon x^2)^{3/2}} \tilde{F}(\xi), \quad (4.3)$$

где

$$\tilde{F}(\xi) = \int_\xi^1 dy \frac{F(y)}{y^2}. \quad (4.4)$$

Как и в рассмотренном выше случае скалярных токов, воспользуемся связью (2.9) между аналитическими и x -моментами. Тогда

$$\widetilde{\mathcal{M}}_n(Q^2) = \int_0^1 dz [n(1 - \epsilon z^2)^2 - 4\epsilon z^2] \frac{z^{n-1} \tilde{F}(z)}{(1 + \epsilon z^2)^{n+1}}, \quad (4.5)$$

далее, используя (2.6) и (4.5), находим

$$m_n(\sigma) = m_n(\infty) + \frac{1}{2M^2 n(n+2)} \left[4\sigma^4 \Phi_n^{(3)}(\sigma) + \right. \\ + 12(2 - n)\sigma^3 \Phi_n^{(2)}(\sigma) + (13n^2 - 34n + 24)\sigma^2 \Phi_n^{(1)}(\sigma) - \\ \left. - 2n(n-1)(3n-2)\sigma \Phi_n(\sigma) - n^2(n+2)(n-1) \int_\sigma^\infty ds \Phi_n(s) \right]. \quad (4.6)$$

Здесь $\Phi_n(\sigma)$ записывается через функцию (4.4) следующим образом:

$$\Phi_n(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{M^2} \right)^{(n-2)/2} \tilde{F}\left(\sqrt{\frac{\sigma}{M^2}} \right). \quad (4.7)$$

Представим функцию $xF_3(x, Q^2)$ в виде

$$xF_3(x, Q^2) \equiv W_3(x, Q^2) = W_3^{(0)}(x, Q^2) + w_3(x, Q^2),$$

где $W_3^{(0)}(x, Q^2)$ выражается через партонное распределение согласно (3.17), а функция $w_3(x, Q^2)$ записывается в виде

$$w_3(x, Q^2) = \int_0^1 d\beta \theta[f(\beta; x, \epsilon)] \theta(z) \theta(1-z) \Phi(\beta; x, \epsilon). \quad (4.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi(\beta; x, \epsilon) = \frac{1}{8} \left[\left(-1 + \frac{\beta^2}{z^2} \right) z^3 \left(\frac{F(z)}{z^2} \right)^{(2)} + \right. \\ \left. + 3 \left(-1 + 3 \frac{\beta^2}{z^2} \right) z^2 \left(\frac{F(z)}{z^2} \right)^{(1)} + 3 \left(1 + 5 \frac{\beta^2}{z} \right) z \left(\frac{F(z)}{z^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

а β и z связаны соотношением

$$\beta = \eta(1 + \epsilon z^2), \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{1 + 4\epsilon x^2}}. \quad (4.10)$$

Окончательное выражение для $w_3(x, Q^2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} w_3(x, Q^2) = 2\epsilon\eta^3 \int_{z_-}^1 dz \frac{F(z)}{z^2} - \frac{\epsilon\eta}{4} \left[(\eta^2 \epsilon^2 z_-^4 + (-1 + 2\eta^2 \epsilon) z_-^2 + \eta^2) F^{(1)}(z_-) + \right. \\ \left. + (\eta^2 \epsilon^2 z_-^4 + 3(1 + 2\eta^2 \epsilon) z_-^2 + 5\eta^2) \frac{F(z_-)}{z_-} \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$z_- \equiv z(\beta_-) = \sqrt{\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\beta_-}{\eta} - 1 \right)}, \quad (4.12)$$

а β_- определено в (3.16). Отметим, что, как и в скалярном случае, функция $w_3(x, Q^2)$ вносит вклад при $x \in (0, \sqrt{\bar{y}})$, где $\bar{y}$ задано формулой (3.22).

Результаты расчета представлены на рис. 2, где показано поведение структурной функции $x F_3(x, Q^2)$ как функции x при $Q^2 = 2 \text{ ГэВ}^2$. На рисунке сплошная линия соответствует результату наших расчетов, выполненных с использованием формул (3.17) и (4.8). Штрихпунктирная линия показывает отдельно вклад функции $w_3(x, Q^2)$. Штриховая линия соответствует методу ξ -скейлинга [2]. Как видно из рис. 2, и сплошная кривая, и штриховая вплоть до значений $x \simeq 0.5$ близки к кривой, обозначенной пунктиром, т.е. массовые поправки, рассчитанные на основе обоих методов, незначительны. При $x > 0.5$ массовые эффекты становятся существенными, однако результаты наших расчетов вплоть до $x \simeq 0.9$ практически совпадают с результатом метода ξ -скейлинга. При x , близких к единице, поведение кривых существенно различается.

При расчете структурной функции F_2 мы исходим из выражения метода ξ -скейлинга, которое в данном случае имеет вид [9]

$$\begin{aligned} F_2(x, Q^2) = \frac{x^2}{\xi^2 (1 + 4x^2 \epsilon)^{3/2}} F(\xi) + \frac{6\epsilon x^3}{(1 + 4x^2 \epsilon)^2} \int_{\xi}^1 d\xi' \frac{F(\xi')}{\xi'^2} + \\ + \frac{12\epsilon^2 x^4}{(1 + 4x^2 \epsilon)^{5/2}} \int_{\xi}^1 d\xi' \int_{\xi'}^1 d\xi'' \frac{F(\xi'')}{\xi''^2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Рис. 2. Поведение структурной функции $xF_3(x, Q^2)$ при $Q^2 = 2 \text{ ГэВ}^2$. Сплошная линия – результат расчетов с использованием аналитических формул (3.17) и (4.8), штриховая линия – результат расчетов по методу ξ -скейлинга [2], штрихпунктир – вклад функции $w_3(x, Q^2)$, пунктир – партонное распределение.

Соответствующие x -моменты записываются следующим образом:

$$M_n(Q^2) = n(n-1) \int_0^1 dz \frac{z^{n-2}G(z)}{(1-\epsilon z^2)^{n+1}}, \quad (4.14)$$

где

$$G(z) = \int_z^1 dy \int_y^1 du \frac{F(u)}{u^2}. \quad (4.15)$$

Воспользуемся связью (2.9) между аналитическими и x -моментами. Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_n(Q^2) &= \int_0^1 dz \frac{z^{n-2}G(z)}{(1+\epsilon z^2)^{n+5}} \times \\ &\times [n(n-1)((1-\epsilon z^2)^4 - 4(5n+1)\epsilon z^2(1-\epsilon z^2)^2 + 32\epsilon^2 z^4)]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Повторяя выкладки, аналогичные скалярному случаю, находим весовую функцию $m_n(\sigma)$:

$$\begin{aligned} 2M^2[m_n(\sigma) - m_n(\infty)] &= n(n-1)^2 \int_\sigma^\infty ds \Phi_n(s) + \frac{1}{n(n+2)(n+4)} \times \\ &\times [-2n(n-1)(5n^3 - n^2 - 10n + 8)\sigma\Phi_n(\sigma) + (n-1) \times \\ &\times (41n^3 - 142n^2 + 192n - 96)\sigma^2\Phi_n^{(1)}(\sigma) - 4(n-2) \times \\ &\times (22n^2 - 85n + 108)\sigma^3\Phi_n^{(2)}(\sigma) + 4(26n^2 - 143n + 212)\sigma^4\Phi_n^{(3)}(\sigma) - \\ &- 32(2n-7)\sigma^5\Phi_n^{(4)}(\sigma) + 16\sigma^6\Phi_n^{(5)}(\sigma)]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Здесь $\Phi_n(\sigma)$ записывается через функцию (4.15) следующим образом:

$$\Phi_n(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{M^2}\right)^{(n-3)/2} G\left(\sqrt{\frac{\sigma}{M^2}}\right). \quad (4.18)$$

Представим функцию $F_2(x, Q^2)$ в виде суммы, где первое слагаемое выражается через партонное распределение согласно (3.17). Используя формулу (3.12) с весовой функцией из (4.17), находим

$$w_2(x, Q^2) = \frac{\epsilon\eta}{16} \left[3 \int_{z_-}^1 dz \phi_1(z) \int_z^1 dy y F(y) + \int_{z_-}^1 dz \phi_2(z) F(z) \right] + \frac{\epsilon\eta}{16} [\phi_3(z)F(z) + \phi_4(z)F'(z) + \phi_5(z)F''(z)] \Big|_{z_-}^1. \quad (4.19)$$

Здесь функции ϕ_k имеют вид

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= 1 - 6 \left(\frac{\beta}{z} \right)^2 + 15 \left(\frac{\beta}{z} \right)^4, \\ \phi_2(z) &= \frac{3}{z^2} [-3\eta^4 \epsilon^4 z^8 + 2\eta^2 \epsilon^2 (1 - 10\eta^2 \epsilon) z^6 + \\ &\quad + (1 + 12\eta^2 \epsilon - 90\eta^4 \epsilon^2) z^4 + 2\eta^2 (13 - 34\eta^2 \epsilon) z^2 + 5\eta^4], \\ \phi_3(z) &= \frac{1}{z} [-3\eta^4 \epsilon^4 z^8 + 6\eta^2 \epsilon^2 (3 - 2\eta^2 \epsilon) z^6 + \\ &\quad + (1 + 30\eta^4 \epsilon^2 + 52\eta^2 \epsilon) z^4 - 6\eta^2 (1 - 14\eta^2 \epsilon) z^2 + 45\eta^4], \\ \phi_4(z) &= 6\eta^4 \epsilon^4 z^8 - 4\eta^2 \epsilon^2 (1 - 8\eta^2 \epsilon) z^6 - \\ &\quad - 2(1 + 8\eta^2 \epsilon - 30\eta^4 \epsilon^2) z^4 - 12\eta^2 (1 - 4\eta^2 \epsilon) z^2 + 14\eta^4, \\ \phi_5(z) &= z^5 \left[1 - \left(\frac{\beta}{z} \right)^2 \right]^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Недавно в работе [11] был предложен новый способ учета массовых поправок к структурным функциям, при котором вместо обычных моментов партонного распределения A_n вводятся новые моменты

$$A_n^{(\text{SM})} \equiv \int_0^{\xi_0} d\xi \xi^n F(\xi, \xi_0), \quad (4.21)$$

где $\xi_0 \equiv \xi(1) = 2/(1 + \sqrt{1 + 4\epsilon}) < 1$, $F(\xi, \xi_0)$ зависит от двух переменных ξ и ξ_0 . Функция партонного распределения выбирается в виде $F(\xi, \xi_0) = \xi_0^{-a-b-1} \xi^a (\xi_0 - \xi)^b$, при этом $F(\xi, \xi_0) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \xi_0$. В результате структурные функции действительно стремятся к нулю при $x \rightarrow 1$, и пороговая проблема устраняется. Однако при этом моменты $A_n^{(\text{SM})}$ становятся зависящими от Q^2 , что противоречит операторному разложению и делает проблематичной партонную интерпретацию. Ниже мы приведем сравнение наших результатов с результатами, полученными для структурной функции F_2 в работе [11].

На рис. 3 показано поведение структурной функции $F_2(x, Q^2)$ как функции x при $Q^2 = 2 \text{ ГэВ}^2$. Как и на предыдущих рисунках, сплошная линия соответствует структурной функции, полученной нами с использованием формул (3.17) и (4.19); штриховая линия – методу ξ -скейлинга, штрихпунктир – результату, полученному в работе [11] с использованием моментов (4.21), пунктир – партонному распределению. Как видно из рис. 3, при $Q^2 = 2 \text{ ГэВ}^2$ и $x > 0.2$ имеется значительное различие

в результатах, полученных различными методами. Структурная функция, полученная нами, и функция, полученная в работе [11], в пределе $x \rightarrow 1$ стремятся к нулю. Однако функция, отвечающая результатам работы [11], стремится к нулю гораздо быстрее, чем функция, полученная нами с использованием аналитических моментов. Наши расчеты оказываются более близкими к результату метода ξ -скейлинга, за исключением области значений x , близких к единице. При $Q^2 \sim 10 \text{ ГэВ}^2$ и выше массовые поправки становятся незначительными.

Рис. 3. Поведение структурной функции $F_2(x, Q^2)$ при $Q^2 = 2 \text{ ГэВ}^2$. Сплошная линия – результат расчетов с использованием аналитических формул (3.17) и (4.19), штриховая линия – результат расчета по методу ξ -скейлинга [2], штрихпунктир – результат работы [11], пунктир – партонное распределение.

При расчете структурной функции $F_1(x, Q^2)$ мы воспользовались следующей связью между структурными функциями [2]:

$$6xF_1(x, Q^2) = (1 + 4x^2\epsilon)F_2(x, Q^2) + \frac{2x^2F(\xi)}{\xi^2\sqrt{1 + 4\epsilon x^2}}. \quad (4.22)$$

Отметим, что из этого выражения в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ следует известное соотношение Каллана–Гросса $2xF_1(x) = F_2(x)$ [32]. Кроме того, второе слагаемое в правой части равенства (4.22) равно удвоенному выражению для структурной функции в скалярном случае (см. формулу (3.4)), что упрощает расчет. Используя выражение (4.13) и повторяя выкладки, аналогичные рассмотренным выше, мы получили выражение для структурной функции $xF_1(x, Q^2)$.

Результаты расчета структурной функции $xF_1(x, Q^2)$ показаны на рис. 4, 5 (обозначения те же, что и на рис. 3). Из рис. 4 видно, что, как и для структурной функции $F_2(x, Q^2)$, массовые поправки существенны при $x > 0.2$, но отличие их не столь велико, за исключением области больших значений x ($x > 0.8$), где, однако, значения функций становятся малыми. Для того чтобы продемонстрировать отличие в этой области, на рис. 5 приведена структурная функция $xF_1(x, Q^2)$ при $Q^2 = 5 \text{ ГэВ}^2$ в области больших значениях x .

Рис. 4. Поведение структурной функции $x F_1(x, Q^2)$ при $Q^2 = 2 \text{ ГэВ}^2$. Обозначения те же, что на рис. 3.

Рис. 5. Поведение структурной функции $x F_1(x, Q^2)$ при больших значениях x , $Q^2 = 5 \text{ ГэВ}^2$. Обозначения те же, что на рис. 3.

Таким образом, наиболее существенное отличие между структурными функциями, полученными методом ξ -скейлинга, и с использованием аналитических моментов проявляется в области больших значений x . Известно (см., например, [9], [31], [33]–[35]), что поправки, связанные с массой мишени (относящиеся к кинематическим вкладам), влияют на извлекаемую из экспериментальных данных зависимость вклада высших твистов от переменной x . Как следует из обработки экспериментальных данных (см., например, работу [33]), вклад высших твистов, который связан с динамикой процесса, в области больших значений бьеркеновской переменной x может резко возрастать, поэтому можно ожидать, что использование аналитических моментов заметно повлияет на извлекаемую из эксперимента зависимость вклада высших твистов от x .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Точность экспериментальных данных постоянно повышается, и становятся актуальными задачи об изучении таких тонких эффектов, как высшие твисты. В этих условиях целесообразно в теоретических подходах опираться на методы, согласованные с общими принципами квантовой теории поля.

В настоящей работе получены выражения для структурных функций F_1 , F_2 и F_3 массивного нуклона (см. формулы (3.17), (4.11) и (4.19)), которые удовлетворяют условию спектральности. Было показано, что эти новые выражения, учитывающие массовые поправки к структурным функциям, приводят к результатам, заметно отличающимся и от результатов стандартного метода ξ -скейлинга, и от результатов, полученных на основе предложенного в работе [11] подхода, особенно при Q^2 порядка нескольких ГэВ² и больших значениях x (см. рис. 2–5).

В дальнейшем мы планируем учесть КХД-поправки к структурным функциям с использованием аналитических моментов и провести сравнение с экспериментом.

Благодарности. Авторам приятно выразить благодарность Д. В. Ширкову за постоянную поддержку исследований и полезные замечания, а также А. П. Бакулеву, С. В. Михайлову, А. В. Сидорову и О. В. Теряеву за интерес к работе и обсуждение полученных результатов. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00686), Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5362.2006.2) и БелРФФИ-ОИЯИ (грант Ф08Д-001).

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1984.
- [2] H. Georgi, H. D. Politzer, *Phys. Rev. D*, **14**:7 (1976), 1829–1848.
- [3] D. J. Gross, S. B. Treiman, F. A. Wilczek, *Phys. Rev. D*, **15**:9 (1977), 2486–2494.
- [4] A. De Rújula, H. Georgi, H. D. Politzer, *Phys. Rev. D*, **15**:9 (1977), 2495–2502; *Ann. Phys.*, **103**:2 (1977), 315–353.
- [5] K. Bitar, P. W. Johnson, W.-K. Tung, *Phys. Lett. B*, **83**:1 (1979), 114–118.
- [6] P. W. Johnson, Wu-Ki Tung, “Structure functions and their moments as testing ground for QCD: the Pandora’s box of mass effects”, *Neutrino 79*, Proc. Internat. Conf. on Neutrinos Weak Interactions and Cosmology. V. 2 (18–22, June 1979, Bergen, Norway), eds. A. Haatuft, C. Jarlskog, Bergen Univ., Bergen, 1979, 612–711.
- [7] L. F. Abbott, R. M. Barnett, *Ann. Phys.*, **125**:2 (1980), 276–308.
- [8] J. L. Miramontes, J. S. Guillén, *Z. Phys. C*, **41**:2 (1988), 247–257.
- [9] Ф. Индурайн, *Квантовая хромодинамика: Введение в теорию кварков и глюонов*, Мир, М., 1986.
- [10] R. G. Roberts, *The Structure of the Proton. Deep Inelastic Scattering*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [11] F. M. Steffens, W. Melnitchouk, *Phys. Rev. C*, **73**:5 (2006), 055202.
- [12] I. Schienbein, V. A. Radescu, G. P. Zeller, M. E. Christy et al., *J. Phys. G*, **35** (2008), 053101.
- [13] I. L. Solovtsov, *Письма в ЭЧАЯ*, **4**:101 (2000), 10–18.
- [14] Д. В. Ширков, И. Л. Соловцов, *Краткие сообщения ОИЯИ*, **76**:2 (1996), 5–10; [arXiv: hep-ph/9604363](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9604363).
- [15] D. V. Shirkov, I. L. Solovtsov, *Phys. Rev. Lett.*, **79**:7 (1997), 1209–1212.

- [16] И. Л. Соловцов, Д. В. Ширков, *ТМФ*, **120**:3 (1999), 482–510.
- [17] Д. В. Ширков, И. Л. Соловцов, *ТМФ*, **150**:1 (2007), 152–176.
- [18] R. Jost, H. Lehmann, *Nuovo Cimento*, **5**:6 (1957), 1598–1610.
- [19] F. J. Dyson, *Phys. Rev.*, **110**:6 (1958), 1460–1464.
- [20] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
- [21] В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожджинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций*, Наука, М., 1986.
- [22] Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров, А. Н. Тавхелидзе, *ТМФ*, **12**:1 (1972), 3–17.
- [23] Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров, А. Н. Тавхелидзе, *ТМФ*, **12**:3 (1972), 305–330.
- [24] В. Geyer, D. Robaschik, E. Wiczorek, *Fortschr. Phys.*, **27**:2–3 (1979), 75–166; Б. Гайер, Д. Робашик, Э. Вицорек, *ЭЧАЯ*, **11**:1 (1980), 132–181.
- [25] Particle Data Group, C. Amsler et al., *Phys. Lett. B*, **667**:1–5 (2008), 1–6.
- [26] S. Deser, W. Gilbert, E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev.*, **117**:1 (1960), 266–272.
- [27] A. Minuzzi, R. F. Streater, *Phys. Rev.*, **119**:3 (1960), 1127–1128.
- [28] Б. В. Гешкенбейн, А. И. Комеч, *ЯФ*, **22**:2 (1975), 416–427.
- [29] Б. В. Гешкенбейн, А. И. Комеч, *ЯФ*, **26**:2 (1977), 446–447.
- [30] O. Nachtmann, *Nucl. Phys. B*, **63** (1973), 237–247.
- [31] A. L. Kataev, G. Parente, A. V. Sidorov, *ЭЧАЯ*, **34**:1 (2003), 42–87; *Erratum*, **38**:6 (2007), 827–827.
- [32] C. G. Callan, D. J. Gross, *Phys. Rev. Lett.*, **22**:4 (1969), 156–159.
- [33] M. Virchaux, A. Milsztajn, *Phys. Lett. B*, **274**:2 (1992), 221–229.
- [34] J. Blümlein, A. Tkabladze, *Nucl. Phys. B*, **553**:1–2 (1999), 427–464.
- [35] A. V. Kotikov, *Phys. Part. Nucl.*, **38**:1 (2007), 1–40.

Поступила в редакцию 8.12.2008