Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Аникин, Квантовые нормальные формы Биркгофа, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 3, 487–506

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6411>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:58:11

© 2009 г.

А. Ю. Аникин*

КВАНТОВЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ БИРКГОФА

Рассмотрены квантовые аналоги ряда теорем о нормальных формах Биркгофа. Доказаны квантовый аналог теоремы о приведении гамильтониана к нормальной форме и аналог теоремы о приведении гамильтониана к вещественной нормальной форме. Получен явный вид нормальной формы в нерезонансном случае. Рассматриваются вопросы единственности нормальной формы и нормализующего преобразования в нерезонансном и резонансном случаях.

Ключевые слова: нормальная форма Биркгофа, квантовый аналог, алгебра наблюдаемых, автоморфизм.

1. ВВЕДЕНИЕ

В классической механике нормальные формы представляют собой мощный инструмент локального анализа динамических систем. Под нормальной формой понимают простейший вид, к которому можно привести систему дифференциальных уравнений заменой переменных в окрестности особенности (положения равновесия, периодического решения или инвариантного тора). Этой теории посвящены работы известных авторов: Пуанкаре, Дюлака, Биркгофа, Черри, Мозера, Зигеля, Брюно и многих других [1]–[4].

Нормальные формы для гамильтоновых систем впервые были построены Биркгофом и Черри [1], [2], они называются нормальными формами Биркгофа. В этих работах изучается, к какому простейшему виду можно привести гамильтониан системы в окрестности положения равновесия с помощью канонического преобразования. Теория нормальных форм Биркгофа является формальной, так как в ней гамильтониан и нормализующее преобразование представляют собой степенные ряды, о сходимости которых ничего не говорится.

Наша задача состоит в том, чтобы построить аналог нормальных форм Биркгофа для квантовых наблюдаемых. В духе работ [5], [6] мы рассматриваем квантовую механику с нетрадиционных позиций. Под квантовыми наблюдаемыми мы будем

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия. E-mail: anikin83@inbox.ru

понимать элементы некоммутативной ассоциативной алгебры формальных рядов. Также множество наблюдаемых имеет структуру алгебры Ли относительно операции коммутатора. Под каноническими преобразованиями понимаются автоморфизмы этой алгебры. Интерпретация этих алгебраических объектов как операторов в $L^2(\mathbb{R}^n)$ в настоящей работе не рассматривается.

Отметим, что идея нормальных форм в квантовой механике не нова. С помощью техники интегрального оператора Фурье [7]–[9] в работах [10], [11] строятся квантовые нормальные формы вблизи устойчивого положения равновесия, а в работах [12]–[14] – вблизи неустойчивого. Более общие результаты получены в работе [15].

При традиционном подходе для квантования классических объектов используют символьные отображения. Такие отображения определены не единственным образом и не являются гомоморфизмами алгебр классических и квантовых наблюдаемых. Наиболее распространенное отображение – символ Вейля. Используемый нами альтернативный подход выглядит более естественным для исследования нормальных форм. Кроме того, он позволяет получать не только формальные теоремы, но и в некоторых случаях доказывать сходимость. В работе [16] доказана аналитичность нормализующего преобразования для квантового аналога теоремы Мозера о нормальной форме гамильтоновой системы с полутора степенями свободы.

Из других работ по квантовым нормальным формам, использующим традиционный подход, отметим работу [17], где нормальные формы строятся с помощью метода квантового усреднения [18]. Эта работа ближе по духу к нашей, чем указанные выше. В ней строятся нормальные формы, а также исследуются алгебры Ли, порожденные нормальными формами. Эти алгебры Ли нетривиальны для резонансного случая. Некоторые простые резонансы разобраны в работе [18] достаточно подробно.

Методы и техника, используемые нами, аналогичны тем, которые используются в классической механике. Разница состоит лишь в том, что в классическом случае мы имеем дело с коммутативными объектами, а в квантовом – с некоммутативными. Из наших результатов о нормальных формах классические результаты получаются как тривиальные следствия после применения специального гомоморфизма квантовой и классической алгебр.

Сформулируем наиболее важный результат настоящей работы – теорему о приведении квантовой наблюдаемой к нормальной форме. Сначала дадим алгебраическую формулировку классического результата Биркгофа. Рассмотрим ассоциативную алгебру $\mathcal{O}_n$ над $\mathbb{C}$ коммутативных формальных степенных рядов со стандартным произведением

$$F = \sum_{\mu, \nu \in \mathbb{Z}_+^n} f_{\mu, \nu} p_1^{\mu_1} \dots p_n^{\mu_n} x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} = \sum_{\mu, \nu \in \mathbb{Z}_+^n} f_{\mu, \nu} p^\mu x^\nu, \quad f_{\mu, \nu} \in \mathbb{C},$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$. Образующие $p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$ этой коммутативной алгебры можно интерпретировать как классические координаты и импульсы механической системы в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Нижний индекс в обозначении алгебры $\mathcal{O}_n$ мы, как правило, будем опускать.

Ассоциативная алгебра $\mathbb{O}$ также имеет структуру алгебры Ли по отношению к стандартной скобке Пуассона:

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial G}{\partial p_j}.$$

Элементы алгебры $\mathbb{O}$ называются классическими наблюдаемыми.

Биективные линейные отображения $\mathcal{A}: \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$ называются автоморфизмами ассоциативной алгебры и алгебры Ли $\mathbb{O}$, если

$$\mathcal{A}(FG) = \mathcal{A}F\mathcal{A}G, \quad \mathcal{A}\{F, G\} = \{\mathcal{A}F, \mathcal{A}G\}.$$

В классической механике такие отображения называются каноническими преобразованиями.

Сформулируем теорему Биркгофа о приведении к нормальной форме.

Рассмотрим классическую наблюдаемую $H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \in \mathbb{O}$, где H_j — однородная форма степени j , причем $H_2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k p_k x_k$. Тогда существует такое отображение $\mathcal{A} \in \text{Aut } \mathbb{O}$, что $\mathcal{A}H = H_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \dots$, причем $\{\mathcal{A}H, H_2\} = 0$.

Для любых $l, \lambda \in \mathbb{Z}^n$ обозначим через $\langle l, \lambda \rangle$ стандартное скалярное произведение. Назовем моном $f_{\mu, \nu} p^\mu x^\nu$ резонансным, если $\langle k, \mu - \nu \rangle = 0$ для всех ненулевых $k \in \mathbb{Z}^n$. Несложно увидеть, что соотношение $\{\mathcal{A}H, H_2\} = 0$ эквивалентно тому, что в разложении нормальной формы $\mathcal{A}H$ имеются лишь резонансные мономы.

Сформулируем аналогичную квантовую теорему. Сначала построим свободную некоммутативную ассоциативную алгебру формальных рядов с образующими $\hat{p}_j, \hat{x}_j$ и произведением $\circ$. Определим мономы следующим образом:

$$\hat{z} = \hat{z}_1 \circ \dots \circ \hat{z}_k, \quad \hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k \in \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n\}. \quad (1)$$

Число k называется степенью монома, $\deg \hat{z} = k$. Подчеркнем, что мономы равны, если они построены из одних и тех же элементов, взятых в одинаковом порядке.

Рассмотрим следующее линейное пространство над $\mathbb{C}$ некоммутативных формальных рядов:

$$\widehat{\mathbb{O}}_n = \left\{ \widehat{F} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\deg \hat{z}=k} f_{\hat{z}} \hat{z}, \quad f_{\hat{z}} \in \mathbb{C} \right\}, \quad (2)$$

где суммирование проводится по всем мономам $\hat{z}$.

В $\widehat{\mathbb{O}}_n$ определено ассоциативное произведение $\circ$. Таким образом, $(\widehat{\mathbb{O}}_n, +, \circ)$ является свободной ассоциативной алгеброй. Нижний индекс в обозначении $\widehat{\mathbb{O}}_n$ мы в дальнейшем также будем, как правило, опускать.

Положим $\mathbf{r}_j := \hat{p}_j \circ \hat{x}_j - \hat{x}_j \circ \hat{p}_j$ и рассмотрим алгебру $\widehat{\mathbb{H}}$, порожденную следующими тождествами:

$$\hat{p}_j \circ \hat{p}_s - \hat{p}_s \circ \hat{p}_j = 0, \quad \hat{x}_j \circ \hat{x}_s - \hat{x}_s \circ \hat{x}_j = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_s = 0, \quad \mathbf{r}_j \circ \hat{p}_s - \hat{p}_s \circ \mathbf{r}_j = 0, \quad \mathbf{r}_j \circ \hat{x}_s - \hat{x}_s \circ \mathbf{r}_j = 0 \quad (4)$$

для всех $s, j = 1, \dots, n$, а также элементами

$$\hat{p}_j \circ \hat{x}_s - \hat{x}_s \circ \hat{p}_j = 0, \quad s, j = 1, \dots, n, \quad s \neq j. \quad (5)$$

А именно, мы рассматриваем фактор-алгебру $\hat{\mathbb{H}} = \hat{\mathbb{O}}/\hat{J}$, где $\hat{J}$ есть идеал, порожденный левыми частями тождеств (3)–(5). Обозначим через $\pi: \hat{\mathbb{O}} \rightarrow \hat{\mathbb{H}}$ гомоморфизм проекции. Введем обозначение $\mathbf{r} = \pi \mathbf{r}_j$.

Ассоциативная алгебра $\hat{\mathbb{H}}$ называется алгеброй квантовых наблюдаемых. В стандартном представлении образующие $\hat{x}_j$ и $\hat{p}_j$ отождествляются со следующими операторами в $L_2(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{x}_j f(x) = x_j f(x), \quad \hat{p}_j f(x) = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Элемент $\mathbf{r}$ отвечает константе $-i\hbar$ (точнее, оператору $-i\hbar \text{id}$).

Коммутатор вводит структуру алгебры Ли на $\hat{\mathbb{H}}$. Точное определение коммутатора мы дадим ниже, неформально он определяется следующим образом:

$$[\hat{F}, \hat{G}] = \frac{\hat{F} \circ \hat{G} - \hat{G} \circ \hat{F}}{\mathbf{r}}, \quad \hat{F}, \hat{G} \in \hat{\mathbb{H}}.$$

Биективные линейные отображения $\hat{\mathcal{A}}: \hat{\mathbb{H}} \rightarrow \hat{\mathbb{H}}$, сохраняющие операции $\circ$ и $[\cdot, \cdot]$, назовем автоморфизмами ассоциативной алгебры и алгебры Ли $\hat{\mathbb{H}}$. Группа таких автоморфизмов обозначается $\text{Aut } \hat{\mathbb{H}}$.

Существует гомоморфизм $\text{aver}: \hat{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{O}$ ассоциативных алгебр и алгебр Ли

$$\text{aver}(\hat{F} \circ \hat{G}) = \text{aver } \hat{F} \circ \text{aver } \hat{G}, \quad \text{aver}[\hat{F}, \hat{G}] = [\text{aver } \hat{F}, \text{aver } \hat{G}],$$

называемый усреднением. Он получается отождествлением $\mathbf{r} = 0$. Благодаря действию этого гомоморфизма все классические результаты являются тривиальными следствиями своих квантовых аналогов.

Сформулируем один из наших основных результатов – квантовый аналог теоремы Биркгофа.

Рассмотрим квантовую наблюдаемую $\hat{H} = \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4 + \dots \in \hat{\mathbb{H}}$, где $\hat{H}_j$ – однородные формы степени j , причем $\hat{H}_2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k \hat{p}_k \circ \hat{x}_k$. Тогда существует такое отображение $\hat{\mathcal{A}} \in \text{Aut } \hat{\mathbb{H}}$, что $\hat{\mathcal{A}}\hat{H} = \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4 + \dots$, причем $[\hat{\mathcal{A}}\hat{H}, \hat{H}_2] = 0$.

Настоящая работа построена следующим образом. В разделе 2 вводятся основные понятия и конструкции из работы [5]. Почти все теоремы в этом разделе даны без доказательства. Доказательство вспомогательного результата дано в приложении.

В разделе 3 доказана основная теорема о приведении квантовой наблюдаемой к нормальной форме. В п. 3.1 квадратичная квантовая наблюдаемая приводится к нормальной форме линейной заменой. В п. 3.2 доказана основная теорема, сформулированная выше. В разделе 4 установлено несколько важных следствий и уточнений этой теоремы. В п. 4.1 построен явный вид нормальной формы в случае нерезонансных частот, в п. 4.2 – эрмитова нормальная форма для эрмитовой наблюдаемой. В п. 4.3 рассматриваются вопросы единственности нормальной формы и нормализующего преобразования.

2. НЕКОММУТАТИВНЫЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ

2.1. Алгебра $\hat{\mathbb{H}}$. Введем некоторые важные понятия и обозначения. Пусть $\hat{z}$ есть моном (1). Число k называется степенью монома. Будем говорить, что моном $\hat{z}$ имеет тип $(\mu, \nu) \in \mathbb{Z}_+^{2n}$, записывая это следующим образом:

$$\text{type } \hat{z} = (\mu, \nu), \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n), \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n),$$

если он содержит в точности μ_j раз множитель $\hat{p}_j$ и ν_j раз множитель $\hat{x}_j$ для всех $j = 1, \dots, n$.

Пусть $\hat{\mathbb{O}}$, как и ранее, алгебра (2). Рассмотрим следующие конечномерные подпространства однородных форм в $\hat{\mathbb{O}}$:

$$\tilde{\mathbb{F}}_k = \left\{ \hat{F} = \sum_{\deg \hat{z} = k} f_{\hat{z}} \hat{z} \right\} \subset \hat{\mathbb{O}}, \quad \tilde{\mathbb{F}}^{\mu, \nu} = \left\{ \hat{F} = \sum_{\text{type } \hat{z} = (\mu, \nu)} g_{\hat{z}} \hat{z} \right\} \subset \hat{\mathbb{O}}.$$

Положим, как и ранее, $\mathbf{r}_j := \hat{p}_j \circ \hat{x}_j - \hat{x}_j \circ \hat{p}_j$ и рассмотрим идеал $\hat{J} \subset \hat{\mathbb{O}}$, порожденный левыми частями тождеств (3)–(5).

Рассмотрим фактор-алгебру $\hat{\mathbb{H}}$:

$$\hat{\mathbb{H}} = \hat{\mathbb{O}} / \hat{J}, \quad \pi: \hat{\mathbb{O}} \mapsto \hat{\mathbb{H}}, \quad \mathbf{r} = \pi(\mathbf{r}_1) = \dots = \pi(\mathbf{r}_n),$$

где π – естественный гомоморфизм проекции. Для упрощения записи будем обозначать элементы $\pi \hat{p}_j$ и $\pi \hat{x}_j$ в алгебре $\hat{\mathbb{H}}$ через $\hat{p}_j$ и $\hat{x}_j$ соответственно.

Обозначим линейные пространства однородных форм в алгебре $\hat{\mathbb{H}}$ следующим образом:

$$\mathbb{F}_k = \pi \tilde{\mathbb{F}}_k, \quad \mathbb{F}^{\mu, \nu} = \pi \tilde{\mathbb{F}}^{\mu, \nu}.$$

Из тождеств, порождающих $\hat{\mathbb{H}}$, ясно, что $\mathbb{F}_k \cap \mathbb{F}_l = \{0\}$ для всех $k \neq l$. Для пространств $\mathbb{F}^{\mu, \nu}$ аналогичное утверждение не выполнено. Вообще говоря, неверно, что $\mathbb{F}^{\mu, \nu} \cap \mathbb{F}^{\mu', \nu'} = \{0\}$ для разных векторов $(\mu, \nu) \in \mathbb{Z}_+^{2n}$ и $(\mu', \nu') \in \mathbb{Z}_+^{2n}$. Пусть, например, $n = 2$. Положим

$$\mu = \nu = (1, 0), \quad \mu' = \nu' = (0, 1).$$

Тогда $\mathbf{r} \in \mathbb{F}^{\mu, \nu} \cap \mathbb{F}^{\mu', \nu'}$. Более подробно свойства пространств $\mathbb{F}^{\mu, \nu}$ исследованы ниже в п. 3.3.

Если $\hat{F} \in \bigoplus_{j=k}^{\infty} \mathbb{F}_j$, мы используем следующее обозначение: $\hat{F} = O_k(\hat{p}, \hat{x})$.

Далее, пусть $\hat{J}_0$ есть идеал в алгебре $\hat{\mathbb{H}}$, порожденный $\mathbf{r}$. Тогда фактор-алгебру $\hat{\mathbb{H}} / \hat{J}_0$ можно отождествить с коммутативной алгеброй классических формальных рядов Тейлора с комплексными коэффициентами. Назовем ее алгеброй классических наблюдаемых и обозначим через $\mathbb{O}$. Естественный гомоморфизм проекции обозначим $\text{aver}: \hat{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{O}$ и назовем усреднением. Этот гомоморфизм отображает некоторые квантовые наблюдаемые в одну классическую. Например,

$$\text{aver}(\hat{p} \circ \hat{x}^2) = \text{aver}(\hat{x} \circ \hat{p} \circ \hat{x}) = \text{aver}(\hat{x}^2 \circ \hat{p}) = px^2.$$

Образующие в алгебре $\mathbb{O}$ обозначаются как $p_j = \text{aver } \hat{p}_j$, $x_j = \text{aver } \hat{x}_j$.

В ассоциативной алгебре $\hat{\mathbb{H}}$ можно ввести еще одну операцию $\hat{F}, \hat{G} \mapsto [\hat{F}, \hat{G}]$, называемую коммутатором.

Для наблюдаемых $\hat{F}, \hat{G} \in \hat{\mathbb{H}}$ положим $\hat{H} = \hat{F} \circ \hat{G} - \hat{G} \circ \hat{F}$. Тогда $\text{aver } \hat{H} = 0$, и, следовательно, $\hat{H} \in \hat{J}_0$. Таким образом, $\hat{H} = \mathbf{r} \circ \hat{H}_0$, где наблюдаемая $\hat{H}_0$ определена единственным образом, поскольку в алгебре $\hat{\mathbb{H}}$ отсутствуют нетривиальные делители нуля. Определим операцию $\hat{F}, \hat{G} \mapsto [\hat{F}, \hat{G}] = \hat{H}_0$, называемую коммутатором. Неформально он определяется следующим образом:

$$[\hat{F}, \hat{G}] = \frac{\hat{F} \circ \hat{G} - \hat{G} \circ \hat{F}}{\mathbf{r}}.$$

В дальнейшем часто используем стандартное обозначение

$$\text{ad}_{\hat{F}} \hat{G} = [\hat{F}, \hat{G}],$$

где ad называется коприсоединенным представлением.

Легко увидеть, что коммутатор удовлетворяет тождествам Лейбница и Якоби (см. [5]):

$$[\hat{F} \circ \hat{G}, \hat{H}] = \hat{F} \circ [\hat{G}, \hat{H}] + [\hat{F}, \hat{H}] \circ \hat{G}, \quad [[\hat{F}, \hat{G}], \hat{H}] + [[\hat{G}, \hat{H}], \hat{F}] + [[\hat{H}, \hat{F}], \hat{G}] = 0.$$

Введенная нами операция $[\cdot, \cdot]$ задает на $\hat{\mathbb{H}}$ структуру алгебры Ли. Также можно рассматривать $\mathbb{O}$ как алгебру Ли относительно стандартной скобки Пуассона:

$$F, G \mapsto \{F, G\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial G}{\partial p_j}.$$

Оказывается, усреднение aver является гомоморфизмом алгебр Ли $\hat{\mathbb{H}}_n$ и $\mathbb{O}_n$ [5].

2.2. $\mathbf{r}$ -Разложение и базис $\mathbf{E}_s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Всякая наблюдаемая $\hat{F} \in \hat{\mathbb{H}}$ представляется единственным образом в виде следующего разложения:*

$$\hat{F} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_+, \\ (\mu, \nu) \in \mathbb{Z}_+^{2n}}} C_{\mu, \nu, k} \mathbf{r}^k \circ \hat{p}_1^{\mu_1} \circ \dots \circ \hat{p}_n^{\mu_n} \circ \hat{x}_1^{\nu_1} \circ \dots \circ \hat{x}_n^{\nu_n} = \sum_{k, \mu, \nu} \mathbf{r}^k \circ \hat{p}^\mu \circ \hat{x}^\nu.$$

Доказательство предложения 1 можно найти в работе [5].

Пусть $n = 1$. Положим $\hat{\eta} := \hat{p} \circ \hat{x}$, $\hat{\zeta} := \hat{x} \circ \hat{p}$. Рассмотрим следующее множество в $\mathbb{F}^{s, s}$:

$$\mathbf{E}_s = \{\hat{z}_1 \circ \dots \circ \hat{z}_s \mid \hat{z}_j \in \{\hat{\eta}, \hat{\zeta}\}\}.$$

Поскольку $\hat{\eta}$ и $\hat{\zeta}$ коммутируют, то не более чем $s + 1$ элементов этого множества различны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Множество $\mathbf{E}_s$ есть базис в векторном пространстве $\mathbb{F}^{s, s}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из результатов работы [5] следует, что размерность пространства $\mathbb{F}^{s, s}$ равна $s + 1$. Например, в качестве базиса можно взять элементы

$$\hat{p}^s \circ \hat{x}^s, \quad \hat{p}^{s-1} \circ \hat{x}^s \circ \hat{p}, \quad \dots, \quad \hat{p} \circ \hat{x}^s \circ \hat{p}^{s-1}, \quad \hat{x}^s \circ \hat{p}^s.$$

Тогда достаточно доказать, что любой элемент этого векторного пространства представим в виде линейной комбинации элементов $\mathbf{E}_s$. Докажем это с помощью индукции по s . Если $s = 1$, то утверждение очевидно. Пусть $\hat{F} \in \mathbb{F}^{s,s}$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\hat{F}$ – моном. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\hat{F} = \hat{p}^\alpha \circ \hat{x}^\beta \circ \hat{G}, \quad \alpha, \beta \neq 0,$$

где $\hat{G}$ – моном степени, меньшей $2s$. Тогда из соотношения

$$\hat{p}^{\alpha-1} \circ \hat{x} = \hat{x} \circ \hat{p}^{\alpha-1} + (\alpha-1)\mathbf{r} \circ \hat{p}^{\alpha-2}$$

следует, что $\hat{F} = \hat{p} \circ \hat{x} \circ \hat{G}_1 + \hat{x} \circ \hat{p} \circ \hat{G}_2$, где

$$\hat{G}_1 = \hat{p}^{\alpha-1} \circ \hat{x}^{\beta-1} \circ \hat{G} + (\alpha-1)\hat{p}^{\alpha-2} \circ \hat{x}^{\beta-1} \circ \hat{G}, \quad \hat{G}_2 = -(\alpha-1)\hat{p}^{\alpha-2} \circ \hat{x}^{\beta-1} \circ \hat{G}.$$

По предположению индукции $\hat{G}_1$ и $\hat{G}_2$ раскладываются по базису $\mathbf{E}_{s-1}$. Следовательно, $\hat{F}$ раскладывается по базису $\mathbf{E}_s$. Предложение доказано.

2.3. Эрмитовы наблюдаемые. Для любого монома в алгебре $\hat{\mathbb{O}}$, имеющего вид $\hat{z} = \hat{z}_1 \circ \dots \circ \hat{z}_k \in \mathbb{F}_k$, и постоянной $\alpha \in \mathbb{C}$ определим следующую операцию:

$$(\alpha \hat{z})^* = \bar{\alpha} \hat{z}_k \circ \dots \circ \hat{z}_1,$$

называемую эрмитовым сопряжением или просто сопряжением. Эту операцию можно продолжить по линейности до инволюции в $\hat{\mathbb{O}}$. Пусть теперь $\hat{F} \in \hat{\mathbb{H}}$. Возьмем произвольный элемент $\hat{G} \in \hat{\mathbb{O}}$ такой, что $\pi \hat{G} = \hat{F}$. Положим $\hat{F}^* = \pi(\hat{G}^*)$. Как показано в работе [5], такое определение корректно и задает инволюцию в $\hat{\mathbb{H}}$.

Операция эрмитова сопряжения удовлетворяет следующим свойствам:

$$(\alpha \hat{F} + \beta \hat{G})^* = \bar{\alpha} \hat{F}^* + \bar{\beta} \hat{G}^*, \quad (\hat{F} \circ \hat{G})^* = \hat{G}^* \circ \hat{F}^*, \quad [\hat{F}, \hat{G}]^* = [\hat{F}^*, \hat{G}^*], \quad \mathbf{r}^* = -\mathbf{r}$$

для всех $\hat{F}, \hat{G} \in \hat{\mathbb{H}}$.

Наблюдаемая $\hat{F}$ называется самосопряженной или эрмитовой, если $\hat{F}^* = \hat{F}$.

2.4. Автоморфизмы алгебры $\hat{\mathbb{H}}$. Рассмотрим наблюдаемые

$$\begin{aligned} \hat{P}_j &= c_{j,1}\hat{p}_1 + \dots + c_{j,n}\hat{p}_n + c_{j,n+1}\hat{x}_1 + \dots + c_{j,2n}\hat{x}_n + O_2(\hat{p}, \hat{x}), \\ \hat{X}_j &= c_{j+n,1}\hat{p}_1 + \dots + c_{j+n,n}\hat{p}_n + c_{j+n,n+1}\hat{x}_1 + \dots + c_{j+n,2n}\hat{x}_n + O_2(\hat{p}, \hat{x}), \end{aligned}$$

где $j = 1, \dots, n$ такие, что для всех $1 \leq j, k \leq n$

$$[\hat{P}_j, \hat{P}_k] = [\hat{X}_j, \hat{X}_k] = 0, \quad [\hat{P}_j, \hat{X}_k] = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases} \quad (6)$$

В частности, матрица $C = (c_{i,j})_{i,j=1}^{2n}$ является симплектической, т.е. $C^T I C = I$, где

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -E_{n \times n} \\ E_{n \times n} & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

есть симплектическая единица.

Определим следующее отображение:

$$\hat{\mathcal{A}}: \hat{\mathbb{H}} \rightarrow \hat{\mathbb{H}}, \quad \hat{F}(\hat{p}, \hat{x}) \mapsto \hat{\mathcal{A}}(\hat{F})(\hat{p}, \hat{x}) = \hat{F}(\hat{P}(\hat{p}, \hat{x}), \hat{X}(\hat{p}, \hat{x})).$$

Оказывается, что $\hat{\mathcal{A}}$ является автоморфизмом ассоциативной алгебры и алгебры Ли $(\hat{\mathbb{H}}, \circ, [\cdot, \cdot])$ [5]. Это означает, что $\hat{\mathcal{A}}$ есть биективное отображение $\hat{\mathbb{H}}$ в себя со следующими свойствами:

$$\hat{\mathcal{A}}(\alpha\hat{F} + \beta\hat{G}) = \alpha\hat{\mathcal{A}}\hat{F} + \beta\hat{\mathcal{A}}\hat{G}, \quad \hat{\mathcal{A}}(\hat{F} \circ \hat{G}) = \hat{\mathcal{A}}\hat{F} \circ \hat{\mathcal{A}}\hat{G}, \quad \hat{\mathcal{A}}[\hat{F}, \hat{G}] = [\hat{\mathcal{A}}\hat{F}, \hat{\mathcal{A}}\hat{G}]$$

для всех $\hat{F}, \hat{G} \in \hat{\mathbb{H}}$. Как следствие получаем, что $\hat{\mathcal{A}}\mathbf{r} = \mathbf{r}$. В дальнейшем автоморфизмы ассоциативной алгебры и алгебры Ли $\hat{\mathbb{H}}$ будем называть просто автоморфизмами. Эти автоморфизмы образуют группу, обозначаемую $\text{Aut } \hat{\mathbb{H}}$, с операцией композиции, заданной следующим образом:

$$(\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}})\hat{F} := \hat{\mathcal{A}}(\hat{\mathcal{B}}\hat{F}), \quad \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}} \in \text{Aut } \hat{\mathbb{H}}, \quad \hat{F} \in \hat{\mathbb{H}}.$$

Приведем два важных класса автоморфизмов. Сначала рассмотрим автоморфизм, который порождается наблюдаемыми

$$\begin{aligned} \hat{P}_j &= c_{j,1}\hat{p}_1 + \dots + c_{j,n}\hat{p}_n + c_{j,n+1}\hat{x}_1 + \dots + c_{j,2n}\hat{x}_n, \\ \hat{X}_j &= c_{j+n,1}\hat{p}_1 + \dots + c_{j+n,n}\hat{p}_n + c_{j+n,n+1}\hat{x}_1 + \dots + c_{j+n,2n}\hat{x}_n, \end{aligned}$$

где $C = (c_{i,j})_{i,j=1}^{2n}$ – симплектическая матрица. Такие автоморфизмы образуют группу, которую обозначим через $\text{Aut}_L \hat{\mathbb{H}}$. Если наблюдаемые, задающие некоторый автоморфизм $\hat{\mathcal{A}}$, имеют вид

$$\hat{P}_j = \hat{p}_j + O_2(\hat{p}, \hat{x}), \quad \hat{X}_j = \hat{x}_j + O_2(\hat{p}, \hat{x}),$$

то назовем $\hat{\mathcal{A}}$ автоморфизмом, близким к тождественному. При действии на наблюдаемую он оставляет без изменения ее однородные формы степени не выше второй.

Теперь рассмотрим наблюдаемую $\hat{H} = O_3(\hat{p}, \hat{x})$ и зададим следующее отображение:

$$\hat{F} \mapsto e^{\tau \text{ad}_{\hat{H}}}(\hat{F}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^j}{j!} \text{ad}_{\hat{H}}^j \hat{F} = \hat{F} + \frac{1}{1!} [\hat{H}, \hat{F}] \tau + \frac{1}{2!} [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{F}]] \tau^2 + \dots \quad (8)$$

Такое отображение, называемое экспоненциальным, корректно задано и является автоморфизмом $\hat{\mathbb{H}}$. Это аналог классического сдвига вдоль гамильтонова векторного поля с гамильтонианом H на время τ .

Все введенные конструкции могут быть определены и в классическом случае. Соответствующие группы автоморфизмов мы будем обозначать $\text{Aut } \mathbb{O}$, $\text{Aut}_L \mathbb{O}$.

2.5. Лемма Пуанкаре для $\hat{\mathbb{H}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n \in \hat{\mathbb{H}}_n$ удовлетворяют соотношениям

$$\text{ad}_{\hat{p}_j} \hat{P}_k - \text{ad}_{\hat{p}_k} \hat{P}_j = 0, \quad \text{ad}_{\hat{x}_j} \hat{X}_k - \text{ad}_{\hat{x}_k} \hat{X}_j = 0, \quad \text{ad}_{\hat{p}_j} \hat{X}_k - \text{ad}_{\hat{x}_k} \hat{P}_j = 0. \quad (9)$$

Тогда существует наблюдаемая $\hat{W} \in \hat{\mathbb{H}}_n$ такая, что

$$\hat{P}_j = \text{ad}_{\hat{W}} \hat{p}_j, \quad \hat{X}_j = \text{ad}_{\hat{W}} \hat{x}_j.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Применяя усреднение aver , получаем из этого утверждения следующий результат. Форма $\omega = P_1 dx_1 + \dots + P_n dx_n - X_1 dp_1 - \dots - X_n dp_n$ в окрестности нуля замкнута тогда и только тогда, когда она точна. Это частный случай классического утверждения, которое носит название леммы Пуанкаре.

Доказательство предложения 3 приведено в приложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (О ПРИБЛИЖЕНИИ АВТОМОРФИЗМА). Для любого автоморфизма существуют $\widehat{W}_k \in \mathbb{F}_k$ такие, что

$$\widehat{\mathcal{A}} = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{\text{ad}_{\widehat{W}_3}} \dots e^{\text{ad}_{\widehat{W}_{m+1}}}. \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предложение 4 носит формальный характер. Понимать его следует таким образом: для любой наблюдаемой $\widehat{F} \in \widehat{\mathbb{H}}$

$$\widehat{\mathcal{A}}\widehat{F} = (e^{\text{ad}_{\widehat{W}_3}} \dots e^{\text{ad}_{\widehat{W}_{m+1}}})\widehat{F} + O_{m+2}(\widehat{p}, \widehat{x}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть автоморфизм $\widehat{\mathcal{A}} \in \text{Aut } \widehat{\mathbb{H}}$ порождается наблюдаемыми

$$\begin{aligned} \widehat{P}_j &= \widehat{p}_j + \widehat{F}_2^{(j)} + \widehat{F}_3^{(j)} + \dots + \widehat{F}_m^{(j)} + O_{m+1}(\widehat{p}, \widehat{x}), & \widehat{F}_k^{(j)} &\in \mathbb{F}_k, \\ \widehat{X}_j &= \widehat{x}_j + \widehat{G}_2^{(j)} + \widehat{G}_3^{(j)} + \dots + \widehat{G}_m^{(j)} + O_{m+1}(\widehat{p}, \widehat{x}), & \widehat{G}_k^{(j)} &\in \mathbb{F}_k. \end{aligned}$$

По определению автоморфизма выполнены следующие равенства:

$$[\widehat{p}_j, \widehat{G}_2^k] + [\widehat{F}_2^j, \widehat{x}_k] = 0, \quad [\widehat{p}_j, \widehat{F}_2^k] + [\widehat{F}_2^j, \widehat{p}_k] = 0, \quad [\widehat{x}_j, \widehat{G}_2^k] + [\widehat{G}_2^j, \widehat{x}_k] = 0.$$

В соответствии с предложением 3 для $\widehat{\mathbb{H}}$ существует наблюдаемая $\widehat{W}_3 \in \mathbb{F}_3$ такая, что

$$\widehat{F}_2^{(j)} = \text{ad}_{\widehat{W}_3} \widehat{p}_j, \quad \widehat{G}_2^{(j)} = \text{ad}_{\widehat{W}_3} \widehat{x}_j.$$

Следовательно, автоморфизм $e^{\text{ad}_{\widehat{W}_3}}$ порождается наблюдаемыми

$$\widehat{P}_j = \widehat{p}_j + \widehat{F}_2^{(j)} + \widehat{f}_3^{(j)} + O_4(\widehat{p}, \widehat{x}), \quad \widehat{X}_j = \widehat{x}_j + \widehat{G}_2^{(j)} + \widehat{g}_3^{(j)} + O_4(\widehat{p}, \widehat{x}).$$

По определению автоморфизма имеем соотношения

$$[\widehat{p}_j, \widehat{G}_3^k] + [\widehat{F}_2^j, \widehat{G}_2^k] + [\widehat{F}_3^j, \widehat{x}_k] = 0, \quad [\widehat{p}_j, \widehat{g}_3^k] + [\widehat{F}_2^j, \widehat{G}_2^k] + [\widehat{f}_3^j, \widehat{x}_k] = 0.$$

Следовательно, $[\widehat{p}_j, \widehat{g}_3^k - \widehat{G}_3^k] + [\widehat{f}_3^j - \widehat{F}_3^j, \widehat{x}_k] = 0$. Аналогично получаются соотношения

$$[\widehat{p}_j, \widehat{f}_3^k - \widehat{F}_3^k] + [\widehat{f}_3^j - \widehat{F}_3^j, \widehat{p}_k] = 0, \quad [\widehat{x}_j, \widehat{g}_3^k - \widehat{G}_3^k] + [\widehat{g}_3^j - \widehat{G}_3^j, \widehat{x}_k] = 0.$$

В соответствии с предложением 3 для $\widehat{\mathbb{H}}$ существует наблюдаемая $\widehat{W}_4 \in \mathbb{F}_3$ такая, что

$$\widehat{F}_3^{(j)} = \widehat{f}_3^j + \text{ad}_{\widehat{W}_4} \widehat{p}_j, \quad \widehat{G}_3^{(j)} = \widehat{g}_3^j + \text{ad}_{\widehat{W}_4} \widehat{x}_j.$$

Следовательно, автоморфизм $e^{\text{ad}_{\widehat{W}_3}} e^{\text{ad}_{\widehat{W}_4}}$ порождается наблюдаемыми

$$\widehat{P}_j = \widehat{p}_j + \widehat{F}_2^{(j)} + \widehat{F}_3^{(j)} + \widehat{f}_4^{(j)} + O_5(\widehat{p}, \widehat{x}), \quad \widehat{X}_j = \widehat{x}_j + \widehat{G}_2^{(j)} + \widehat{G}_3^{(j)} + \widehat{g}_4^{(j)} + O_5(\widehat{p}, \widehat{x}).$$

Продолжая эту процедуру, получаем требуемое утверждение. Предложение доказано.

3. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА КВАНТОВЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ

3.1. Нормальная форма квадратичных наблюдаемых. Рассмотрим квадратичную квантовую наблюдаемую $\hat{H}_2 \in \mathbb{F}_2$. Построим такой автоморфизм $\hat{\mathcal{A}} \in \text{Aut}_L \hat{\mathbb{H}}$, который приводил бы $\hat{H}_2$ к наиболее простому виду.

Для начала мы рассмотрим классическую квадратичную форму или гамильтониан $H_2 = \langle \Omega z, z \rangle / 2$, где $z = (p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор-столбец, $\Omega = \Omega^T$ – симметричная $(2n \times 2n)$ -матрица, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$, как и ранее, есть стандартное скалярное произведение. По определению собственные значения гамильтониана $\hat{H}_2$ суть собственные значения матрицы $I\Omega$, где I – симплектическая единица (7). Будем говорить, что собственные значения $\hat{H}_2$ просты, если матрица $I\Omega$ диагонализируема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\hat{H}_2 \in \mathbb{F}_2$ и собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ гамильтониана $\text{aver } \hat{H}_2$ просты. Тогда существует автоморфизм $\hat{\mathcal{A}} \in \text{Aut}_L \hat{\mathbb{H}}$ такой, что

$$\hat{\mathcal{A}}\hat{H}_2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{p}_j \circ \hat{x}_j + c\mathbf{r}, \quad c \in \mathbb{C}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим классическую квадратичную форму $H_2 = \text{aver } \hat{H}_2$. Хорошо известно, что существует классическая линейная замена $\mathcal{A} \in \text{Aut}_L \mathbb{O}$, порожденная наблюдаемыми,

$$Z = Cz, \quad z = (p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n), \quad Z = (P_1, \dots, P_n, X_1, \dots, X_n), \quad (12)$$

для некоторой симплектической матрицы C такая, что

$$\mathcal{A}H_2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j p_j x_j.$$

Тогда автоморфизм $\hat{\mathcal{A}} \in \text{Aut}_L \hat{\mathbb{H}}$, порожденный той же самой матрицей,

$$\hat{Z} = C\hat{z}, \quad \hat{z} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n), \quad \hat{Z} = (\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n), \quad (13)$$

приводит $\hat{H}_2$ к виду (11). Теорема доказана.

3.2. Основная теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\hat{H} = \hat{H}_2 + O_3(\hat{p}, \hat{x}) \in \hat{\mathbb{H}}$, где $\hat{H}_2$ имеет вид правой части (11). Тогда существует автоморфизм $\hat{\mathcal{A}} \in \text{Aut } \hat{\mathbb{H}}$, близкий к тождественному и такой, что

$$[\hat{H}_2, \hat{\mathcal{A}}\hat{H}] = 0. \quad (14)$$

Наблюдаемая $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{A}}\hat{H}$, удовлетворяющая (14), называется нормальной формой. Вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ называется вектором частот. Введем обозначения

$$R(\lambda) = \{(\mu, \nu) \mid \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+^n, \langle \mu - \nu, \lambda \rangle = 0\},$$

$$\hat{\mathbb{N}}_\lambda = \bigcup_{(\mu, \nu) \in R(\lambda)} \mathbb{F}^{\mu, \nu}, \quad \hat{\mathbb{N}}_\lambda^c = \bigcup_{(\mu, \nu) \notin R(\lambda)} \mathbb{F}^{\mu, \nu}.$$

Пространство $\widehat{\mathbb{N}}_\lambda$ является ассоциативной подалгеброй в $\widehat{\mathbb{H}}$, а пространство $\widehat{\mathbb{N}}_\lambda^c$ – линейным подпространством там же. Ниже (см. следствие 1) мы покажем, что наблюдаемые из $\widehat{\mathbb{N}}_\lambda$ и только они удовлетворяют соотношению (14). Поэтому мы назовем $\widehat{\mathbb{N}}_\lambda$ алгеброй нормальных форм.

Частоты λ называются резонансными, если существуют такие числа $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$, не равные нулю одновременно, что $\sum_{j=1}^n k_j \lambda_j = 0$. В противном случае вектор частот называется нерезонансным.

Заметим, что множество $R(\lambda)$, введенное выше, содержит векторы вида (μ, μ) для всех векторов частот λ . Для нерезонансного вектора частот λ множество $R(\lambda)$ состоит лишь из векторов такого вида. В нерезонансном случае ассоциативная алгебра $\widehat{\mathbb{N}}_\lambda$ коммутативна (одинаковая для всех векторов λ), в резонансном – некоммутативна.

3.3. Свойства пространств однородных форм. Прежде чем приступить к доказательству основной теоремы, получим некоторые свойства пространств $\mathbb{F}_{\mu, \nu}^{\mu, \nu}$, $\mathbb{N}_\lambda$ и $\mathbb{N}_\lambda^c$.

Для всякого целочисленного вектора $d \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $\|d\| = \sum_{j=1}^n d_j$. Введем обозначение

$$\mathbb{F}_{-}^{\mu, \nu} = \bigcup_{d \in \mathbb{Z}_+^n, \|d\|=1} \mathbb{F}^{\mu-d, \nu-d},$$

где формально положим $\mathbb{F}^{-1, \nu} = \mathbb{F}^{\mu, -1} = \{0\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\widehat{F} \in \mathbb{F}^{\mu, \nu}$ и $\widehat{F} = \mathbf{r} \circ \widehat{G}$. Тогда $\widehat{G} \in \mathbb{F}_{-}^{\mu, \nu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu', \nu' \in \mathbb{Z}_+^n$, $\gamma \in \mathbb{Z}_+$. Запись $(\mu', \nu', \gamma) \in M_{\mu, \nu}$ означает, что существуют такие векторы $\mu^0, \nu^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, что

$$\mu = \mu' + \mu^0, \quad \nu = \nu' + \nu^0, \quad \|\mu^0\| = \|\nu^0\| = \gamma.$$

Согласно предложению 1 наблюдаемую $\widehat{F}$ можно единственным образом представить в виде

$$\widehat{F} = \mathbf{r} \circ \sum_{(\mu', \nu', \gamma) \in M_{\mu, \nu}} C_{\mu', \nu', \gamma} \mathbf{r}^{\gamma-1} \circ \hat{p}^{\mu'} \circ \hat{x}^{\nu'},$$

где каждое слагаемое лежит в некотором подпространстве $\mathbb{F}^{\mu-d, \nu-d}$, $d \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\|d\| = 1$. Предложение доказано.

Пусть $\mu', \nu', \mu'', \nu'' \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда $(\mu', \nu') \sim (\mu'', \nu'')$, если существуют такие векторы $l', l'', \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+^n$, что

$$\mu'' = \mu + l'', \quad \nu'' = \nu + l'', \quad \mu' = \mu + l', \quad \nu' = \nu + l', \quad \|l'\| = \|l''\|. \quad (15)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Соотношение $\mathbb{F}^{\mu', \nu'} \cap \mathbb{F}^{\mu'', \nu''} \neq \{0\}$ справедливо тогда и только тогда, когда $(\mu', \nu') \sim (\mu'', \nu'')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть выполнено (15), причем $\|l'\| = \|l''\| = \gamma$. Тогда

$$\mathbf{r}^\gamma \circ \hat{p}^\mu \circ \hat{x}^\nu \in \mathbb{F}^{\mu', \nu'} \cap \mathbb{F}^{\mu'', \nu''}.$$

Необходимость. Пусть $\mathbb{F}^{\mu',\nu'} \cap \mathbb{F}^{\mu'',\nu''} \neq \{0\}$. Тогда существует такое число $k \in \mathbb{Z}_+$, что $\mathbb{F}^{\mu',\nu'} \cup \mathbb{F}^{\mu'',\nu''} \subset \mathbb{F}_k$. Докажем утверждение от противного индукцией по k .

Для $k \leq 2$ утверждение, очевидно, выполнено. Предположим, что пары (μ', ν') и (μ'', ν'') не эквивалентны, причем $\|\mu'\| + \|\nu'\| = \|\mu''\| + \|\nu''\| = k$. Докажем, что $\mathbb{F}^{\mu',\nu'} \cap \mathbb{F}^{\mu'',\nu''} = \{0\}$. Рассмотрим наблюдаемую $\hat{F} \in \mathbb{F}^{\mu,\nu} \cap \mathbb{F}^{\mu',\nu'}$. Тогда

$$\text{aver } \hat{F} = f'_0 p_1^{\mu'_1} \dots p_n^{\mu'_n} x_1^{\nu'_1} \dots x_n^{\nu'_n} = f''_0 p_1^{\mu''_1} \dots p_n^{\mu''_n} x_1^{\nu''_1} \dots x_n^{\nu''_n}.$$

Следовательно, $\text{aver } \hat{F} = 0$, или $\hat{F} = \mathbf{r} \circ \hat{G}$. Согласно предложению 5 имеем $\hat{G} \in \mathbb{F}_-^{\mu',\nu'} \cap \mathbb{F}_-^{\mu'',\nu''}$. По предположению индукции $\hat{G} = 0$. Предложение доказано.

Далее положим

$$\hat{H}_2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{p}_j \circ \hat{x}_j.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\hat{F} \in \mathbb{F}^{\mu,\nu}$. Тогда $[\hat{F}, \hat{H}_2] = \langle \lambda, \mu - \nu \rangle \hat{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда $\hat{F}$ – моном. Общий случай следует из линейности. Проведем доказательство с помощью индукции по степени k монома $\hat{F}$.

Пусть $k = 1$. Рассмотрим лишь случай $\hat{F} = \hat{p}_l$, поскольку случай $\hat{F} = \hat{x}_l$ аналогичен. Имеем

$$\left[\hat{p}_l, \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{p}_j \circ \hat{x}_j \right] = \lambda_l \hat{p}_l = \langle \lambda, \mu - \nu \rangle \hat{p}_l.$$

База индукции доказана.

Пусть $\hat{F}_0$ – моном степени $k - 1$. Предположим, что $\hat{F} = \hat{p}_l \circ \hat{F}_0$. Другие случаи ($\hat{F} = \hat{x}_l \circ \hat{F}_0$, $\hat{F} = \hat{F}_0 \circ \hat{p}_l$, $\hat{F} = \hat{F}_0 \circ \hat{x}_l$) рассматриваются аналогично. Имеем

$$[\hat{p}_l \circ \hat{F}_0, \hat{H}_2] = \hat{p}_l \circ [\hat{F}_0, \hat{H}_2] + [\hat{p}_l, \hat{H}_2] \circ \hat{F}_0 = \langle \lambda, \mu' - \nu \rangle \hat{p}_l \circ \hat{F}_0,$$

где $\mu'_j = \mu_j$ при $j \neq l$ и $\mu'_l = \mu_l + 1$. Шаг индукции доказан.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. 1. Пусть $\hat{F} \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda$. Тогда $\text{ad}_{\hat{H}_2} \hat{F} = 0$.

2. Пусть $\hat{F} \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda^c$ и $\text{ad}_{\hat{H}_2} \hat{F} = 0$. Тогда $\hat{F} = 0$.

3. $\hat{\mathbb{H}} = \hat{\mathbb{N}}_\lambda \oplus \hat{\mathbb{N}}_\lambda^c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1 следует из предложения 7.

2. Для всех пар $(\mu, \nu) \in \mathbb{Z}_+^{2n}$ составим множества вида $\bigcup_{(\mu', \nu') \sim (\mu, \nu)} \mathbb{F}^{\mu', \nu'}$. Согласно предложению 6 эти множества либо совпадают, либо их пересечение есть $\{0\}$. Пронумеруем эти множества, считая совпадающие по одному разу, и обозначим их через $\hat{\mathbb{K}}_m$, где $m = 1, 2, \dots$. Таким образом, $\hat{\mathbb{K}}_{m_1} \cap \hat{\mathbb{K}}_{m_2} = \{0\}$, если $m_1 \neq m_2$.

Представим $\hat{F}$ в виде

$$\hat{F} = \sum_m \hat{F}_m, \quad \hat{F}_m \in \hat{\mathbb{K}}_m.$$

Из предложения 7 следует, что $\text{ad}_{\hat{H}_2}: \hat{\mathbb{K}}_m \rightarrow \hat{\mathbb{K}}_m$. Поэтому если $\text{ad}_{\hat{H}_2} \hat{F} = 0$, то $\text{ad}_{\hat{H}_2} \hat{F}_m = 0$. Покажем, что $\hat{F}_m = 0$. Действительно, $\hat{F}_m$ можно представить в следующем виде (не единственным образом):

$$\hat{F}_m = \sum_s \hat{F}_{m,s}, \quad \hat{F}_{m,s} \in \mathbb{F}^{\mu^s, \nu^s},$$

где $(\mu^s, \nu^s) \sim (\mu, \nu)$ для всех s . Тогда согласно предложению 7

$$\mathrm{ad}_{\hat{H}_2} \hat{F}_m = \sum_s \langle \lambda, \nu^s - \mu^s \rangle \hat{F}_{m,s} = \langle \lambda, \nu - \mu \rangle \hat{F}_m.$$

Отсюда следует, что $\hat{F}_m = 0$.

3. Очевидно, что $\hat{\mathbb{H}} = \hat{\mathbb{N}}_\lambda \cup \hat{\mathbb{N}}_\lambda^c$. Из предложения 5 следует, что $\hat{\mathbb{N}}_\lambda \cap \hat{\mathbb{N}}_\lambda^c = \{0\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. $\mathrm{ad}_{\hat{H}_2} \hat{F} = 0 \iff \hat{F} \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 8 для всякой наблюдаемой $\hat{F} \in \hat{\mathbb{H}}$ справедливо представление

$$\hat{F} = \hat{F}_0 + \hat{F}_1, \quad \hat{F}_0 \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda, \quad \hat{F}_1 \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda^c.$$

Следовательно, если $\mathrm{ad}_{\hat{H}_2} \hat{F} = 0$, то $\mathrm{ad}_{\hat{H}_2} \hat{F}_1 = 0$. Отсюда согласно предложению 8 следует, что $\hat{F}_1 = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Отображение $\mathrm{ad}_{\hat{H}_2}: \hat{\mathbb{N}}_\lambda^c \rightarrow \hat{\mathbb{N}}_\lambda^c$ – изоморфизм линейного пространства в себя.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathrm{ad}_{\hat{H}_2} \hat{F} = 0$, то согласно предложению 8 имеем $\hat{F} = 0$. Поэтому $\mathrm{ad}_{\hat{H}_2}$ – инъекция, а следовательно, $\mathrm{ad}_{\hat{H}_2}$ – изоморфизм.

3.4. Доказательство теоремы 2. Определим $\hat{\mathcal{A}}$ как предел последовательности экспоненциальных автоморфизмов:

$$\hat{\mathcal{A}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\mathcal{A}}^{(m)} \dots \hat{\mathcal{A}}^{(1)}, \quad \hat{\mathcal{A}}^{(m)} = e^{\mathrm{ad}_{\hat{W}_{m+2}}}, \quad \hat{W}_{m+2} \in \mathbb{F}_{m+2}. \quad (16)$$

Обычно понятие предела требует введения топологии. Однако в нашем случае однородная форма любой степени стабилизируется на некотором шаге. Точнее, отображение $\hat{\mathcal{A}}^{(m)}$ не изменяет однородные формы степени меньше, чем $m+2$.

Отображения $\hat{\mathcal{A}}^{(m)}$ выберем так, чтобы

$$(\hat{\mathcal{A}}^{(m)} \dots \hat{\mathcal{A}}^{(1)}) \hat{H} = \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \dots + \hat{H}_{m+2} + O_{m+3}(\hat{p}, \hat{x}), \quad \hat{H}_k \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda.$$

Построим эти отображения индуктивно. Пусть отображения $\hat{\mathcal{A}}^{(1)}, \dots, \hat{\mathcal{A}}^{(m-1)}$ построены. Преобразованную наблюдаемую обозначаем по-прежнему через $\hat{H}$. Имеем

$$\hat{H} = \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \dots + \hat{H}_{m+1} + \hat{H}_{m+2} + O_{m+3}(\hat{p}, \hat{x}), \quad \hat{H}_3, \dots, \hat{H}_{m+1} \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda.$$

Тогда

$$\hat{\mathcal{A}}^{(m)} \hat{H} = \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \dots + \hat{H}_{m+1} + \hat{H}_{m+2} + O_{m+3}(\hat{p}, \hat{x}), \quad \hat{H}_{m+2} = \hat{H}_{m+2} + [\hat{W}_{m+2}, \hat{H}_2].$$

Согласно предложению 8 имеем $\hat{H}_{m+2} = \hat{H}_{m+2}^{(1)} + \hat{H}_{m+2}^{(2)}$, где $\hat{H}_{m+2}^{(1)} \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda$ и $\hat{H}_{m+2}^{(2)} \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda^c$. Согласно следствию 2 существует такая наблюдаемая $\hat{W}_{m+2} \in \mathbb{F}_{m+2}$, что $\hat{H}_{m+2} = \hat{H}_{m+2}^{(1)} \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda$.

Итак, построенная последовательность автоморфизмов приводит $\hat{H}$ к нормальной форме. Теорема доказана.

4. СЛЕДСТВИЯ И УТОЧНЕНИЯ

4.1. Явный вид нерезонансной нормальной формы. В классической механике в случае нерезонансных частот имеется явная формула для нормальной формы $H = F(p_1x_1, \dots, p_nx_n)$ для некоторого формального ряда Тейлора от n переменных с комплексными коэффициентами. Получим подобную формулу для некоммутативных наблюдаемых.

Согласно теореме 2 некоммутативная наблюдаемая приводится к виду $\hat{H} \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda$. В нерезонансном случае $\hat{\mathbb{N}}_\lambda = \bigcup_{\mu \in \mathbb{Z}_+^n} \mathbb{F}^{\mu, \mu}$. Для упрощения записи обозначим эту алгебру через $\hat{\mathbb{N}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $\hat{F} \in \hat{\mathbb{N}}$. Тогда существует такой классический формальный ряд Тейлора с комплексными коэффициентами

$$G(y_0, \dots, y_n) = \sum_{m_0, \dots, m_n=0}^{\infty} g_{m_0, \dots, m_n} y_0^{m_0} \dots y_n^{m_n},$$

что

$$\hat{F}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = G(i\mathbf{r}, \hat{I}_1, \dots, \hat{I}_n), \quad (17)$$

где $\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_n$ – следующие взаимно коммутирующие наблюдаемые:

$$\hat{I}_j = \frac{\hat{p}_j \circ \hat{x}_j + \hat{x}_j \circ \hat{p}_j}{2}.$$

Более того, если наблюдаемая $\hat{F}$ эрмитова, то коэффициенты $g_{m_0, \dots, m_n}$ вещественны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $n = 1$. Согласно предложению 2 имеем $\hat{F} = \Phi(\hat{p} \circ \hat{x}, \hat{x} \circ \hat{p})$, где Φ – некоторый формальный ряд Тейлора от двух переменных с комплексными коэффициентами. Используя соотношения

$$\hat{p} \circ \hat{x} = \frac{\hat{I} + \mathbf{r}}{2}, \quad \hat{x} \circ \hat{p} = \frac{\hat{I} - \mathbf{r}}{2},$$

получаем $\hat{F} = G(\hat{I}, i\mathbf{r})$ для некоторого формального ряда Тейлора G .

Пусть теперь $n > 1$. Достаточно доказать предложение для случая, когда $\hat{F}$ – моном. В этом случае

$$\hat{F} = \hat{F}_1(\hat{p}_1, \hat{x}_1) \circ \dots \circ \hat{F}_n(\hat{p}_n, \hat{x}_n)$$

для некоторых мономов $\hat{F}_j \in \mathbb{F}^{\mu_j, \mu_j}$. Следовательно, для некоторых рядов Тейлора $G_1, \dots, G_n$ от двух переменных с комплексными коэффициентами имеем следующее равенство:

$$\hat{F} = G_1(\hat{I}_1, i\mathbf{r}) \circ \dots \circ G_n(\hat{I}_n, i\mathbf{r}).$$

Обозначив правую часть через $G(\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_n, i\mathbf{r})$, получаем для $\hat{F}$ нужное представление.

Вторая часть утверждения следует из того, что наблюдаемые $i\mathbf{r}$ и $\hat{I}_j$ эрмитовы.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если λ – нерезонансный вектор частот, то для наблюдаемой $\hat{H} = \hat{H}_2 + O_3(\hat{p}, \hat{x})$, где $\hat{H}_2$ задано соотношением (11), существует автоморфизм $\hat{A} \in \text{Aut } \hat{\mathbb{H}}$, близкий к тождественному, такой, что

$$\hat{A}\hat{H} = G(\mathbf{r}, \hat{I}_1, \dots, \hat{I}_n),$$

где G – формальный ряд Тейлора с комплексными коэффициентами.

4.2. Эрмитов вид нормальной формы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\hat{H} = \hat{H}^* = \hat{H}_2 + O_3(\hat{p}, \hat{x})$ – эрмитов гамильтониан с простыми собственными значениями. Тогда:

а) существует автоморфизм $\hat{A} \in \text{Aut } \hat{\mathbb{H}}$, близкий к тождественному, такой, что $[\hat{A}\hat{H}, \hat{H}_2] = 0$;

б) если вектор частот λ нерезонансный, то существует эрмитов автоморфизм $\hat{A} \in \text{Aut } \hat{\mathbb{H}}$ (т.е. переводящий эрмитовы наблюдаемые в эрмитовы) такой, что

$$\hat{A}\hat{H} = F(\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_n, i\mathbf{r}), \quad (18)$$

где F – формальный ряд Тейлора с вещественными коэффициентами от взаимно коммутирующих эрмитовых наблюдаемых $i\mathbf{r}$ и $\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_n$ вида

$$\hat{Q}_j = \frac{\hat{p}_j \circ \hat{x}_j + \hat{x}_j \circ \hat{p}_j}{2}, \quad j = 1, \dots, k_1,$$

$$\hat{Q}_j = \frac{\hat{p}_j^2 + \hat{x}_j^2}{2}, \quad j = k_1 + 1, \dots, k_2,$$

$$\hat{Q}_j = \frac{\hat{p}_j \circ \hat{x}_j + \hat{x}_j \circ \hat{p}_j}{2} + \frac{\hat{p}_{j+l} \circ \hat{x}_{j+l} + \hat{x}_{j+l} \circ \hat{p}_{j+l}}{2}, \quad j = k_2 + 1, \dots, k_2 + l,$$

$$\hat{Q}_{j+l} = \hat{p}_j \circ \hat{x}_{j+l} - \hat{x}_j \circ \hat{p}_{j+l}, \quad j = k_2 + 1, \dots, k_2 + l,$$

где $k_2 + 2l = n$, $k_1 \leq k_2$ и $k_1, k_2, l \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\hat{H}_2$ эрмитова, то классический гамильтониан $H_2 = \text{aver } \hat{H}_2$ является вещественной квадратичной формой. Собственные значения такого гамильтониана λ бывают трех типов:

- 1) вещественная пара: $\lambda = \pm\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 2) чисто мнимая пара: $\lambda = \pm\beta i$, $\beta \in \mathbb{R}$;
- 3) четверка комплексных чисел: $\lambda = \pm\alpha \pm \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Хорошо известно, что существует классический вещественный автоморфизм $\mathcal{L}_0 \in \text{Aut}_L \mathbb{O}$ вида (12), который приводит H_2 к представлению в виде суммы частичных гамильтонианов от непересекающихся наборов переменных одного из трех типов:

- 1) $H_\alpha = \alpha r x$ для вещественной пары $\lambda = \pm\alpha$;
- 2) $H_{\beta i} = \beta(p^2 + x^2)/2$ для чисто мнимой пары $\lambda = \pm\beta i$;
- 3) $H_{\pm\alpha \pm \beta i} = \alpha(p_1 x_1 + p_2 x_2) - \beta(p_1 x_2 - p_2 x_1)$ для комплексной четверки $\lambda = \pm\alpha \pm \beta i$.

По аналогии с теоремой 1 получаем, что существует автоморфизм $\hat{\mathcal{L}}_0 \in \text{Aut}_L \hat{\mathbb{H}}$, который приводит $\hat{H}_2$ к виду

$$\hat{\mathcal{L}}_0 \hat{H}_2 = \sum_{j=1}^{k_1} \alpha_j \hat{Q}_j + \sum_{j=k_1+1}^{k_2} \beta_j \hat{Q}_j + \sum_{j=k_2+1}^{k_2+l} (\alpha_j \hat{Q}_j + \beta_j \hat{Q}_{j+l}) + c i\mathbf{r}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Автоморфизм $\hat{\mathcal{L}}_0$ эрмитов, поскольку C – вещественная матрица.

Положим $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{L}}_0 \hat{H} = \hat{\mathcal{H}}_2 + \hat{\mathcal{H}}_3 + \dots$. Если $\hat{\mathcal{A}} \in \text{Aut } \hat{\mathbb{H}}$ – эрмитов автоморфизм такой, что $[\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{H}}_2] = 0$, то $\hat{\mathcal{L}}_0^{-1} \hat{\mathcal{A}} \hat{\mathcal{L}}_0$ – автоморфизм, требуемый в условии “а”. Если собственные значения нерезонансны, а автоморфизм $\hat{\mathcal{A}} \in \text{Aut } \hat{\mathbb{H}}$ приводит $\hat{\mathcal{H}}$ к виду (18), то $\hat{\mathcal{A}} \hat{\mathcal{L}}_0$ – автоморфизм, требуемый в условии “б”. Таким образом, не ограничивая общности, считаем, что $\hat{H}_2$ имеет вид (19).

Рассмотрим автоморфизм $\hat{\mathcal{L}} \in \text{Aut}_L \hat{\mathbb{H}}$, порожденный следующими наблюдаемыми:

$$\begin{aligned} \hat{P}_j &= \hat{p}_j, & \hat{X}_j &= \hat{x}_j, & 1 \leq j \leq k_1, \\ \hat{P}_j &= \frac{\hat{p}_j + i\hat{x}_j}{\sqrt{2}}, & \hat{X}_j &= \frac{i\hat{p}_j + \hat{x}_j}{\sqrt{2}}, & k_1 + 1 \leq j \leq k_2, \\ \hat{P}_j &= \frac{\hat{p}_j + \hat{p}_{j+l}}{\sqrt{2}}, & \hat{X}_j &= \frac{\hat{x}_j + \hat{x}_{j+l}}{\sqrt{2}}, \\ \hat{P}_{j+l} &= i \frac{\hat{p}_{j+l} - \hat{p}_j}{\sqrt{2}}, & \hat{X}_{j+l} &= i \frac{\hat{x}_j - \hat{x}_{j+l}}{\sqrt{2}}, & k_2 \leq j \leq k_2 + l. \end{aligned}$$

Если $\hat{H}_2$ имеет вид (19), то $\hat{\mathcal{L}}\hat{H}_2$ имеет вид правой части (11). Воспользуемся теоремой 2 и построим отображение $\hat{\mathcal{A}} \in \text{Aut } \hat{\mathbb{H}}$, приводящее $\hat{\mathcal{L}}\hat{H}$ к нормальной форме. Тогда $[\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{L}}\hat{H}, \hat{\mathcal{L}}\hat{H}_2] = 0$. Следовательно, $\hat{\mathcal{L}}^{-1} \hat{\mathcal{A}} \hat{\mathcal{L}}$ будет требуемым автоморфизмом, если он эрмитов. Кроме того, если собственные значения λ нерезонансны, то $\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{L}}\hat{H}$ имеет вид правой части (17). Следовательно, если $\hat{\mathcal{L}}^{-1} \hat{\mathcal{A}} \hat{\mathcal{L}}$ – эрмитов, то

$$\hat{\mathcal{L}}^{-1} \hat{\mathcal{A}} \hat{\mathcal{L}} \hat{H} = F(\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_n, i\mathbf{r}),$$

где $\hat{Q}_j$ – наблюдаемые, которые требуются в условии. Таким образом, если мы установим, что $\hat{\mathcal{L}}^{-1} \hat{\mathcal{A}} \hat{\mathcal{L}}$ является эрмитовым автоморфизмом, то теорема будет доказана.

Нормализующее отображение определено в теореме 2 как предел отображений

$$\hat{\mathbb{H}} \xrightarrow{\hat{\mathcal{A}}^{(1)}} \hat{\mathbb{H}} \xrightarrow{\hat{\mathcal{A}}^{(2)}} \dots \xrightarrow{\hat{\mathcal{A}}^{(m-1)}} \hat{\mathbb{H}} \xrightarrow{\hat{\mathcal{A}}^{(m)}} \dots,$$

где $\hat{\mathcal{A}}^{(m)} = e^{\text{ad}_{\hat{W}_{m+2}}}$. Введем обозначение $\hat{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}^{(m)} = e^{\text{ad}_{\hat{\mathcal{L}}^{-1} \hat{W}_{m+2}}}$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{H}} & \xrightarrow{\hat{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}^{(m)}} & \hat{\mathbb{H}} \\ \downarrow \hat{\mathcal{L}} & & \downarrow \hat{\mathcal{L}} \\ \hat{\mathbb{H}} & \xrightarrow{\hat{\mathcal{A}}^{(m)}} & \hat{\mathbb{H}} \end{array}$$

коммутативна. Действительно,

$$\hat{\mathcal{L}} \exp(\text{ad}_{\hat{\mathcal{L}}^{-1} \hat{W}_{m+2}}) \hat{\mathcal{L}}^{-1} \hat{F} = \hat{\mathcal{L}} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}^{-1} \frac{\text{ad}_{\hat{W}_{m+2}}^j \hat{F}}{j!} = \exp(\text{ad}_{\hat{W}_{m+2}}) \hat{F}.$$

Таким образом, коммутативна и следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{\mathbb{H}} & \xrightarrow{\hat{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}^{(1)}} & \hat{\mathbb{H}} & \xrightarrow{\hat{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}^{(2)}} & \dots & \xrightarrow{\hat{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}^{(m-1)}} & \hat{\mathbb{H}} & \xrightarrow{\hat{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}^{(m)}} & \dots \\ \downarrow \hat{\mathcal{L}} & & \downarrow \hat{\mathcal{L}} & & & & \downarrow \hat{\mathcal{L}} & & \\ \hat{\mathbb{H}} & \xrightarrow{\hat{\mathcal{A}}^{(1)}} & \hat{\mathbb{H}} & \xrightarrow{\hat{\mathcal{A}}^{(2)}} & \dots & \xrightarrow{\hat{\mathcal{A}}^{(m-1)}} & \hat{\mathbb{H}} & \xrightarrow{\hat{\mathcal{A}}^{(m)}} & \dots \end{array}.$$

В этой диаграмме предел отображений в верхней цепочке дает автоморфизм $\widehat{\mathcal{L}}^{-1}\widehat{\mathcal{A}}\widehat{\mathcal{L}}$. Нам достаточно доказать, что $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ – эрмитовы автоморфизмы или что $\widehat{\mathcal{L}}^{-1}\widehat{W}_{m+2}$ – эрмитовы наблюдаемые.

Рассмотрим отображение $\widehat{\mathcal{L}}^*$, действующее следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{L}}^*\widehat{F} = \widehat{\mathcal{L}}\widehat{F}^*, \quad \widehat{F} \in \widehat{\mathbb{H}}.$$

Это отображение не является автоморфизмом, потому что не выполнено свойство линейности. Тогда условие эрмитовости наблюдаемой $\widehat{\mathcal{L}}^{-1}\widehat{W}_{m+2}$ можно переписать в виде

$$\widehat{\mathcal{L}}(\widehat{\mathcal{L}}^{-1})^*\widehat{W}_{m+2}^* = \widehat{W}_{m+2}. \quad (20)$$

Обозначим $\widehat{\mathcal{L}}' = \widehat{\mathcal{L}}(\widehat{\mathcal{L}}^{-1})^*$. Отображение $\widehat{\mathcal{L}}'$ является автоморфизмом ассоциативной алгебры и алгебры Ли $\widehat{\mathbb{H}}$, который порождается наблюдаемыми

$$\begin{aligned} \widehat{P}_j &= \hat{p}_j, & \widehat{X}_j &= \hat{x}_j, & j &= 1, \dots, k_1, \\ \widehat{P}_j &= i\hat{x}_j, & \widehat{X}_j &= i\hat{p}_j, & j &= k_1 + 1, \dots, k_2, \\ \widehat{P}_j &= \hat{p}_{j+l}, & \widehat{X}_j &= \hat{x}_{j+l}, & \widehat{P}_{j+l} &= \hat{p}_j, & \widehat{X}_{j+l} &= \hat{x}_j, & j &= k_2, \dots, k_2 + l. \end{aligned}$$

Итак, докажем эрмитовость наблюдаемых $\widehat{\mathcal{L}}^{-1}\widehat{W}_m$ по индукции. Пусть наблюдаемые $\widehat{\mathcal{L}}^{-1}\widehat{W}_3, \dots, \widehat{\mathcal{L}}^{-1}\widehat{W}_{m+1}$ эрмитовы. Тогда наблюдаемая $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}^{(m-1)} \dots \widehat{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}^{(1)}\widehat{H}$ также эрмитова. Обозначим

$$\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{L}}\widehat{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}^{(m-1)} \dots \widehat{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}^{(1)}\widehat{H} = \widehat{\mathcal{H}}_2 + \widehat{\mathcal{H}}_3 + \dots, \quad \widehat{\mathcal{H}}_k \in \mathbb{F}_k,$$

где $\widehat{\mathcal{H}}_2$ имеет вид правой части (11). Тогда $\widehat{W}_{m+2}$ определяется из условия

$$\widehat{\mathcal{H}}_{m+2} + [\widehat{W}_{m+2}, \widehat{\mathcal{H}}_2] \in \widehat{\mathbb{N}}_{\lambda}, \quad \widehat{\mathcal{L}}'\widehat{\mathcal{H}}_{m+2}^* = \widehat{\mathcal{H}}_{m+2}, \quad \widehat{\mathcal{L}}'\widehat{\mathcal{H}}_2^* = \widehat{\mathcal{H}}_2. \quad (21)$$

Докажем, что выполнено соотношение (20). Пусть $\widehat{\mathcal{H}}_{m+2} = \widehat{F}_0 + \widehat{F}_1$, где $\widehat{F}_0 \in \mathbb{N}_{\lambda}$ и $\widehat{F}_1 \in \mathbb{N}_{\lambda}^c$. Тогда (21) записывается в виде

$$\widehat{F}_1 + [\widehat{W}_{m+2}, \widehat{\mathcal{H}}_2] = 0, \quad \widehat{W}_{m+2} \in \widehat{\mathbb{N}}_{\lambda}^c.$$

Заметим, что пространства $\mathbb{N}_{\lambda}$ и $\mathbb{N}_{\lambda}^c$ являются инвариантными относительно отображения $\widehat{\mathcal{L}}'$, поэтому $\widehat{\mathcal{L}}'\widehat{F}_1^* = \widehat{F}_1$. Следовательно,

$$\widehat{F}_1 + [\widehat{\mathcal{L}}'\widehat{W}_{m+2}^*, \widehat{\mathcal{H}}_2] = \widehat{\mathcal{L}}'\widehat{F}_1^* + [\widehat{\mathcal{L}}'\widehat{W}_{m+2}^*, \widehat{\mathcal{L}}'\widehat{\mathcal{H}}_2^*] = 0.$$

Согласно следствию 2 получаем $\widehat{W}_{m+2} = \widehat{\mathcal{L}}'\widehat{W}_{m+2}^*$, что и требовалось доказать.

4.3. Вопросы единственности.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\widehat{\mathcal{A}} \in \text{Aut } \widehat{\mathbb{H}}$ – автоморфизм, близкий к тождественному. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

1) существует наблюдаемая $\widehat{H} \in \widehat{\mathbb{N}}_{\lambda}$ такая, что $\widehat{H} = \widehat{H}_2 + O_3(\hat{p}, \hat{x})$, где $\widehat{H}_2$ имеет вид правой части (11), и, кроме того, $\widehat{\mathcal{A}}\widehat{H} \in \widehat{\mathbb{N}}_{\lambda}$;

2) $\widehat{\mathcal{A}}(\widehat{\mathbb{N}}_{\lambda}) = \widehat{\mathbb{N}}_{\lambda}$;

$$3) \quad \widehat{\mathcal{A}} = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{\text{ad}_{\widehat{W}_{m+1}}} \dots e^{\text{ad}_{\widehat{W}_3}}, \quad \widehat{W}_j \in \mathbb{F}_j \cap \widehat{\mathbb{N}}_{\lambda}. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $2 \implies 1$. Эта импликация тривиальна.

$3 \implies 2$. Поскольку $\hat{\mathbb{N}}_\lambda$ является подалгеброй Ли $\hat{\mathbb{H}}$, то для всякой наблюдаемой $\hat{H} \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda$ выполнено $e^{\text{ad}_{\hat{W}_j}} \hat{H} \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda$. Следовательно, $\hat{\mathcal{A}}(\hat{\mathbb{N}}_\lambda) \subset \hat{\mathbb{N}}_\lambda$, что равносильно условию 2, поскольку $\hat{\mathcal{A}}$ – изоморфизм $\hat{\mathbb{H}}$.

$1 \implies 3$. Согласно предложению 4 о приближении автоморфизма выполнено (10). Докажем, что $\hat{W}_j \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda$.

Пусть $\hat{H} = \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \dots$, где $\hat{H}_2$ задается формулой (11). Тогда

$$\hat{\mathcal{A}}\hat{H} = \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + [\hat{W}_3, \hat{H}_2] + O_4(\hat{p}, \hat{x}).$$

Поскольку $\hat{H}_3 \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda$, должно быть выполнено условие $[\hat{W}_3, \hat{H}_2] \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda$. Это условие равносильно тому, что $\hat{W}_3 \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda$.

Обозначим $e^{\text{ad}_{\hat{W}_3}} \hat{H}$ через $\hat{H}$, а $\lim_{m \rightarrow \infty} e^{\text{ad}_{\hat{W}_{m+1}}} \dots e^{\text{ad}_{\hat{W}_4}}$ через $\hat{\mathcal{A}}$ и проведем те же самые рассуждения. Получаем $\hat{W}_4 \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda$. Продолжая эту процедуру, получаем доказательство нашей импликации. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\hat{H} = \hat{H}_2 + O_3(\hat{p}, \hat{x})$, где $\hat{H}_2$ задается в (11). Пусть $\hat{\mathcal{B}}_1, \hat{\mathcal{B}}_2 \in \text{Aut } \hat{\mathbb{H}}$ – близкие к тождественному нормализующие автоморфизмы, т.е. такие, что $\hat{\mathcal{B}}_1 \hat{H}, \hat{\mathcal{B}}_2 \hat{H} \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda$. Тогда $\hat{\mathcal{B}}_1 = \hat{\mathcal{A}} \hat{\mathcal{B}}_2$, где $\hat{\mathcal{A}} \in \text{Aut } \hat{\mathbb{H}}$ имеет вид (22).

Если вектор частот λ нерезонансный, то $\hat{\mathcal{B}}_1 \hat{H} = \hat{\mathcal{B}}_2 \hat{H}$, и

$$\hat{\mathcal{A}} = e^{\text{ad}_{\hat{W}}}, \quad \hat{W} = O_3(\hat{p}, \hat{x}), \quad \hat{W} \in \hat{\mathbb{N}}_\lambda. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение получается применением теоремы 4 для $\hat{\mathcal{B}}_2 \hat{\mathcal{B}}_1^{-1}$. Если λ – нерезонансный вектор, то $\hat{\mathbb{N}}_\lambda$ – коммутативная подалгебра. Следовательно, автоморфизм, определенный формулой (22), действует тождественно на $\hat{\mathbb{N}}_\lambda$. Представление (23) следует из того, что $e^{\text{ad}_{\hat{U}}} e^{\text{ad}_{\hat{V}}} = e^{\text{ad}_{\hat{U} + \hat{V}}}$, если $[\hat{U}, \hat{V}] = 0$.

Итак, преобразование, нормализующее данную наблюдаемую, единственно с точностью до композиции с отображением вида (22). Сам вид нормальной формы единствен только в нерезонансном случае. Если вектор частот резонансный, то нормальная форма определена с точностью до применения отображения (22).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство предложения 3

Идею этого доказательства автору сообщил Д. В. Трещев. Заметим, что нижний индекс наблюдаемых здесь вовсе не обозначает степень однородной формы.

Ясно, что существует наблюдаемая $\hat{W}_1 \in \hat{\mathbb{H}}$ такая, что $\text{ad}_{\hat{p}_1} \hat{W}_1 = -\hat{P}_1$. Положим $\hat{P}_j^{(1)} = \hat{P}_j + \text{ad}_{\hat{p}_j} \hat{W}_1$, $\hat{X}_j^{(1)} = \hat{X}_j + \text{ad}_{\hat{x}_j} \hat{W}_1$. Тогда $\hat{P}_1^{(1)} = 0$. Кроме того,

$$\text{ad}_{\hat{p}_1} \hat{P}_j^{(1)} = \text{ad}_{\hat{p}_1} \hat{P}_j + \text{ad}_{\hat{p}_1} \text{ad}_{\hat{p}_j} \hat{W}_1 = \text{ad}_{\hat{p}_1} \hat{P}_j + \text{ad}_{\hat{p}_j} \text{ad}_{\hat{p}_1} \hat{W}_1 = \text{ad}_{\hat{p}_1} \hat{P}_j - \text{ad}_{\hat{p}_j} \hat{P}_1 = 0.$$

В последнем равенстве мы воспользовались условием (9). Аналогично, используя (9), а также равенство $\text{ad}_{\hat{p}_j} \text{ad}_{\hat{x}_k} = \text{ad}_{\hat{x}_k} \text{ad}_{\hat{p}_j}$, мы получаем $\text{ad}_{\hat{p}_1} \hat{X}_j^{(1)} = 0$. Говоря неформально, это означает, что зависимость $\hat{P}_j^{(1)}$ и $\hat{X}_j^{(1)}$ от $\hat{x}_1$ есть зависимость только от $\mathbf{r} = \hat{p}_1 \circ \hat{x}_1 - \hat{x}_1 \circ \hat{p}_1$.

Далее, возьмем такую наблюдаемую $\widehat{W}_2$, что выполнено соотношение

$$\text{ad}_{\hat{p}_2} \widehat{W}_2 = -\widehat{P}_2^{(1)}, \quad (24)$$

и положим

$$\widehat{P}_j^{(2)} = \widehat{P}_j^{(1)} + \text{ad}_{\hat{p}_j} \widehat{W}_2, \quad \widehat{X}_j^{(2)} = \widehat{X}_j^{(1)} + \text{ad}_{\hat{x}_j} \widehat{W}_2.$$

Тогда

$$\text{ad}_{\hat{p}_2} \widehat{P}_j^{(2)} = \text{ad}_{\hat{p}_2} \widehat{P}_j^{(1)} + \text{ad}_{\hat{p}_2} \text{ad}_{\hat{p}_j} \widehat{W}_2 = \text{ad}_{\hat{p}_2} \widehat{P}_j^{(1)} - \text{ad}_{\hat{p}_j} \widehat{P}_2^{(1)} = \text{ad}_{\hat{p}_2} \widehat{P}_j - \text{ad}_{\hat{p}_j} \widehat{P}_2 = 0.$$

Аналогично, $\text{ad}_{\hat{p}_2} \widehat{X}_j^{(2)} = 0$.

Теперь покажем, что

$$\text{ad}_{\hat{p}_1} \widehat{P}_j^{(2)} = \text{ad}_{\hat{p}_1} \widehat{X}_j^{(2)} = 0. \quad (25)$$

Действительно,

$$\text{ad}_{\hat{p}_1} \widehat{P}_j^{(2)} = \text{ad}_{\hat{p}_1} \widehat{P}_j^{(1)} + \text{ad}_{\hat{p}_1} \text{ad}_{\hat{p}_j} \widehat{W}_2 = \text{ad}_{\hat{p}_j} \text{ad}_{\hat{p}_1} \widehat{W}_2.$$

Аналогично, $\text{ad}_{\hat{p}_1} \widehat{X}_j^{(2)} = \text{ad}_{\hat{x}_j} \text{ad}_{\hat{p}_1} \widehat{W}_2$. Для того чтобы выполнялось равенство (25), достаточно выбрать $\widehat{W}_2$, удовлетворяющее (24), так, чтобы $\text{ad}_{\hat{p}_1} \widehat{W}_2 = 0$. Иначе говоря, пользуясь тем, что в формуле (24) $\widehat{P}_1^{(2)}$ не зависит от $\hat{x}_1$, мы выбираем $\widehat{W}_2$ также не зависящим от $\hat{x}_1$.

Будем использовать разложение наблюдаемых по степеням $\mathbf{r}$. Пусть $\widehat{W}_2 = \sum C_{l,\mu,\nu} \mathbf{r}^l \circ \hat{p}^\mu \circ \hat{x}^\nu$. Ясно, что $\text{ad}_{\hat{p}_j} \widehat{W}_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $C_{l,\mu,\nu} = 0$ для $\nu_j \neq 0$. Положим $\widehat{W}_2' = \sum_{\nu_2 \neq 0} C_{l,\mu,\nu} \mathbf{r}^l \circ \hat{p}^\mu \circ \hat{x}^\nu$. Тогда

$$-\widehat{P}_2^{(1)} = \text{ad}_{\hat{p}_2} \widehat{W}_2 = \text{ad}_{\hat{p}_2} \widehat{W}_2' = \sum \nu_2 C_{l,\mu,\nu} \mathbf{r}^l \circ \hat{p}^\mu \circ \hat{x}^\nu.$$

Поскольку $\text{ad}_{\hat{p}_1} \widehat{P}_2^{(1)} = 0$, то $C_{l,\mu,\nu} = 0$, если $\nu_1 \neq 0$. Следовательно, $\text{ad}_{\hat{p}_1} \widehat{W}_2' = 0$.

Для упрощения записи наблюдаемую $\widehat{W}_2'$ будем обозначать по-прежнему через $\widehat{W}_2$. Тогда $\text{ad}_{\hat{p}_1} \widehat{P}_j^{(2)} = \text{ad}_{\hat{p}_2} \widehat{P}_j^{(2)} = \text{ad}_{\hat{p}_1} \widehat{X}_j^{(2)} = \text{ad}_{\hat{p}_2} \widehat{X}_j^{(2)} = 0$.

Аналогичным образом строим $\widehat{P}_j^{(k)}$, $\widehat{X}_j^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$, так, чтобы

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\hat{p}_1} \widehat{P}_j^{(k)} &= \text{ad}_{\hat{p}_2} \widehat{P}_j^{(k)} = \dots = \text{ad}_{\hat{p}_k} \widehat{P}_j^{(k)} = 0, \\ \text{ad}_{\hat{p}_1} \widehat{X}_j^{(k)} &= \text{ad}_{\hat{p}_2} \widehat{X}_j^{(k)} = \dots = \text{ad}_{\hat{p}_k} \widehat{X}_j^{(k)} = 0. \end{aligned}$$

Затем построим $\widehat{P}_j^{(k)}$, $\widehat{X}_j^{(k)}$, $k = n+1, \dots, 2n$, так, чтобы

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\hat{p}_l} \widehat{P}_j^{(k)} &= \text{ad}_{\hat{p}_l} \widehat{X}_j^{(k)} = 0, \quad l = 1, \dots, n, \\ \text{ad}_{\hat{x}_1} \widehat{P}_j^{(k)} &= \text{ad}_{\hat{x}_2} \widehat{P}_j^{(k)} = \dots = \text{ad}_{\hat{x}_{k-n}} \widehat{P}_j^{(k)} = 0, \\ \text{ad}_{\hat{x}_1} \widehat{X}_j^{(k)} &= \text{ad}_{\hat{x}_2} \widehat{X}_j^{(k)} = \dots = \text{ad}_{\hat{x}_k} \widehat{X}_j^{(k)} = 0. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\widehat{P}_j^{(2n)} = \widehat{P}_j + \text{ad}_{\hat{p}_j} \widehat{W}, \quad \widehat{X}_j^{(2n)} = \widehat{X}_j + \text{ad}_{\hat{x}_j} \widehat{W},$$

где $\widehat{W} = \widehat{W}_1 + \dots + \widehat{W}_{2n}$, причем

$$\mathrm{ad}_{\widehat{P}_k} \widehat{P}_j^{(2n)} = \mathrm{ad}_{\widehat{x}_k} \widehat{P}_j^{(2n)} = \mathrm{ad}_{\widehat{P}_k} \widehat{G}_j^{(2n)} = \mathrm{ad}_{\widehat{x}_k} \widehat{X}_j^{(2n)} = 0.$$

Таким образом,

$$\widehat{P}_j - \mathrm{ad}_{\widehat{W}} \widehat{P}_j = \widehat{\xi}_j, \quad \widehat{X}_j - \mathrm{ad}_{\widehat{W}} \widehat{x}_j = \widehat{\eta}_j, \quad \widehat{\xi}_j, \widehat{\eta}_k \in \widehat{J}_0.$$

Положив $\widehat{W}_0 = \sum_{j=1}^n \widehat{x}_j \circ \widehat{\xi}_j - \sum_{j=1}^n \widehat{P}_j \circ \widehat{\eta}_j$, получаем

$$\widehat{P}_j = \mathrm{ad}_{\widehat{W} - \widehat{W}_0} \widehat{P}_j, \quad \widehat{X}_j = \mathrm{ad}_{\widehat{W} - \widehat{W}_0} \widehat{x}_j.$$

Предложение доказано.

Благодарности. Автор выражает благодарность Д. В. Трещеву за полезные дискуссии, внимание к работе и идею доказательства предложения 3. Работа была выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00681) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-691.2008.1).

Список литературы

- [1] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Гостехиздат, М., 1941.
- [2] Т. М. Cherry, *Proc. London Math. Soc.*, **27**:2 (1927), 151–170.
- [3] J. Moser, *Comm. Pure Appl. Math.*, **9**:4 (1956), 673–692.
- [4] А. Д. Брюно, *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1979.
- [5] Д. Трещёв, *Тр. МИАН*, **250** (2005), 226–261.
- [6] Д. В. Трещёв, *Тр. МИАН*, **259** (2007), 203–242.
- [7] Ю. В. Егоров, *УМН*, **24**:5(149) (1969), 235–236.
- [8] J. J. Duistermaat, L. Hörmander, *Acta Math.*, **128**:1 (1972), 183–269.
- [9] L. Hörmander, *Acta Math.*, **127**:1 (1971), 79–183.
- [10] J. Bellissard, M. Vittot, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **52**:3 (1990), 175–235.
- [11] J. Sjöstrand, *Asymptotic Anal.*, **6**:1 (1992), 29–43.
- [12] C. Gérard, J. Sjöstrand, *Comm. Math. Phys.*, **108**:3 (1987), 391–421.
- [13] J. Sjöstrand, *Asymptotic Anal.*, **36**:2 (2003), 93–113.
- [14] N. Kaidi, P. Kerdelhure, *Asymptot. Anal.*, **23**:1 (2000), 1–21.
- [15] A. Iantchenko, J. Sjöstrand, *Amer. J. Math.*, **124**:4 (2002), 817–850.
- [16] A. Anikin, *Regul. Chaotic Dyn.*, **13**:5 (2008), 377–402.
- [17] M. Karasev, “Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances”, *Quantum Algebras and Poisson Geometry in Mathematical Physics*, AMS Transl. Ser. 2, **216**, ed. M. V. Karasev, AMS, Providence, RI, 2005, 1–17; *Adv. Stud. Contemp. Math.*, **11** (2005), 33–56; *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:2 (2006), 131–150.
- [18] М. В. Карасев, В. П. Маслов, *УМН*, **39**:6(240) (1984), 115–173.

Поступила в редакцию 15.10.2008