Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Шунь-Лун Ло, Вэй Сунь, Сепарабельность и запутывание в состояниях систем из трех частей, *ТМФ*, 2009, том 160, номер 3, 534–544

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6414>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:03:00

© 2009 г.

Шунь-Лун Ло*, Вэй Сунь†

СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ И ЗАПУТЫВАНИЕ В СОСТОЯНИЯХ СИСТЕМ ИЗ ТРЕХ ЧАСТЕЙ

В то время как классические корреляции можно свободно распределять между несколькими системами, в отношении запутывания и квантовых корреляций это не так. Если квантовая система S^a запутана с другой квантовой системой S^b , то ее запутывание с любой третьей квантовой системой S^c не может быть произвольным. В этом состоит свойство моногамности эффекта запутывания. В этом общем утверждении неявно содержится правдоподобное предположение о том, что только запутывание между системами S^a и S^b налагает связи на запутывание между системой S^a и третьей системой S^c . Показано, что даже классические корреляции между системами S^a и S^b могут налагать неожиданно строгие ограничения на возможное запутывание между системами S^a и S^c . В частности, идеальные классические корреляции и полное запутывание для систем, состоящих из двух частей, не могут сосуществовать ни в какой системе, состоящей из трех частей. Интуитивное объяснение причин такой моногамности в случае смеси классических и квантовых корреляций может заключаться в том, что система S^a имеет определенную способность к корреляции, которую нельзя использовать для установления запутывания с третьей системой (но можно использовать для установления классических корреляций), если она исчерпывается при корреляции с системой S^b (классической или квантовой). Это можно интерпретировать как альтернативный вариант свойства моногамности.

Ключевые слова: корреляции, классические состояния, состояния систем из трех частей, запутывание, сепарабельность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Корреляции остаются постоянным предметом исследований в активно развивающейся в последнее время области квантовой теории информации [1]. Общее характеристическое свойство квантовой информации, существенно отличающее ее от классической информации, состоит в том, что первая подчиняется нескольким запрещающим теоремам, таким как теоремы о невозможности клонирования [2]–[5],

*Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, People's Republic of China. E-mail: luosl@amt.ac.cn

†Department of Mathematics and Statistics, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada

невозможности удаления [6], невозможности распространения [7], [8], невозможности сигнализации [9], [10], а также теоремы о моногамности [11]–[15].

Как показали многие авторы [11]–[15], так называемая моногамность запутывания представляет собой следующее явление: факт запутывания квантовой системы с другой налагает ограничения на способность системы к запутыванию с третьей системой. Таким образом, поддерживается своеобразный баланс обмена между запутыванием для различных квантовых систем, состоящих из двух частей и имеющих общую часть. Совсем другая ситуация в случае классических корреляций, которые можно свободно распределять на много систем. Имея это в виду, можно поддаться искушению и предположить, что если две квантовые системы коррелированы только классически, то одна из них могла бы находиться в произвольном запутывании с третьей системой, аналогично тому, как это в общем случае позволено для систем, состоящих из двух частей. Мы покажем, что это иллюзия. Конкретно мы рассмотрим следующий вопрос. Предположим, что квантовая система S^a коррелирована с квантовой системой S^b только классически. Ограничивают ли тогда хоть как-то эти корреляции запутывание между системой S^a и некоторой третьей квантовой системой S^c ? Как мы увидим, запутывание между системами S^a и S^c даже может оказаться запрещенным в силу некоторых классических корреляций между S^a и S^b .

Для решения сформулированной выше проблемы в разделе 2 тщательно определены понятия классических корреляций и запутывания. Основной результат, который заключается в том, что некоторый тип классических корреляций между двумя системами запрещает их возможное запутывание с третьей квантовой системой, установлен в разделе 3. Кроме того, мы даем характеризацию сепарабельных состояний в терминах идеально коррелированных классических состояний, что играет определяющую роль в нашем подходе. Наконец, в разделе 4 приведены некоторые замечания. Чтобы исключить сложности технического плана, мы рассматриваем только конечные размерности.

2. СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ, КЛАССИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ И БЛИЗНЕЦОВЫЕ СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим составную квантовую систему $S^a \otimes S^b$, состоящую из двух подсистем S^a и S^b . Ее состояние ρ^{ab} называется сепарабельным, если его можно представить в виде

$$\rho^{ab} = \sum_i p_i \rho_i^a \otimes \rho_i^b \quad (1)$$

для некоторого вероятностного распределения $\{p_i\}$ и локальных состояний $\{\rho_i^a\}$ для части a и локальных состояний $\{\rho_i^b\}$ для части b . В противном случае состояние называется запутанным [16]. Такой формализм, соотносящий сепарабельность и запутывание, является прототипом для многих исследований в области квантовой теории информации и служит отправной точкой в настоящей работе. Однако этот исключительно важный и концептуально ясный формализм имеет печальную славу из-за сложностей, возникающих при работе с ним, связанных с неединственностью представления (1). Например, за исключением некоторых специальных случаев, как

правило, не представляется возможным определить, является ли состояние общего вида для системы, состоящей из двух частей, сепарабельным [17].

Нам потребуется еще одно, связанное с предыдущим, но отличное от него понятие, играющее ключевую роль в установлении нашего основного результата. Состояние ρ^{ab} системы, состоящей из двух частей, называется классическим (относительно корреляций), если существуют локальные фон-неймановские измерения $\{\Pi_i^a\}$ и $\{\Pi_j^b\}$, выражаемые полными одномерными ортогональными проекциями для частей a и b , при которых состояние ρ^{ab} инвариантно при совместном измерении $\Pi = \{\Pi_i^a \otimes \Pi_j^b\}$ в том смысле, что

$$\rho^{ab} = \Pi(\rho^{ab}),$$

где состояние $\Pi(\rho^{ab})$ после измерения определяется как

$$\Pi(\rho^{ab}) := \sum_{i,j} \Pi_i^a \otimes \Pi_j^b \rho^{ab} \Pi_i^a \otimes \Pi_j^b.$$

В противном случае состояние ρ^{ab} является истинно квантовым (относительно корреляций). Такая классификация корреляций для состоящих из двух частей систем, в отличие от стандартной парадигмы, соотносящей сепарабельность и запутывание, ухватывает интуитивную идею о том, что для классического объекта измерение можно произвести так, что оно не изменит объект, тогда как для квантового объекта измерение обычно приводит к изменению рассматриваемого объекта, кроме случаев, когда объект оказывается классическим [18].

Замечательный факт состоит в том, что измерения, участвующие в приведенном выше определении, являются, по существу, единственными. Пусть спектральные разложения маргинальных состояний $\rho^a := \text{tr}_b \rho^{ab}$ (частичный след) и $\rho^b := \text{tr}_a \rho^{ab}$ имеют вид $\rho^a = \sum_i p_i^a \Pi_i^a$ и $\rho^b = \sum_j p_j^b \Pi_j^b$. Тогда следующие утверждения эквивалентны [18]:

- 1) ρ^{ab} является классическим состоянием;
- 2) ρ^{ab} коммутирует с каждым $\Pi_i^a \otimes \Pi_j^b$;
- 3) ρ^{ab} можно представить как

$$\rho^{ab} = \sum_{i,j} p_{ij} \Pi_i^a \otimes \Pi_j^b \quad (2)$$

для некоторого вероятностного распределения $\{p_{ij}\}$ по двум переменным (некоторые из p_{ij} могут быть равны нулю). Более того, в данных обстоятельствах мы имеем $p_i^a = \sum_j p_{ij}$ и $p_j^b = \sum_i p_{ij}$. Таким образом, ρ^{ab} и классическое вероятностное распределение $\{p_{ij}\}$ по двум переменным можно в действительности отождествить канонически, и при этом ясно, что в классическом состоянии отсутствуют квантовые корреляции. Более того, очевидно, что классическое состояние является сепарабельным, но не наоборот.

Для любого состояния ρ^{ab} в системе из двух частей состояние $\Pi(\rho^{ab})$ после измерения всегда является классическим состоянием для любых полных проективных измерений $\{\Pi_i^a\}$ и $\{\Pi_j^b\}$ (даже если они не являются проекторами на собственные векторы для редуцированных состояний ρ^a). Это конечное состояние возникает

вследствие декогеренции, обусловленной измерением Π . Недавно было показано, что классические состояния являются единственными состояниями, для которых корреляции допускают локальное распространение (broadcast) [8].

Особенно интересным примером классических состояний являются состояния, для которых $p_{ij} = p_i \delta_{ij}$. В этом случае два маргинальных распределения вероятностей идеально коррелированы и мы получаем

$$\rho^{ab} = \sum_i p_i \Pi_i^a \otimes \Pi_i^b. \quad (3)$$

Такое состояние в системе из двух частей можно интуитивно называть классическим близнецовым состоянием, и оно сыграет ключевую роль при получении нашего основного результата. Заметим, что любое чистое состояние, заданное в виде произведения, является классическим близнецовым состоянием, в то время как любое заданное в виде произведения состояние, в котором по крайней мере одно из двух маргинальных состояний смешано, не может быть классическим близнецовым состоянием. Мы покажем, что классическое близнецовое состояние обладает любопытным свойством: хотя составная система $S^a \otimes S^b$ в таком состоянии может быть запутанной с другой системой, ни S^a , ни S^b не может быть запутана ни с какой другой системой.

Аналогичным образом можно также ввести следующее определение: состояние ρ^{ab} является классически-квантовым, если существует полное локальное измерение $\{\Pi_i^a\}$, не возмущающее состояние ρ^{ab} , т.е. $\Pi^a(\rho^{ab}) = \rho^{ab}$. Здесь

$$\Pi^a(\rho^{ab}) := \sum_i \Pi_i^a \otimes \mathbf{1}^b \rho^{ab} \Pi_i^a \otimes \mathbf{1}^b$$

– конечное состояние после измерения $\Pi^a := \{\Pi_i^a \otimes \mathbf{1}^b\}$, а $\mathbf{1}^b$ – единичный оператор для S^b . Очевидно, что класс классически-квантовых состояний включает класс классических состояний и входит в класс сепарабельных состояний. Более того, мы имеем следующие эквивалентные утверждения:

- 1) ρ^{ab} является классически-квантовым состоянием;
- 2) ρ^{ab} коммутирует с каждым $\Pi_i^a \otimes \mathbf{1}^b$ (здесь $\{\Pi_i^a\}$ – одномерные проекторы на собственные состояния для $\rho^a := \text{tr}_b \rho^{ab}$);
- 3) ρ^{ab} можно представить как

$$\rho^{ab} = \sum_i p_i \Pi_i^a \otimes \rho_i^b \quad (4)$$

для некоторого распределения вероятностей $\{p_i\}$ и локальных состояний ρ_i^b для части b .

Некоторые замечательные свойства классически-квантовых состояний заключаются в том, что они удовлетворяют супераддитивности косой информации Вигнера–Янасе–Дайсона [19], а их квантовые диссонансы, введенные в работе [20], обращаются в нуль.

3. СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ, КЛАССИЧНОСТЬ И ЗАПУТЫВАНИЕ

Теперь мы можем сформулировать наш основной результат.

ТЕОРЕМА. Любое сепарабельное состояние ρ^{ab} системы, состоящей из двух частей, $S^a \otimes S^b$, можно расширить до классического близнецового состояния (см. (3)) в том смысле, что существует такое классическое близнецовое состояние ρ^{AB} системы $S^A \otimes S^B := S^a \otimes S^{a'} \otimes S^{b'} \otimes S^b$ (здесь $S^{a'}$ и $S^{b'}$ – две подчиненные системы, а $S^A := S^a \otimes S^{a'}$, $S^B := S^{b'} \otimes S^b$), что $\rho^{ab} = \text{tr}_{a'b'} \rho^{AB}$. Более того, если ρ^{ABc} – произвольное состояние системы из трех частей $S^A \otimes S^B \otimes S^c$ такое, что $\rho^{AB} = \text{tr}_c \rho^{ABc}$, то система S^a не может быть запутана с системой S^c , т.е. состояние $\rho^{ac} := \text{tr}_{a'B} \rho^{ABc}$ является сепарабельным. Аналогично состояние $\rho^{bc} := \text{tr}_{Ab'} \rho^{ABc}$ также является сепарабельным.

На основании сформулированного выше результата можно заключить, что хотя системы S^a и S^b не являются запутанными, любая из них по-прежнему не может быть запутана ни с какой третьей системой S^c , коль скоро состояние ρ^{ab} выводится из классического близнецового состояния, которое, в свою очередь, является маргинальным состоянием, полученным из состоящей из трех частей системы посредством вычисления следа по системе S^c . В частности, если ρ^{ab} само является классическим близнецовым состоянием, то система S^a не может быть запутана ни с какой другой системой S^c , т.е. состояние ρ^{ac} является сепарабельным. Ясно, что и состояние ρ^{bc} также является сепарабельным. Более того, пусть $S(\rho^{ab} | \rho^b) := S(\rho^{ab}) - S(\rho^b)$ – квантовая условная энтропия (здесь $S(\rho^{ab}) = -\text{tr} \rho^{ab} \ln \rho^{ab}$ – квантовая энтропия) [21], [22]. Тогда ясно, что $S(\rho^{ab} | \rho^b) = 0$, когда ρ^{ab} является классическим близнецовым состоянием. С другой стороны, на основании следующей эквивалентной формулировки сильной субаддитивности квантовой энтропии [23]:

$$S(\rho^{ab} | \rho^b) + S(\rho^{ac} | \rho^c) \geq 0,$$

мы заключаем, что $S(\rho^{ac} | \rho^c) \geq 0$. Это неравенство резко контрастирует с тем фактом, что для чисто запутанного состояния условная энтропия всегда отрицательна.

Следует подчеркнуть, что в приведенной выше теореме нельзя избавиться от условия о вложении состояния ρ^{ab} в классическое близнецовое состояние ρ^{AB} , которое, в свою очередь, является маргинальным состоянием ρ^{ABc} системы, состоящей из трех частей. В качестве примера рассмотрим состояние $\rho^{abc} = \rho^{ac} \otimes \rho^b$, когда ρ^{ac} является максимально запутанным состоянием между системами S^a и S^c . Ясно, что состояние $\rho^{ab} = \text{tr}_c \rho^{abc} = \rho^a \otimes \rho^b$ является сепарабельным, однако система S^a запутана с S^c . Важно, что согласно сформулированной выше теореме в этом случае состояние ρ^{abc} не может быть вложено в состояние ρ^{ABc} состоящей из трех частей системы, так что $\rho^{AB} = \text{tr}_c \rho^{ABc}$ является классическим близнецовым состоянием, однако состояние ρ^{ac} является запутанным.

Чтобы продемонстрировать некоторые интуитивные основания теоремы, рассмотрим частный случай, когда ρ^{ab} уже является классическим близнецовым состоянием, определенным в (3). В этом случае квантовая взаимная информация [21], [22]

$$\mathcal{I}(\rho^{ab}) := S(\rho^a) + S(\rho^b) - S(\rho^{ab})$$

оказывается равной $S(\rho^a)$. Таким образом, полный корреляционный ресурс в маргинальном состоянии ρ^a , который количественно выражается посредством величины $S(\rho^a)$, полностью использован в корреляциях между системами S^a и S^b , и, следовательно, разумно полагать, что система S^a не обладает никакой остаточной способностью к корреляциям с другой системой квантово-механическим образом. Однако эта система еще может быть коррелирована с другой системой классически. Например, возьмем в качестве S^b и S^c копии системы S^a и положим

$$\rho^{abc} := \sum_i p_i \Pi_i^a \otimes \Pi_i^b \otimes \Pi_i^c,$$

тогда редуцированные состояния системы из трех частей имеют вид

$$\rho^{ab} = \sum_i p_i \Pi_i^a \otimes \Pi_i^b, \quad \rho^{ac} = \sum_i p_i \Pi_i^a \otimes \Pi_i^c,$$

а система S^a идеально коррелирована как с S^b , так и с S^c . Эти корреляции, конечно, являются классическими.

Формально теорема напоминает свойство моногамии (хотя и довольно сильно отличается от него по своей природе) некоторых состояний систем, состоящих из трех частей: если две системы полностью запутаны в состоянии $|\psi^{ab}\rangle = \sum_i \lambda_i |\psi_i^a\rangle \otimes |\psi_i^b\rangle$ (вид Шмидта), то система S^a не может быть запутана с системой S^c [11]. Здесь S^a и S^b идеально коррелированы как в состоянии $|\psi^{ab}\rangle$, так и в состоянии ρ^{ab} (если ρ^{ab} является классическим близнецовым состоянием), но по принципиально различным причинам: корреляции в состоянии ρ^{ab} являются чисто классическими, в то время как корреляции в $|\psi^{ab}\rangle$ – чисто квантовыми. Однако и те и другие корреляции запрещают запутанность системы S^a с системой S^c . Более того, из теоремы также следует, что два упомянутых выше типа (классические и квантовые) предельных идеальных корреляций не могут сосуществовать для состояния системы из трех частей в том смысле, что не существует такого состояния ρ^{abc} , что ρ^{ab} является классическим близнецовым состоянием, а ρ^{ac} – полностью запутанным состоянием.

Для доказательства теоремы заметим сначала, что, как показано в работе [24], любое сепарабельное состояние ρ^{ab} можно расширить до классического состояния, и, следовательно, чтобы доказать первое утверждение теоремы, можно без потери общности предположить, что состояние ρ^{ab} уже является классическим, т.е. ρ^{ab} имеет вид (2).

Пусть теперь $S^{a'}$ и $S^{b'}$ – копии систем S^b и S^a соответственно (обратим внимание на обратный порядок), а $\{\Pi_j^{a'}\}$ и $\{\Pi_i^{b'}\}$ – копии систем $\{\Pi_j^b\}$ и $\{\Pi_i^a\}$ соответственно. Если положить $\mathbf{k} := (i, j)$,

$$\Pi_{\mathbf{k}}^A := \Pi_i^a \otimes \Pi_j^{a'}, \quad \Pi_{\mathbf{k}}^B := \Pi_i^{b'} \otimes \Pi_j^b,$$

и определить состояние ρ^{AB} как

$$\rho^{AB} := \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} \Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}}^B,$$

то ясно, что ρ^{AB} – это классическое близнецовое состояние для расширенной системы $S^A \otimes S^B = S^a \otimes S^{a'} \otimes S^{b'} \otimes S^b$, причем

$$\rho^{ab} = \text{tr}_{a'b'} \rho^{AB}.$$

Этим завершается доказательство первого утверждения теоремы.

Для доказательства второго утверждения теоремы приведем простую алгебраическую лемму.

ЛЕММА. Если M и N – две неотрицательно определенные эрмитовы матрицы такие, что $\text{tr} MN = 0$, то $MN = 0$.

Чтобы показать это, предположим, что матрица N обратима. Тогда, поскольку $\text{tr} MN = \text{tr} N^{1/2} M N^{1/2} = 0$ и $N^{1/2} M N^{1/2}$ является неотрицательно определенной матрицей, получаем $N^{1/2} M N^{1/2} = 0$. Умножая обе части этого равенства на $N^{-1/2}$ и $N^{1/2}$ соответственно слева и справа, заключаем, что $MN = 0$. Если N не обратима, то мы можем привлечь соображения непрерывности и прийти к тому же заключению.

Теперь из определения состояния ρ^{AB} при $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ получаем

$$\text{tr}(\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}'}^B \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{ABc} = \text{tr}(\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}'}^B) \rho^{AB} = 0.$$

Отсюда с учетом приведенной выше леммы при $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ получаем

$$(\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}'}^B \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{ABc} = 0.$$

Поэтому, используя $\sum_{\mathbf{k}'} \Pi_{\mathbf{k}'}^A = \mathbf{1}^A$, находим

$$(\mathbf{1}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}}^B \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{ABc} = \left(\left(\sum_{\mathbf{k}'} \Pi_{\mathbf{k}'}^A \right) \otimes \Pi_{\mathbf{k}}^B \otimes \mathbf{1}^c \right) \rho^{ABc} = (\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}}^B \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{ABc}, \quad (5)$$

и аналогично, используя $\sum_{\mathbf{k}'} \Pi_{\mathbf{k}'}^B = \mathbf{1}^B$, получаем

$$(\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{ABc} = \left(\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \left(\sum_{\mathbf{k}'} \Pi_{\mathbf{k}'}^B \right) \otimes \mathbf{1}^c \right) \rho^{ABc} = (\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}}^B \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{ABc}. \quad (6)$$

Комбинируя соотношения (5) и (6), получаем

$$(\mathbf{1}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}}^B \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{ABc} = (\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{ABc}. \quad (7)$$

Для сопряженного (7) уравнения мы также получаем

$$\rho^{ABc} (\mathbf{1}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}}^B \otimes \mathbf{1}^c) = \rho^{ABc} (\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes \mathbf{1}^c). \quad (8)$$

Эти два соотношения исключительно важны для последующих рассуждений. На самом деле они являются переформулировкой допущения о том, что системы S^A и S^B идеально коррелированы классическим способом.

Для любых наблюдаемых X^A и X^c для соответствующих систем S^A и S^c заметим, что $X^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes X^c$ коммутирует с $\mathbf{1}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}}^B \otimes \mathbf{1}^c$, а также $\mathbf{1}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}}^B \otimes \mathbf{1}^c = (\mathbf{1}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}}^B \otimes \mathbf{1}^c)^2$.

Используя свойство цикличности следа, с учетом соотношений (7) и (8), а также равенства $\sum_{\mathbf{k}} \Pi_{\mathbf{k}}^B = \mathbf{1}^B$, получаем

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(X^A \otimes X^c) \rho^{Ac} &= \text{tr}(X^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes X^c) \rho^{ABc} = \\
 &= \text{tr}(X^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes X^c) \left(\mathbf{1}^A \otimes \left(\sum_{\mathbf{k}} \Pi_{\mathbf{k}}^B \right) \otimes \mathbf{1}^c \right) \rho^{ABc} = \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \text{tr}(\mathbf{1}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}}^B \otimes \mathbf{1}^c) (X^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes X^c) (\mathbf{1}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}}^B \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{ABc} = \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \text{tr}(\mathbf{1}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}}^B \otimes \mathbf{1}^c) (X^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes X^c) (\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{ABc} = \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \text{tr}(X^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes X^c) (\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{ABc} (\mathbf{1}^A \otimes \Pi_{\mathbf{k}}^B \otimes \mathbf{1}^c) = \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \text{tr}(X^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes X^c) (\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{ABc} (\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes \mathbf{1}^c) = \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \text{tr}(\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes \mathbf{1}^c) (X^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes X^c) (\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{ABc} = \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \text{tr}(\Pi_{\mathbf{k}}^A X^A \Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \mathbf{1}^B \otimes X^c) \rho^{ABc} = \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \text{tr}(\Pi_{\mathbf{k}}^A X^A \Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes X^c) \rho^{Ac} = \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \text{tr}(X^A \otimes X^c) (\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{Ac} (\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \mathbf{1}^c).
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\rho^{Ac} = \sum_{\mathbf{k}} (\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \mathbf{1}^c) \rho^{Ac} (\Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \mathbf{1}^c),$$

и согласно эквивалентным утверждениям 1–3 (где A играет роль a), сформулированным в конце раздела 2, можно записать

$$\rho^{Ac} = \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} \Pi_{\mathbf{k}}^A \otimes \rho_{\mathbf{k}}^c.$$

Если положить $\rho_{\mathbf{k}}^a = \text{tr}_{a'} \Pi_{\mathbf{k}}^A$, то мы увидим, что маргинальное состояние

$$\rho^{ac} = \text{tr}_{a'} \rho^{Ac} = \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} (\text{tr}_{a'} \Pi_{\mathbf{k}}^A) \otimes \rho_{\mathbf{k}}^c = \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}}^a \otimes \rho_{\mathbf{k}}^c$$

является сепарабельным. Это завершает доказательство.

В качестве интересного следствия доказанной теоремы рассмотрим частный случай, когда ρ^{ab} уже является классическим близнецовым состоянием. Тогда согласно теореме ни S^a , ни S^b нельзя запутать ни с какой другой системой (оба редуцированных состояния для систем $S^a \otimes S^c$ и $S^b \otimes S^c$ являются сепарабельными), хотя систему с частями S^a и S^b как целое можно запутать с другой системой! Проиллюстрируем последнее утверждение. Очистим состояние ρ^{ab} , определяемое в (3),

в системе $S^a \otimes S^b \otimes S^{a'} \otimes S^{b'}$ следующим образом:

$$|\Psi^{aba'b'}\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\psi_i^a\rangle \otimes |\psi_i^b\rangle \otimes |\psi_i^{a'}\rangle \otimes |\psi_i^{b'}\rangle,$$

где $\Pi_i^a = |\psi_i^a\rangle\langle\psi_i^a|$, $\Pi_i^b = |\psi_i^b\rangle\langle\psi_i^b|$, а $|\psi_i^{a'}\rangle$ и $|\psi_i^{b'}\rangle$ являются копиями $|\psi_i^a\rangle$ и $|\psi_i^b\rangle$ соответственно. Если рассматривать систему $S^{a'} \otimes S^{b'}$ как систему S^c , то система $S^a \otimes S^b$ будет запутана с S^c с энтропией запутывания $-\sum_i p_i \ln p_i$ [25]. В этом случае можно интуитивно полагать, что именно классические корреляции в системе $S^a \otimes S^b$ реализуют запутывание с S^c , т.е. запутывающими объектами из части $S^a \otimes S^b$ являются не S^a или S^b , а корреляции в них.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В то время как классические корреляции можно свободно распределять между неограниченным числом систем, хорошо известно, что с запутыванием этого делать нельзя, что иллюстрируется многочисленными моногамными характеристиками запутывания. В свете этого возникает естественный вопрос: что же происходит в смешанном случае, когда классические корреляции поделены между некоторыми системами, а запутывание поделено между другими несколькими системами? Нами получены результаты, проливающие свет на решение этой задачи. В частности, мы выявили интересное свойство корреляций для состоящих из нескольких частей систем в терминах классических близнецовых состояний: в некоторых случаях классические корреляции между двумя квантовыми системами S^a и S^b исключают всякое запутывание между системой S^a (или S^b) и любой другой квантовой системой. Это позволяет получить альтернативную и дополнительную характеристику моногамности запутывания. Представляет интерес исследование количественных соотношений обмена, связывающих корреляции (как классические, так и квантовые) между системами S^a и S^b и квантовые корреляции между системами S^a и S^c , а также связанных взаимодействий между классическими и квантовыми корреляциями для состояний систем, состоящих из многих частей.

Мы проиллюстрировали некоторое сходство характеристик запутывания и классических близнецовых состояний и показали, что это связано с проблемой классических аналогов квантового запутывания [26], [27]. В частности, Аллавердян с соавторами [27] открыли классический аналог квантового запутывания для броуновских частиц. Это эффект корреляции между координатами двух броуновских частиц и их усредненными скоростями. Представляет интерес проблема совместности между запутыванием и его классическими аналогами для систем, состоящих из многих частей.

Полученные нами результаты также могут быть полезны при решении задач о маргинальных квантовых состояниях, которая связана с вопросом о том, почему различные состояния в квантовых системах, состоящих из многих частей, являются совместными в том смысле, что они возникают как маргинальные состояния

большого объединенного состояния. Хорошо известно, что эта задача представляет собой вариант задачи об N -представимости, и в общем случае ее трудно решить [28], [29]. Из доказанной теоремы следует, что любое классическое близнецовое состояние несовместно ни с каким запутанным состоянием, т.е. они не могут одновременно оказаться редуцированными маргинальными состояниями системы, состоящей из трех частей. Отсюда сразу же следует результат о невозможности в задаче о квантовом маргинальном состоянии. Однако в классическом случае Воробьев [30] решил задачу совместности семейства случайных переменных в том смысле, что их можно реализовать в одном колмогоровском пространстве вероятностей. Этот результат имеет важные приложения для интерпретации неравенств Белла [31]. Хренников [31] представил логически строгий анализ нарушения неравенств Белла, несовместности семейств случайных переменных и связанных с этим физических проблем вещественности и локальности. Исследование совместности и взаимного влияния различных корреляционных структур, как квантовых, так и классических, лежит в основе теории информации.

Благодарности. Данная работа была поддержана со стороны NSFC (грант № 10771208), Science Fund for Creative Research Groups (грант № 10721101) и NSERC (грант № 311945-2008).

Список литературы

- [1] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [2] W. K. Wootters, W. H. Zurek, *Nature*, **299** (1982), 802–803.
- [3] D. Dieks, *Phys. Lett. A*, **92**:6 (1982), 271–272.
- [4] H. P. Yuen, *Phys. Lett. A*, **113**:8 (1986), 405–407.
- [5] V. Scarani, S. Iblisdir, N. Gisin, *Rev. Modern Phys.*, **77**:4 (2005), 1225–1256.
- [6] A. K. Pati, S. L. Braunstein, *Nature*, **404** (2000), 164–165.
- [7] H. Barnum, C. Caves, C. Fuchs, R. Jozsa, B. Schumacher, *Phys. Rev. Lett.*, **76**:15 (1996), 2818–2821.
- [8] M. Piani, P. Horodecki, R. Horodecki, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:9 (2008), 090502.
- [9] M. Piani, M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, *Phys. Rev. A*, **74**:1 (2006), 012305.
- [10] L. Masanes, A. Acin, N. Gisin, *Phys. Rev. A*, **73**:1 (2006), 012112.
- [11] V. Coffman, J. Kundu, W. K. Wootters, *Phys. Rev. A*, **61**:5 (2000), 052306.
- [12] B. M. Terhal, *IBM J. Res. Develop.*, **48**:1 (2004), 71–78.
- [13] T. J. Osborne, F. Verstraete, *Phys. Rev. Lett.*, **96**:22 (2006), 220503.
- [14] G. Adesso, F. Illuminati, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:15 (2007), 150501.
- [15] Y.-C. Ou, *Phys. Rev. A*, **75**:3 (2007), 034305.
- [16] R. F. Werner, *Phys. Rev. A*, **40**:8 (1989), 4277–4281.
- [17] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.*, **77**:8 (1996), 1413–1415; M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, *Phys. Lett. A*, **223**:1–2 (1996), 1–8; M. Lewenstein, B. Kraus, J. I. Cirac, P. Horodecki, *Phys. Rev. A*, **62**:5 (2000), 052310; H. F. Hofmann, S. Takeuchi, *Phys. Rev. A*, **68**:3 (2003), 032103; O. Gühne, N. Lütkenhaus, *Phys. Rev. Lett.*, **96**:17 (2006), 170502.
- [18] S. Luo, *Phys. Rev. A*, **77**:2 (2008), 022301.
- [19] S. Luo, Q. Zhang, *J. Stat. Phys.*, **131**:6 (2008), 1169–1177.
- [20] H. Ollivier, W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.*, **88**:1 (2001), 017901; W. H. Zurek, *Rev. Modern Phys.*, **75**:3 (2003), 715–775.
- [21] A. Wehrl, *Rev. Modern Phys.*, **50**:2 (1978), 221–260.

- [22] V. Vedral, *Rev. Modern Phys.*, **74**:1 (2002), 197–234.
- [23] M. B. Ruskai, *J. Math. Phys.*, **43**:9 (2002), 4358–4375.
- [24] N. Li, S. Luo, *Phys. Rev. A*, **78**:2 (2008), 024303.
- [25] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters, *Phys. Rev. A*, **54**:5 (1996), 3824–3851.
- [26] D. Collins, S. Popescu, *Phys. Rev. A*, **65**:3 (2002), 032321.
- [27] A. Allahverdyan, A. Khrennikov, Th. M. Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. A*, **72**:3 (2005), 032102.
- [28] Y.-K. Liu, M. Christandl, F. Verstraete, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:11 (2007), 110503.
- [29] A. J. Coleman, V. I. Yukalov, *Reduced Density Matrices. Coulson's Challenge*, Lecture Notes in Chemistry, **72**, Springer, Berlin, 2000.
- [30] Н. Н. Воробьев, *ТВП*, **7**:2 (1962), 153–169.
- [31] A. Khrennikov, *Bell's inequality: Physics meets Probability*, [arXiv: 0709.3909](https://arxiv.org/abs/0709.3909), 2007.

Поступила в редакцию 26.11.2008