Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 3, 507–516

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6412>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:18:00

© 2009 г.

У. А. Розиков*, М. М. Рахматуллаев†

СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ И МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ИЗИНГА С КОНКУРИРУЮЩИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Введено понятие слабо периодической конфигурации. Для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями описано множество всех слабо периодических основных состояний, соответствующих нормальным делителям индексов 2 и 4 группового представления дерева Кэли. Кроме того, изучены новые меры Гиббса для модели Изинга.

Ключевые слова: дерево Кэли, мера Гиббса, модель Изинга, слабо периодические основные состояния.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что фазовая диаграмма мер Гиббса для гамильтониана близка к фазовой диаграмме основных изолированных (устойчивых) состояний этого гамильтониана. При низких температурах периодическому основному состоянию соответствует периодическая мера Гиббса [1], [2]. В работе [3] введено понятие слабо периодической меры Гиббса и для модели Изинга описано множество таких мер. Поэтому возникает задача описания слабо периодических основных состояний. В настоящей работе мы вводим понятие слабо периодического основного состояния и описываем множества таких состояний для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями (см. гамильтониан (2) ниже). Эта модель исследована на физическом уровне в работе [4], где при конкретных значениях параметров дана фазовая диаграмма состояний системы. В работе [5] решена задача описания трансляционно-инвариантных мер Гиббса. Результаты работы [6] позволяют явно выписать область параметров модели (2), где существуют периодические меры Гиббса. В работе [7] для модели (2) описаны все периодические и некоторое множество непериодических основных состояний, а также с помощью контурного метода

*Институт математики и информационных технологий АНРУз, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: rozikovu@yandex.ru

†Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан.
E-mail: mrahmatullaev@rambler.ru

доказано, что при достаточно низких температурах существуют две меры Гиббса, соответствующие трансляционно-инвариантным граничным условиям.

Настоящая работа посвящена описанию слабо периодических основных состояний и меры Гиббса для модели (2).

Структура работы следующая. В разделе 2 даются необходимые определения и постановка задачи, а также приведены необходимые сведения из работы [7]. Раздел 3 посвящен описанию слабо периодических основных состояний. Каждой слабо периодической конфигурации соответствует квадратная матрица $\mathcal{B}$. Мы сводим задачу описания слабо периодических основных состояний к решению системы линейных уравнений, где в качестве неизвестных участвуют элементы матрицы $\mathcal{B}$. В п. 3.1 изучаются слабо периодические основные состояния, соответствующие произвольным нормальным делителям индекса 2, а в п. 3.2 рассматривается одно семейство нормальных делителей индекса 4 и описываются соответствующие основные состояния. В разделе 4 даны новые слабо периодические меры Гиббса для модели Изинга, что существенно улучшает результат работы [3]. В разделе 5 мы обсуждаем полученные результаты.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Дерево Кэли. Пусть $\tau^k = (V, L)$, $k \geq 1$, есть дерево Кэли порядка k , т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходят равно $k + 1$ ребер, где V – множество вершин, L – множество ребер τ^k . Известно, что τ^k можно представить как G_k – свободное произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$. Поэтому вместо V можно рассмотреть G_k . Для произвольной точки $x^0 \in G_k$ положим

$$W_n = \{x \in G_k : d(x^0, x) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m, \quad L_n = \{\langle x, y \rangle \in L : x, y \in V_n\}, \quad (1)$$

где $d(x, y)$ – расстояние между x и y на дереве Кэли, т.е. число ребер пути, соединяющего x и y .

Пусть $S(x)$ – множество прямых потомков точки x : если $x \in W_n$, то $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$. Заметим, что для любого $x \in G_k$ множество $\{y \in G_k : d(x, y) = 1\} \setminus S(x)$ имеет единственный элемент, который обозначим через $x_\downarrow$.

2.2. Пространство конфигураций. Пусть $\Phi = \{-1, 1\}$, а $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ – конфигурация, т.е. $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$. Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A , принимающих значения из Φ .

Предположим, что на Ω действует группа пространственных переходов. Определим F_k -периодическую конфигурацию как конфигурацию $\sigma(x)$, которая является инвариантной относительно подгруппы $F_k \subset G_k$ конечного индекса, т.е. $\sigma(yx) = \sigma(x) \forall x \in G_k, y \in F_k$. Для данной периодической конфигурации индекс подгруппы называется *периодом конфигурации*, а конфигурация, которая является инвариантной относительно всех переходов, называется *трансляционно-инвариантной*.

Пусть $G_k/F_k = \{H_1, \dots, H_r\}$ – фактор-группа, где F_k – нормальный делитель индекса $r \geq 1$. Конфигурацию $\sigma(x)$ назовем F_k -слабо периодической, если $\sigma(x) = a_{ij}$ для всех $x_1 \in H_i$, $x \in H_j$, где $a_{ij} \in \Phi$, $i, j = 1, \dots, r$.

2.3. Модель с конкурирующими взаимодействиями. Приведем необходимые определения и результаты из работы [7]. Рассмотрим гамильтониан модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями:

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x, y \rangle} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{x, y \in V: d(x, y)=2} \sigma(x)\sigma(y), \quad (2)$$

где $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \Omega$. Обозначим

$$H(\sigma, \varphi) = J_1 \sum_{\langle x, y \rangle} (\sigma(x)\sigma(y) - \varphi(x)\varphi(y)) + J_2 \sum_{x, y \in V: d(x, y)=2} (\sigma(x)\sigma(y) - \varphi(x)\varphi(y)), \quad (3)$$

где $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$.

Пусть M – множество единичных шаров в V , σ_b – сужение конфигурации σ на шаре $b \in M$. Энергия конфигурации σ_b определяется как

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\langle x, y \rangle, x, y \in b} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{x, y \in b: d(x, y)=2} \sigma(x)\sigma(y), \quad (4)$$

где $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$. Конфигурации σ_b и σ'_b принадлежат одному и тому же классу (эквивалентны: $\sigma'_b \sim \sigma_b$), если $U(\sigma_b) = U(\sigma'_b)$.

Обозначим через $|A|$ число элементов множества A .

ЛЕММА [7]. 1. $U(\sigma_b) \in \{U_0, U_1, \dots, U_{k+1}\}$ при всех σ_b , где

$$U_i = \left(\frac{k+1}{2} - i \right) J_1 + \left[\frac{k(k+1)}{2} + 2i(i-k-1) \right] J_2, \quad i = 0, 1, \dots, k+1. \quad (5)$$

2. Пусть $\mathcal{C}_i = \Omega_i \cup \Omega_i^-, i = 0, \dots, k+1$, где

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \{\sigma_b: \sigma_b(c_b) = +1, |\{x \in b \setminus \{c_b\}: \sigma_b(x) = -1\}| = i\}, \\ \Omega_i^- &= \{-\sigma_b = \{-\sigma_b(x), x \in b\}: \sigma_b \in \Omega_i\}, \end{aligned}$$

c_b – центр шара b . Тогда $U(\sigma_b) = U_i$ при всех $\sigma_b \in \mathcal{C}_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конфигурация φ называется *основным состоянием* для гамильтониана H , если

$$U(\varphi_b) = \min\{U_0, U_1, \dots, U_{k+1}\} \quad \text{для всех } b \in M. \quad (6)$$

Пусть $U_i(J) = U(\sigma_b, J)$ при $\sigma_b \in \mathcal{C}_i$, $i = 0, 1, \dots, k+1$. Для фиксированного $m = 0, 1, \dots, k+1$ обозначим

$$A_m = \{J \in \mathbb{R}^2: U_m(J) = \min\{U_0(J), U_1(J), \dots, U_{k+1}(J)\}\}. \quad (7)$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} A_0 &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \leq 0, J_1 + 2kJ_2 \leq 0\}, \\ A_m &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_2 \geq 0, 2(2m - k - 2)J_2 \leq J_1 \leq 2(2m - k)J_2\}, \quad m = 1, 2, \dots, k, \\ A_{k+1} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \geq 0, J_1 - 2kJ_2 \geq 0\} \end{aligned}$$

и $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=0}^{k+1} A_i$. Для любых $A_i, A_j, i \neq j$, имеем

$$A_i \cap A_j = \begin{cases} \{J: J_1 = 2(2i - k)J_2, J_2 \geq 0\}, & j = i + 1, \quad i = 0, 1, \dots, k, \\ (0, 0), & 1 < |i - j| < k + 1, \\ \{J: J_1 = 0, J_2 \leq 0\}, & |i - j| = k + 1. \end{cases} \quad (8)$$

Пусть

$$\begin{aligned} B &= A_0 \cap A_{k+1}, \quad B_i = A_i \cap A_{i+1}, \quad i = 0, \dots, k, \\ \tilde{A}_0 &= A_0 \setminus (B \cup B_0), \quad \tilde{A}_{k+1} = A_{k+1} \setminus (B \cup B_k), \\ \tilde{A}_i &= A_i \setminus (B_{i-1} \cup B_i), \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Обозначим через $\text{GS}(H)$ множество всех основных состояний для гамильтониана H (см. (3)). Для $\sigma = \{\sigma(x), x \in V\} \in \Omega$ введем обозначение $\bar{\sigma} = -\sigma = \{-\sigma(x), x \in V\}$.

ТЕОРЕМА 1 [7]. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Если $J = (0, 0)$, то $\text{GS}(H) = \Omega$.
2. Если $J \in \tilde{A}_i, i = 0, \dots, k + 1$, то $\text{GS}(H) = \{\sigma^{(i)}, \bar{\sigma}^{(i)}\}$.
3. Если $J \in B_i \setminus \{(0, 0)\}, i = 0, \dots, k$, то $\text{GS}(H) = \{\sigma^{(i)}, \bar{\sigma}^{(i)}, \sigma^{(i+1)}, \bar{\sigma}^{(i+1)}\} \cup S_i$, где S_i содержит по меньшей мере счетное множество непериодических основных состояний.
4. Если $J \in B \setminus \{(0, 0)\}$, то $\text{GS}(H) = \{\sigma^{(0)}, \bar{\sigma}^{(0)}, \sigma^{(k+1)}, \bar{\sigma}^{(k+1)}\}$, где $\sigma^{(i)}, \bar{\sigma}^{(i)}, i = 0, \dots, k + 1$, являются периодическими основными состояниями, для которых $\sigma_b^{(i)}, \bar{\sigma}_b^{(i)} \in \mathcal{C}_i \forall b \in M$, т.е. $\sigma^{(0)}, \bar{\sigma}^{(0)}$ являются трансляционно-инвариантными, а $\sigma^{(i)}, \bar{\sigma}^{(i)}, i = 1, \dots, k + 1$, – периодическими состояниями с периодом 2.

Заметим, что слабо периодические (не совпадающие с периодическими) основные состояния принадлежат множеству S_i . Основная цель настоящей работы – описать в явном виде множество слабо периодических основных состояний.

3. СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Пусть $\mathcal{H}$ – произвольный нормальный делитель конечного индекса $r \geq 2$ и $G_k/\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_r\}$ – фактор-группа.

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{I}(\mathcal{H}) = \{(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2: \exists x \in H_i, \exists y \in H_j \text{ такие, что } d(x, y) = 1\}, \\ \mathcal{I}_i &= \mathcal{I}_i(\mathcal{H}) = \{j \in \{1, \dots, r\}: (i, j) \in \mathcal{I}\}. \end{aligned}$$

Каждой $\mathcal{H}$ -слабо периодической конфигурации σ , т.е.

$$\sigma(x) = a_{ij}, \quad x_{\downarrow} \in H_i, \quad x \in H_j, \quad (i, j) \in \mathcal{I}, \quad (9)$$

сопоставим квадратную матрицу $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\sigma) = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^r$ с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & (i, j) \in \mathcal{I}, \\ 0, & (i, j) \notin \mathcal{I}. \end{cases}$$

Пусть $S_1(x)$ – множество всех ближайших соседей точки x и

$$q_j(x) = |S_1(x) \cap H_j|, \quad j = 1, \dots, r; \quad Q(x) = (q_1(x), \dots, q_r(x)).$$

Заметим, что для любого $x \in G_k$ существует перестановка π_x координат вектора $Q(e)$ такая, что

$$\pi_x Q(e) = Q(x). \quad (10)$$

Следующие теоремы дают условия на элементы матрицы $\mathcal{B}(\sigma)$, при которых σ будет основным состоянием.

ТЕОРЕМА 2. 1. $\mathcal{H}$ -слабо периодическая конфигурация σ является $\mathcal{H}$ -периодической тогда и только тогда, когда матрица $\mathcal{B}(\sigma)$ состоит из одинаковых строк.

2. $\mathcal{H}$ -слабо периодическая конфигурация σ является основным состоянием для гамильтониана H тогда и только тогда, когда найдется $j \in \{0, \dots, k\}$ такое, что $J_1 = 2(2j - k)J_2$, $J_2 \geq 0$, и

$$a_{pm} - a_{nm} + \sum_{s=1}^r q_s(x) a_{ns} = (k - 2j \pm 1) a_{mn}, \quad (11)$$

где $x \in H_n$, $m \in \mathcal{I}_p$, $n \in \mathcal{I}_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Утверждение следует из (9) и определения матрицы $\mathcal{B}$.

2. Условие $J_1 = 2(2j - k)J_2$, $J_2 \geq 0$, следует из п. 3 теоремы 1 и (8). Заметим, что при $J_1 = 2(2j - k)J_2$ конфигурация σ является основным состоянием, если существует $j \in \{0, \dots, k\}$ такое, что $\sigma_b \in \mathcal{C}_j \cup \mathcal{C}_{j+1}$ для всех $b \in M$. Это означает, что для любого x при $\sigma(x) = 1$ (соответственно $\sigma(x) = -1$) конфигурация $\sigma_{S_1(x)}$ содержит либо j (соответственно $k+1-j$), либо $j+1$ (соответственно $k-j$) элементов, равных -1 . Поэтому сумма всех значений $\sigma(y)$, $y \in S_1(x)$, равна $(k - 2j \pm 1)\sigma(x)$, откуда следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Система (11) состоит из линейных уравнений и необходимо найти $a_{ij} \in \{-1, 1\}$. Для нахождения таких решений лучше всего поступить следующим образом: рассмотреть возможные варианты $a_{ij} \in \{-1, 1\}$, $j \in \mathcal{I}_i$ (число вариантов не более чем $2^{|\mathcal{I}|}$), и проверить, какие из них удовлетворяют системе (11), при некотором $j \in \{0, \dots, k\}$. В настоящей работе мы решим систему (11) в случаях нормальных делителей индексов 2 и 4.

3.1. Случай индекса 2. Пусть $H_A = \{x \in G_k : \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{четное число}\}$, $A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$, где $w_j(x)$ – число букв a_j в слове x . Ясно, что H_A является нормальным делителем индекса 2. Пусть $G_k/H_A = \{H_1, H_2\}$ – фактор-группа, $H_1 = H_A$, $H_2 = G_k \setminus H_A$. Тогда H_A -слабо периодическая конфигурация имеет вид

$$\varphi(x) = \pm \begin{cases} a_{11}, & x_{\downarrow} \in H_1, & x \in H_1, \\ a_{12}, & x_{\downarrow} \in H_1, & x \in H_2, \\ a_{21}, & x_{\downarrow} \in H_2, & x \in H_1, \\ a_{22}, & x_{\downarrow} \in H_2, & x \in H_2. \end{cases} \quad (12)$$

Пусть $|A| = i$, тогда система (11) имеет вид

$$\begin{aligned} a_{11} + (k-i)a_{11} + ia_{12} &= (k-2j \pm 1)a_{11}, \\ a_{21} + (k-i)a_{11} + ia_{12} &= (k-2j \pm 1)a_{11}, \\ a_{12} + (k-i+1)a_{11} + (i-1)a_{12} &= (k-2j \pm 1)a_{21}, \\ a_{22} + (k-i+1)a_{11} + (i-1)a_{12} &= (k-2j \pm 1)a_{21}, \\ a_{11} + (k-i)a_{21} + ia_{22} &= (k-2j \pm 1)a_{12}, \\ a_{21} + (k-i)a_{21} + ia_{22} &= (k-2j \pm 1)a_{12}, \\ a_{12} + (k-i+1)a_{21} + (i-1)a_{22} &= (k-2j \pm 1)a_{22}, \\ a_{22} + (k-i+1)a_{21} + (i-1)a_{11} &= (k-2j \pm 1)a_{22}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $i \in \{0, \dots, k+1\}$, $j \in \{0, \dots, k\}$.

Заметим, что вектор $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$ принимает 16 значений. Подставляя координаты этих векторов в систему (13), получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $|A| = i$.

1. Если $i \neq (k+1)/2$, то всякое H_A -слабо периодическое основное состояние является H_A -периодическим или трансляционно-инвариантным, т.е. соответствует одному из векторов $\pm(1, 1, 1, 1)$, $\pm(-1, 1, -1, 1)$.

2. При $i = (k+1)/2$ и $J_1 = 2J_2$, $J_2 \geq 0$, существуют два H_A -слабо периодических (непериодически) основных состояния, которые соответствуют векторам $\pm(1, -1, -1, 1)$.

3.2. Случай индекса 4. Пусть $H_A = \{x \in G_k : \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{четное число}\}$, $A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$ и $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{четное число}\}$, где $|x|$ – длина слова x . Тогда $G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)}$ является нормальным делителем индекса 4. Пусть $G_k/G_k^{(4)} = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ – фактор-группа.

Заметим, что $\mathcal{I}(G_k^{(4)}) = \{(1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2)\}$, поэтому любая $G_k^{(4)}$ -слабо периодическая конфигурация имеет вид

$$\varphi(x) = a_{ij}, \quad \text{если } x_{\downarrow} \in H_i, \quad x \in H_j, \quad (i, j) \in \mathcal{I}(G_k^{(4)}).$$

Таким образом, каждой слабо периодической конфигурации соответствует 8-мерный вектор $(a_{ij}, (i, j) \in \mathcal{I})$. В этом случае легко проверить, что справедлива

ТЕОРЕМА 4. Пусть $|A| = i$.

1. Если $i \neq (k+1)/2$, то каждое $G_k^{(4)}$ -слабо периодическое основное состояние является периодическим или трансляционно-инвариантным.

2. Если $i = (k+1)/2$ и $J_1 = 2J_2$, $J_2 \geq 0$, то существуют четыре $G_k^{(4)}$ -слабо периодических (непериодических) основных состояния $\pm\varphi'$, $\pm\varphi''$, соответствующих векторам $\pm(1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1)$, $\pm(-1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$:

$$\pm\varphi'(x) = \pm \begin{cases} +1, & x_{\downarrow} \in H_2, & x \in H_4, \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_4, & x \in H_2, \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_1, & x \in H_4, \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_4, & x \in H_1, \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_3, & x \in H_2, \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_2, & x \in H_3, \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_1, & x \in H_3, \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_3, & x \in H_1, \end{cases} \quad \pm\varphi''(x) = \pm \begin{cases} -1, & x_{\downarrow} \in H_2, & x \in H_4, \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_4, & x \in H_2, \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_1, & x \in H_4, \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_4, & x \in H_1, \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_3, & x \in H_2, \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_2, & x \in H_3, \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_1, & x \in H_3, \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_3, & x \in H_1. \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если k – четное число, то всякое слабо периодическое основное состояние является периодическим.

В силу (5) и (8) из теорем 3 и 4 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Для основных состояний, построенных в теоремах 3 и 4, энергия этих конфигураций в любом шаре радиуса 1 имеет вид $-(k+1)J_2/2$, $J_2 \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что матрицы конфигураций, построенных в теореме 3, являются симметрическими либо кососимметрическими. Матрица $\mathcal{B}(\varphi')$ также является симметрической, а матрица $\mathcal{B}(\varphi'')$ – кососимметрической.

Поэтому кажется верной следующая

ГИПОТЕЗА 1. Пусть $\mathcal{H}$ -слабо периодическая конфигурация φ является основным состоянием для гамильтониана (2). Тогда матрица $\mathcal{B}(\varphi)$ является либо симметрической, либо кососимметрической.

Следующий пример показывает, что из симметричности или кососимметричности матрицы $\mathcal{B}(\varphi)$ не следует, что φ – основное состояние.

ПРИМЕР. Рассмотрим

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1, & x_{\downarrow} \in H_2, & x \in H_4, \\ 1, & x_{\downarrow} \in H_4, & x \in H_2, \\ 1, & x_{\downarrow} \in H_1, & x \in H_4, \\ 1, & x_{\downarrow} \in H_4, & x \in H_1, \\ 1, & x_{\downarrow} \in H_3, & x \in H_2, \\ 1, & x_{\downarrow} \in H_2, & x \in H_3, \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_1, & x \in H_3, \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_3, & x \in H_1, \end{cases} \quad \mathcal{B}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathcal{B}(\varphi_0)$ симметрическая, но легко проверить, что φ_0 не является основным состоянием.

Теоремы 3 и 4 также приводят к следующей гипотезе.

ГИПОТЕЗА 2. Пусть $\mathcal{H}$ – произвольный нормальный делитель конечного индекса. $\mathcal{H}$ -слабо периодическая конфигурация φ является основным состоянием для гамильтониана (2) тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathcal{C}_{(k+1)/2} \cup \mathcal{C}_{(k+1)/2+1}$ и $J_1 = 2J_2$, $J_2 \geq 0$.

4. НОВЫЕ СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА

Опишем новые слабо периодические меры Гиббса для модели Изинга (т.е. модель (2) с $J_2 = 0$). Результаты этого раздела дополняют результаты работы [3].

В работе [3] задача описания слабо периодических мер Гиббса в некоторых частных случаях сведена к описанию решений уравнения

$$\pm x = -(k-1)f(x, \theta) + f(kf(x, \theta), \theta), \quad (14)$$

где $f(x, \theta) = \operatorname{arcth}(\theta \operatorname{th} x)$, $\theta = \operatorname{th}(J\beta)$. С помощью леммы 1 работы [3] можно также получить уравнения

$$\pm x = (k-1)f(x, \theta) + f(kf(x, \theta), \theta). \quad (15)$$

Поскольку $f(x, -\theta) = -f(x, \theta)$, уравнения (15) можно свести к уравнениям (14) заменой $\theta = -\theta$. Поэтому решения уравнений (15) получаются из решений (14) при замене θ на $-\theta$.

Следовательно, теорему 2 работы [3] можно дополнить новыми решениями и получить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\alpha = (1 - \theta)/(1 + \theta)$. При $k = 4$ существуют критические значения $\alpha_{\text{cr}} (\approx 0.152)$ и $\alpha_c = 3/5$ такие, что:

- 1) при $\alpha \in [0, \alpha_{\text{cr}}) \cup (\alpha_{\text{cr}}^{-1}, +\infty)$ существуют семь слабо периодических мер Гиббса;
- 2) при $\alpha = \alpha_{\text{cr}}, \alpha_{\text{cr}}^{-1}$ существуют пять слабо периодических мер Гиббса;
- 3) при $\alpha \in (\alpha_{\text{cr}}, \alpha_c) \cup (\alpha_c^{-1}, \alpha_{\text{cr}}^{-1})$ существуют три слабо периодические меры Гиббса;
- 4) при $\alpha \in [\alpha_c, \alpha_c^{-1}]$ существует одна слабо периодическая мера Гиббса.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. 1. В теореме 5 во всех случаях одна из слабо периодических мер является трансляционно-инвариантной, что соответствует решению $x = 0$ уравнений (14), (15). Все остальные меры являются $H_{\{1\}} \cap G_4^{(2)}$ -слабо периодическими.

2. Из $\alpha_c = (1 - \theta_c)/(1 + \theta_c) = 3/5$ получаем критическое значение θ_c фазового перехода для модели Изинга, т.е. $|\theta_c| = 1/k$ при $k = 4$ (см., например, [8]).

3. Пять мер Гиббса из семи, упомянутых в п. 1 теоремы 5, соответствуют устойчивым решениям уравнений (14), (15). Поэтому известными методами (см., например, [8]–[10]) можно доказать, что по меньшей мере пять из них являются крайними (неразложимыми).

На основе компьютерных вычислений и теоремы 5 можно сформулировать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 3. 1. Для модели Изинга на дереве Кэли порядка $k \geq 4$ утверждения теоремы 5 выполняются с критическими значениями $\alpha_{\text{cr}} = \alpha_{\text{cr}}(k)$ и $\alpha_c = (k-1)/(k+1)$.

2. Для α_{cr} справедлива оценка $\alpha_{\text{cr}} = (1 - \theta_{\text{cr}})/(1 + \theta_{\text{cr}}) < (\sqrt{k} - 1)/(\sqrt{k} + 1)$, т.е. $|\theta_{\text{cr}}| < |\theta_c^{\text{SG}}| = 1/\sqrt{k}$, где θ_c^{SG} есть критическое значение для модели спинового стекла и второе критическое значение модели Изинга, ниже которого мера, соответствующая $x = 0$, будет крайней (см. [11], [12]).

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Существует два подхода к описанию мер Гиббса на дереве Кэли. Первый подход, основанный на теории марковских случайных полей, дает возможность описать множество специальных мер Гиббса, которые в работах [8], [13] называются марковскими цепями, в работах [14], [15] – законами входа (entrance laws), в работе [9] – граничными законами (boundary laws) и в работе [16] – расщеплениями (splitting) меры Гиббса. Второй подход, основанный на контурном методе, дает меры Гиббса, соответствующие некоторым граничным условиям (основным состояниям) [7], [17]. В общем случае неясна связь между мерами, построенными с помощью этих двух подходов. Для модели Изинга такая связь описана в работе [10].

Результаты настоящей работы показывают, что слабо периодические основные состояния для модели (2) существуют только при $J_1 = 2J_2$. Следовательно, при $J_2 = 0$, т.е. для обычной модели Изинга (при $J_1 \neq 0$), не существует слабо периодических основных состояний. Поэтому неясно, каким граничным конфигурациям соответствуют слабо периодические меры, описанные в теореме 5.

Задача описания слабо периодических мер Гиббса для модели (2) (при $J_2 \neq 0$) является достаточно сложной. Дело в том, что при решении этой проблемы надо решать в классе слабо периодических функций систему функциональных уравнений (4) из работы [6], что является весьма сложной задачей. С другой стороны, результаты раздела 3 могут быть полезными для описания слабо периодических мер Гиббса модели (2) ($J_2 \neq 0$) с применением контурного метода.

Благодарности. У. А. Розиков благодарит The Abdus Salam International Center for Theoretical Physics (ICTP) (Triest, Italy) за финансовую поддержку пребывания в ICTP (июнь–август 2008 г.), а также благодарит С. Альбеверио за финансовую поддержку во время пребывания в University of Bonn (Germany) (август 2008 г.) и за полезные дискуссии.

Список литературы

- [1] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [2] R. A. Minlos, *Introduction to Mathematical Statistical Physics*, Univ. Lecture Ser., 19, AMS, Providence, RI, 2000.
- [3] У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *ТМФ*, **156**:2 (2008), 292–302.
- [4] S. Katsura, M. Takizawa, *Progr. Theoret. Phys.*, **51**:1 (1974), 82–98.

- [5] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *Узб. матем. журн.*, **2** (1995), 36–47.
- [6] Х. А. Назаров, У. А. Розиков, *ТМФ*, **135**:3 (2003), 515–523.
- [7] U. A. Rozikov, *J. Statist. Phys.*, **122**:2 (2006), 217–235.
- [8] C. J. Preston, *Gibbs States on Countable Sets*, Cambridge Tracts Math., **68**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.
- [9] H.-O. Georgii, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, de Gruyter Stud. Math., **9**, Walter de Gruyter, Berlin, 1988.
- [10] Y. Higuchi, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **13**:2 (1977), 335–348.
- [11] P. M. Bleher, J. Ruiz, V. A. Zagrebnov, *J. Statist. Phys.*, **79**:1–2 (1995), 473–482.
- [12] D. Ioffe, *Lett. Math. Phys.*, **37**:2 (1996), 137–143.
- [13] F. Spitzer, *Ann. Probab.*, **3**:3 (1975), 387–398.
- [14] S. Zachary, *Ann. Probab.*, **11**:4 (1983), 894–903.
- [15] S. Zachary, *Stochastic Process. Appl.*, **20**:2 (1985), 247–256.
- [16] U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **9**:3 (2006), 471–488.
- [17] U. A. Rozikov, *J. Statist. Phys.*, **130**:4 (2008), 801–813.

Поступила в редакцию 6.08.2008