Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Разумов, Ю. Г. Строганов, Статистическая модель трех цветов с граничными условиями типа доменной стенки. Функциональные уравнения, *ТМФ*, 2009, том 161, номер 1, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6415>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:36:31

© 2009 г.

А. В. Разумов*, Ю. Г. Строганов*

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХ ЦВЕТОВ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА ДОМЕННОЙ СТЕНКИ. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Статистическая модель трех цветов Бакстера рассмотрена для граничных условий типа доменной стенки. В этом случае удается доказать, что статистическая сумма удовлетворяет некоторым функциональным уравнениям, аналогичным функциональным уравнениям, которым удовлетворяет статистическая сумма шестивершинной модели для специального значения кроссинг-параметра.

Ключевые слова: модель трех цветов, статистическая сумма, функциональное уравнение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим различные раскраски квадратной решетки размера $n \times m$ с помощью трех цветов такие, что любые две смежные грани имеют разные цвета. Иногда налагают некоторые граничные условия, ограничивающие возможные раскраски. Наиболее распространенным случаем являются тороидальные граничные условия, когда цвет первой грани должен отличаться от цвета последней в каждой строке и каждом столбце решетки. Пример приведен на рис. 1, где используются удобные обозначения для цветов с помощью элементов кольца $\mathbb{Z}_3$. Мы обозначаем элементы $\mathbb{Z}_3$ как $\bar{0}$, $\bar{1}$ и $\bar{2}$. Когда элементы $\mathbb{Z}_3$ появляются там, где по контексту должны быть целые числа, тогда они обозначают соответствующие целые числа 0, 1 или 2. И наоборот, когда целое число i появляется там, где по контексту должен быть элемент $\mathbb{Z}_3$, оно обозначает элемент $\mathbb{Z}_3$, соответствующий остатку от деления i на 3. Очевидно, что цвета смежных граней различны тогда и только тогда, когда соответствующие элементы $\mathbb{Z}_3$ отличаются на $+\bar{1}$ или на $-\bar{1}$.

Простейшей из возникающих комбинаторных проблем является подсчет числа всех возможных раскрасок. В более общей постановке задачи можно попытаться найти число $C_{n,m}(k_{\bar{0}}, k_{\bar{1}}, k_{\bar{2}})$ раскрасок с $k_{\bar{0}}$ гранями цвета $\bar{0}$, $k_{\bar{1}}$ гранями цвета $\bar{1}$ и $k_{\bar{2}}$ гранями цвета $\bar{2}$. Очевидно, что числа $C_{n,m}(k_{\bar{0}}, k_{\bar{1}}, k_{\bar{2}})$ отличны от нуля только

*Институт физики высоких энергий, г. Протвино, Московская обл., Россия.
E-mail: Alexander.Razumov@ihep.ru

Рис. 1

тогда, когда $k_{\bar{0}} + k_{\bar{1}} + k_{\bar{2}} = nm$. Полезно ввести производящую функцию

$$Z_{n,m}(z_{\bar{0}}, z_{\bar{1}}, z_{\bar{2}}) = \sum_{\substack{k_{\bar{0}}, k_{\bar{1}}, k_{\bar{2}}: \\ k_{\bar{0}} + k_{\bar{1}} + k_{\bar{2}} = nm}} z_{\bar{0}}^{k_{\bar{0}}} z_{\bar{1}}^{k_{\bar{1}}} z_{\bar{2}}^{k_{\bar{2}}} C_{n,m}(k_{\bar{0}}, k_{\bar{1}}, k_{\bar{2}}),$$

где $z_{\bar{0}}, z_{\bar{1}}, z_{\bar{2}}$ – произвольные числа.

Можно рассматривать раскраски как состояния квантовой статистической модели, отождествляя цвета с состояниями граней. При этом числа $z_{\bar{0}}, z_{\bar{1}}, z_{\bar{2}}$ являются соответствующими больцмановскими весами граней, больцмановский вес состояния является произведением больцмановских весов граней, а $Z_{n,m}(z_{\bar{0}}, z_{\bar{1}}, z_{\bar{2}})$ – статистической суммой модели. Удобно представить вес состояния как произведение весов вершин решетки. При этом, если вершина принадлежит четырем граням цветов r_1, r_2, r_3, r_4 , мы приписываем ей вес $(z_{r_1} z_{r_2} z_{r_3} z_{r_4})^{1/4}$. Можно обобщить модель, считая, что вес вершины является произвольной функцией цветов четырех смежных граней. Можно ввести также зависимость от спектрального параметра и потребовать выполнения уравнения Янга–Бакстера (соотношения звезда–треугольник) с тем, чтобы получить интегрируемую систему.

В 1970 г. Бакстер, используя подходящую версию анзаца Бете, нашел статистическую сумму $Z_{n,m}(z_{\bar{0}}, z_{\bar{1}}, z_{\bar{2}})$ для тороидальных граничных условий в термодинамическом пределе [1], [2]. Позднее один из авторов настоящей статьи построил решение уравнений Янга–Бакстера, которое при специальном значении спектрального параметра приводит к статистической сумме этой модели трех цветов [3]. С помощью инверсионного трюка [4] были найдены наибольшие собственные значения для семейства коммутирующих матриц перехода и был воспроизведен результат работы [1].

Для того чтобы описать решение уравнения Янга–Бакстера, приведенное в работе [3], заметим, что существуют шесть типов возможных вершинных конфигураций цветов; они представлены первым рядом картинок на рис. 2, где r – один из цветов $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$. Соответствующие веса из работы [3] выражаются через стандартные

Рис. 2

эллиптические тета-функции модуля $p = e^{i\pi\tau}$ [5] следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \alpha_r(\varphi | \lambda, p) &= \alpha'_r(\varphi | \lambda, p) = \zeta_r^{1/4+3\varphi/4\pi}(\lambda, p) \frac{\theta_1(\pi/3 - \varphi | p)}{\theta_1(2\pi/3 | p)}, \\
 \beta_r(\varphi | \lambda, p) &= \beta'_r(\varphi | \lambda, p) = \zeta_r^{1/4-3\varphi/4\pi}(\lambda, p) \frac{\theta_1(\pi/3 + \varphi | p)}{\theta_1(2\pi/3 | p)}, \\
 \gamma_r(\varphi | \lambda, p) &= \frac{\zeta_{r+1}^{1/6+\varphi/2\pi}(\lambda, p)}{\zeta_r^{1/6+\varphi/2\pi}(\lambda, p)} \frac{\theta_4(\lambda + 2\pi(r+1/2)/3 + \varphi | p)}{\theta_4(\lambda + 2\pi r/3 | p)}, \\
 \gamma'_r(\varphi | \lambda, p) &= \frac{\zeta_{r-1}^{1/6+\varphi/2\pi}(\lambda, p)}{\zeta_r^{1/6+\varphi/2\pi}(\lambda, p)} \frac{\theta_4(\lambda + 2\pi(r-1/2)/3 - \varphi | p)}{\theta_4(\lambda + 2\pi r/3 | p)}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь φ – спектральный параметр, ассоциированный с центральной вершиной конфигурации из четырех граней, λ – произвольный фиксированный параметр, а

$$\zeta_r(\lambda, p) = \frac{\theta_4(\lambda + 2\pi(r-1)/3 | p) \theta_4(\lambda + 2\pi(r+1)/3 | p)}{\theta_4^2(\lambda + 2\pi r/3 | p)}. \tag{2}$$

Полезно иметь в виду, что¹⁾

$$\zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 = 1 \tag{3}$$

и что

$$\begin{aligned}
 \alpha_{r+1}(\varphi | \lambda) &= \alpha_r(\varphi | \lambda + 2\pi/3), & \alpha'_{r+1}(\varphi | \lambda) &= \alpha'_r(\varphi | \lambda + 2\pi/3), \\
 \beta_{r+1}(\varphi | \lambda) &= \alpha_r(\varphi | \lambda + 2\pi/3), & \beta'_{r+1}(\varphi | \lambda) &= \beta'_r(\varphi | \lambda + 2\pi/3), \\
 \gamma_{r+1}(\varphi | \lambda) &= \gamma_r(\varphi | \lambda + 2\pi/3), & \gamma'_{r+1}(\varphi | \lambda) &= \gamma'_r(\varphi | \lambda + 2\pi/3).
 \end{aligned} \tag{4}$$

¹⁾Ниже, если это не ведет к недоразумению, мы не указываем явно зависимость от фиксированных параметров.

При $\varphi = 0$ имеем

$$\begin{aligned}\alpha_r(0) &= \alpha'_r(0) = \zeta_r^{1/4}, & \beta_r(0) &= \beta'_r(0) = \zeta_r^{1/4}, \\ \gamma_r(0) &= \zeta_{r+\bar{1}}^{1/2} \zeta_r^{1/2}, & \gamma'_r(0) &= \zeta_{r-\bar{1}}^{1/2} \zeta_r^{1/2}\end{aligned}$$

и, как нетрудно видеть, после учета равенства (3) приходим к модели трех цветов Бакстера с $z_r = \zeta_r$. Из равенства (3) следует, что $z_{\bar{0}} z_{\bar{1}} z_{\bar{2}} = 1$, но это не ведет к потере общности.

В 1961 г. Ленард заметил, что существует соответствие между раскрасками тремя цветами и состояниями шестивершинной модели [6]. Напомним, что шестивершинная модель определяется на квадратной решетке. Состояния модели задаются выбором направления каждого внутреннего ребра посредством размещения на нем стрелки. Стрелки подчиняются определенному правилу, называемому условием льда: каждая вершина имеет в точности две входящие стрелки и две выходящие. Существует шесть возможных конфигураций стрелок в каждой вершине (см. второй ряд картинок на рис. 2), отсюда и происходит название модели.

Чтобы установить соответствие между раскрасками тремя цветами и состояниями шестивершинной модели, возьмем какой-либо вариант раскраски, удалим граничные ребра решетки и разместим стрелки на внутренних ребрах согласно следующему правилу. Рассмотрим четыре ребра, содержащие фиксированную четырехвалентную вершину решетки, и четыре грани, содержащие эти ребра. Возможные цветовые комбинации для таких множеств из четырех граней даются первым рядом картинок на рис. 2, где r – один из цветов $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$. Посетим отобранные грани, двигаясь против часовой стрелки. Если при пересечении ребра мы видим, что цвет меняется на $+\bar{1}$, то мы размещаем на ребре стрелку, направленную к вершине, а если цвет меняется на $-\bar{1}$, мы размещаем на ребре стрелку, направленную от вершины. Нетрудно убедиться, что правило не является противоречивым, и мы получаем конфигурации шестивершинной модели (см. рис. 2). Состояние шестивершинной модели, соответствующее состоянию модели трех цветов, приведенному на рис. 1, показано на рис. 3. Очевидно, что три состояния модели трех цветов соответствуют одному состоянию шестивершинной модели; фиксируя цвет одной из граней решетки, мы получаем взаимно однозначное соответствие.

В настоящей работе мы показываем, что аналогия между моделью трех цветов и шестивершинной моделью этим не ограничивается. А именно, выберем веса шестивершинной модели в виде

$$\begin{aligned}\alpha(\varphi | \eta) &= \alpha'(\varphi | \eta) = \frac{\sin(\eta/2 - \varphi)}{\sin \eta}, & \beta(\varphi | \eta) &= \beta'(\varphi | \eta) = \frac{\sin(\eta/2 + \varphi)}{\sin \eta}, \\ \gamma(\varphi | \eta) &= \gamma'(\varphi | \eta) = 1\end{aligned}\tag{5}$$

(см. рис. 2 для установления соответствия между функциями $\alpha(\varphi | \eta)$, $\alpha'(\varphi | \eta)$, $\beta(\varphi | \eta)$, $\beta'(\varphi | \eta)$, $\gamma(\varphi | \eta)$ и $\gamma'(\varphi | \eta)$ и вершинными конфигурациями). Параметр η называется кроссинг-параметром. Известно, что при $\eta = 2\pi/3$ и для граничных условий типа доменной стенки статистическая сумма неоднородной шестивершинной модели удовлетворяет некоторым простым функциональным уравнениям [7], [8]

Рис. 3

(подробности см. в разделе 2). Мы показываем, что статистическая сумма модели трех цветов при подходящих граничных условиях удовлетворяет аналогичным уравнениям.

В статьях [7], [8] при получении функциональных уравнений для шестивершинной модели использовалось представление статистической суммы с помощью детерминанта Изергина–Корепина [9]. Это представление обычно доказывается с помощью некоторых рекурсивных соотношений для статистической суммы, которые были найдены Корепиным [10]. В разделе 2 мы получаем функциональные уравнения непосредственно из упомянутых рекурсивных соотношений. В разделе 3 мы находим рекурсивные соотношения для статистической суммы модели трех цветов при подходящих граничных условиях, что позволяет нам в этом случае вывести функциональные уравнения, аналогичные функциональным уравнениям шестивершинной модели.

Можно показать, что статистическая модель трех цветов является частным случаем циклической модели solid-on-solid (SOS) [11], которая, в свою очередь, является частным случаем восьмивершинной SOS-модели [12]. В действительности, веса восьмивершинной SOS-модели зависят от параметра η , аналогичного кроссинг-параметру шестивершинной модели. Циклическая SOS-модель соответствует случаю, когда $\eta = 2\pi/L$ для некоторого положительного целого L , а статистическая модель трех цветов – случаю, когда $\eta = 2\pi/3$.

Недавно было показано, что статистическая сумма восьмивершинной SOS-модели может быть представлена как линейная комбинация детерминантов [13]. В нашем случае это комбинация двух детерминантов. Такое представление можно использовать для вывода упомянутых функциональных уравнений тем же способом, что и в случае шестивершинной модели [7], [8], но мы предпочитаем следовать прямым путем.

Веса, используемые в статье [13], для $\eta = 2\pi/3$ отличаются от весов, даваемых формулами (1). В приложении показано, что эти две системы весов связаны заменой спектрального параметра и калибровочным преобразованием.

2. ВЫВОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ШЕСТИВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ НЕПОСРЕДСТВЕННО ИЗ РЕКУРСИВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

В этом разделе рассматривается шестивершинная модель с граничными условиями типа доменной стенки [10]. В этом случае граничные горизонтальные стрелки направлены внутрь, а граничные вертикальные – наружу (см. рис. 4). Пометим горизонтальные линии переменными χ_i , а вертикальные линии – переменными ψ_i , $i = 1, \dots, n$. Вершине, находящейся на пересечении линии, помеченной переменной χ_i , и линии, помеченной переменной ψ_j , присваивается спектральный параметр $\chi_i - \psi_j$. Вес состояния модели является произведением весов вершин, а статистическая сумма $Z_n(\{\chi\}; \{\psi\})$ является суммой весов всех возможных состояний.

Рис. 4

Веса, определенные формулами (5), удовлетворяют уравнениям Янга–Бакстера. Используя этот факт, можно показать, что статистическая сумма является симметрической функцией раздельно по переменным χ_i и ψ_i (см., например, [14], [15]).

Определим функцию

$$F_n(\{\chi\}; \{\psi\}) = \prod_{\substack{i,j=1, \\ i < j}}^n \sin(\chi_i - \chi_j) \prod_{i,j=1}^n \sin(\chi_i - \psi_j) \prod_{\substack{i,j=1, \\ i < j}}^n \sin(\psi_i - \psi_j) Z_n(\{\chi\}; \{\psi\}).$$

Нашей целью является доказательство того, что при $\eta = 2\pi/3$ функция $F_n(\{\chi\}; \{\psi\})$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\sum_{s=0}^2 F_n(\chi_1, \dots, \chi_k + 2\pi s/3, \dots, \chi_n; \{\psi\}) = 0 \quad (6)$$

Рис. 5

и функциональному уравнению²⁾

$$\sum_{s=0}^2 F_n(\{\chi\}; \psi_1, \dots, \psi_k - 2\pi s/3, \dots, \psi_n) = 0. \quad (7)$$

Эти уравнения могут быть использованы для решения некоторых задач перечисления матриц чередующихся знаков. В частности, можно воспроизвести [7] детальное перечисление матриц чередующихся знаков, предложенное в работах [16], [17] и доказанное в работе [18].

Начнем со случая произвольного η . Рассмотрим вершину, находящуюся на пересечении линий, помеченных переменными χ_n и ψ_n . Имеются две возможные конфигурации этой вершины – вторая и пятая на рис. 2. Они имеют больцмановские веса $\sin(\eta/2 - \chi_n + \psi_n)/\sin \eta$ и 1 соответственно. Если положить $\chi_n = \psi_n + \eta/2$, то только те конфигурации решетки, которые соответствуют второй возможности, дают ненулевой вклад в статистическую сумму. При этом конфигурации вершин, принадлежащих нижней строке и правому столбцу, оказываются фиксированными (см. рис. 5). Конфигурации остальных вершин соответствуют конфигурациям $(n-1) \times (n-1)$ -решетки с граничными условиями типа доменной стенки. Собирая веса фиксированных вершин, приходим к следующему рекурсивному соотношению:

$$\begin{aligned} Z_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}, \chi_n; \psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \psi_n) \Big|_{\chi_n = \psi_n + \eta/2} = \\ = \sin^{2-2n} \eta \prod_{i=1}^{n-1} \sin(\chi_i - \psi_n + \eta/2) \prod_{i=1}^{n-1} \sin(\psi_n - \psi_i + \eta) \times \\ \times Z_{n-1}(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}; \psi_1, \dots, \psi_{n-1}). \end{aligned}$$

²⁾Мы пишем в уравнении (7) знак минус перед $2\pi s/3$ для соответствия с уравнениями, возникающими в случае модели трех цветов. Для шестивершинной модели мы также можем использовать знак плюс.

В действительности, так как функция $Z_n(\{\chi\}; \{\psi\})$ симметрична по переменным χ_i и ψ_i , мы имеем n^2 рекурсивных соотношений вида

$$\begin{aligned} & Z_n(\chi_1, \dots, \chi_k, \dots, \chi_n; \psi_1, \dots, \psi_\ell, \dots, \psi_n) \Big|_{\chi_k = \psi_\ell + \eta/2} = \\ & = \sin^{2-2n} \eta \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n \sin(\chi_i - \psi_\ell + \eta/2) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq \ell}}^n \sin(\psi_\ell - \psi_i + \eta) \times \\ & \times Z_{n-1}(\chi_1, \dots, \widehat{\chi_k}, \dots, \chi_n; \psi_1, \dots, \widehat{\psi_\ell}, \dots, \psi_n), \end{aligned} \quad (8)$$

где переменная со шляпкой исключена из списка аргументов.

Начнем теперь с вершины, находящейся на пересечении линий, помеченных переменными χ_1 и ψ_n . Подобно тому, как описано выше, получаем n^2 рекурсивных соотношений вида

$$\begin{aligned} & Z_n(\chi_1, \dots, \chi_k, \dots, \psi_n; \psi_1, \dots, \psi_\ell, \dots, \psi_n) \Big|_{\chi_k = \psi_\ell - \eta/2} = \\ & = \sin^{2-2n} \eta \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n \sin(\chi_i - \psi_\ell - \eta/2) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq \ell}}^n \sin(\psi_\ell - \psi_i - \eta) \times \\ & \times Z_{n-1}(\chi_1, \dots, \widehat{\chi_k}, \dots, \chi_n; \psi_1, \dots, \widehat{\psi_\ell}, \dots, \psi_n). \end{aligned} \quad (9)$$

Рекурсивные соотношения (8) и (9) справедливы для произвольного η . Предположим теперь, что $\eta = 2\pi/3$. Используя тождество

$$\sin \varphi \sin(\varphi + \pi/3) \sin(\varphi + 2\pi/3) = \frac{1}{4} \sin 3\varphi$$

и рекурсивные соотношения (8) и (9), можно доказать, что

$$\begin{aligned} & F_n(\chi_1, \dots, \chi_k, \dots, \chi_n; \psi_1, \dots, \psi_\ell, \dots, \psi_n) \Big|_{\chi_k = \psi_\ell \pm \pi/3} = \\ & = \pm (-1)^{n-1} 4^{2-2n} \sin^{3-2n}(2\pi/3) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n \sin[3(\psi_\ell - \chi_i)] \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq \ell}}^n \sin[3(\psi_\ell - \psi_i)] \times \\ & \times F_{n-1}(\chi_1, \dots, \widehat{\chi_k}, \dots, \chi_n; \psi_1, \dots, \widehat{\psi_\ell}, \dots, \psi_n). \end{aligned} \quad (10)$$

Определим функции

$$S_{n,k}(\chi_1, \dots, \chi_k, \dots, \chi_n; \{\psi\}) = \sum_{s=0}^2 F_n(\chi_1, \dots, \chi_k + 2\pi s/3, \dots, \chi_n; \{\psi\})$$

и докажем по индукции, что $S_{n,k}(\{\chi\}; \{\psi\}) = 0$. На самом деле, благодаря антисимметрии функций $F_n(\{\chi\}; \{\psi\})$ по переменным χ_i достаточно доказать, что

$$S_{n,1}(\{\chi\}; \{\psi\}) = 0.$$

Нетрудно видеть, что

$$S_{1,1}(\chi_1; \psi_1) = \sum_{r=0}^2 \sin(\chi_1 - \psi_1 + 2\pi/3) = 0.$$

Предположим теперь, что $S_{n-1,1}(\{\chi\}; \{\psi\}) = 0$ для некоторого $n > 1$. Рекурсивные соотношения (10) дают

$$\begin{aligned} & S_{n,1}(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}, \chi_n; \psi_1, \dots, \psi_\ell, \dots, \psi_n) \Big|_{\chi_n = \psi_\ell \pm \pi/3} = \\ & = \mp (-1)^n 4^{2-2n} \sin^{3-2n}(2\pi/3) \prod_{i=1}^{n-1} \sin[3(\psi_\ell - \chi_i)] \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq \ell}}^n \sin[3(\psi_\ell - \psi_i)] \times \\ & \times S_{n-1,1}(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}; \psi_1, \dots, \widehat{\psi_\ell}, \dots, \psi_n) = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что для граничных условий типа доменной стенки любая строка или любой столбец вершин имеют нечетное количество вершин типа γ и γ' . Отсюда, в частности, имеем

$$Z_n(\chi_1, \dots, \chi_n + \pi; \{\psi\}) = (-1)^{n-1} Z_n(\chi_1, \dots, \chi_n; \{\psi\}). \quad (11)$$

По переменной χ_n статистическая сумма $Z_n(\{\chi\}; \{\psi\})$ является тригонометрическим полиномом порядка не больше $n-1$, а $S_{n,1}(\{\chi\}; \{\psi\})$ – тригонометрическим полиномом порядка не больше $3n-2$. Как мы показали чуть выше, функция $S_{n,1}(\{\chi\}; \{\psi\})$ имеет нули в точках $\chi_n = \psi_\ell \pm \pi/3$, $\ell = 1, \dots, n$. Более того, по построению она имеет нули также в точках $\chi_n = \chi_\ell$, $\ell = 2, \dots, n-1$, и в точках $\chi_n = \psi_\ell$, $\ell = 1, \dots, n$. Соотношение (11) удваивает количество этих нулей. Следовательно, имеется $8n-4$ нулей в интервале $0 \leq \chi_n < 2\pi$. Это возможно, только если $S_{n,1}(\{\chi\}; \{\psi\}) = 0$. Таким образом, мы доказали справедливость уравнений (6). Справедливость уравнений (7) может быть доказана тем же способом.

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ТРЕХ ЦВЕТОВ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА ДОМЕННОЙ СТЕНКИ

Для модели трех цветов существует естественный аналог граничных условий типа доменной стенки шестивершинной модели. В этом случае, если начинать с любой граничной грани и двигаться против часовой стрелки вдоль границы, то цвет меняется на $+\bar{1}$ от грани к грани для вертикальных границ и на $-\bar{1}$ для горизонтальных границ. Пример приведен на рис. 6. Ясно, что в этом случае число строк

Рис. 6

граней должно совпадать с числом столбцов граней. Можно легко убедиться в том, что соответствующие состояния шестивершинной модели удовлетворяют граничным условиям типа доменной стенки.

Будем рассматривать неоднородный случай, когда внутренним горизонтальным линиям приписываются переменные χ_i , а внутренним вертикальным – переменные ψ_i , $i = 1, \dots, n$ (см. рис. 6). Здесь и далее n означает число внутренних вершин в строке или в столбце. С вершиной, находящейся на пересечении линии, помеченной χ_i , и линии, помеченной ψ_j , мы ассоциируем спектральный параметр $\chi_i - \psi_j$. Представим полную статистическую сумму $Z_n(\{\chi\}; \{\psi\})$ как сумму частичных статистических сумм:

$$Z_n(\{\chi\}; \{\psi\}) = \sum_{r \in \mathbb{Z}_3} Z_n^r(\{\chi\}; \{\psi\}),$$

где r является цветом левой верхней грани решетки. Заметим, что из равенств (4) следует, что

$$Z_n^{r+1}(\{\chi\}; \{\psi\} \mid \lambda, p) = Z_n^r(\{\chi\}; \{\psi\} \mid \lambda + 2\pi/3, p).$$

Обозначим вес, соответствующий конфигурации из четырех граней

как $W_{rs}^{r's'}(\varphi)$. Как мы упоминали выше, эти веса удовлетворяют уравнениям Янга–Бакстера, которые в явном виде записываются как

$$\begin{aligned} \sum_{t \in \mathbb{Z}_3} W_{r't}^{r''s''}(\varphi) W_{rs}^{r't}(\varphi') W_{ts}^{s''s'}(\varphi - \varphi' - \pi/3) = \\ = \sum_{t \in \mathbb{Z}_3} W_{r'r}^{r''t}(\varphi - \varphi' - \pi/3) W_{ts'}^{r''s''}(\varphi') W_{rs}^{ts'}(\varphi) \end{aligned} \quad (12)$$

и гарантируют интегрируемость модели.

Нетрудно убедиться в том, что если веса $W_{rs}^{r's'}(\varphi)$ удовлетворяют уравнениям Янга–Бакстера (12), то для произвольных ненулевых констант C_r калибровочно преобразованные веса $\widetilde{W}_{rs}^{r's'}(\varphi)$, определенные как

$$\widetilde{W}_{rs}^{r's'}(\varphi) = \frac{C_r}{C_{s'}} \frac{\Phi_{r'}(\varphi) \Phi_s(\varphi)}{\Phi_r(\varphi) \Phi_{s'}(\varphi)} W_{rs}^{r's'}(\varphi), \quad (13)$$

также удовлетворяют уравнениям Янга–Бакстера при условии, что

$$\Phi_r(\varphi - \varphi' - \pi/3) = \frac{\Phi_r(\varphi)}{\Phi_r(\varphi')}.$$

Соответствующие статистические суммы совпадают в случае тороидальных граничных условий и могут отличаться на некоторый множитель в других случаях.

Применим калибровочное преобразование (13) с $C_r = 1$, $\Phi_r(\varphi) = \zeta_r^{1/12 + \varphi/4\pi}$ к весам модели трех цветов, определенным функциями (1). В результате мы получаем веса, определяемые функциями

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_r(\varphi) &= \tilde{\alpha}'_r(\varphi) = \frac{\theta_1(\pi/3 - \varphi)}{\theta_1(2\pi/3)}, \\ \tilde{\beta}_r(\varphi) &= \tilde{\beta}'_r(\varphi) = \zeta_r^{1/2} \frac{\theta_1(\pi/3 + \varphi)}{\theta_1(2\pi/3)}, \\ \tilde{\gamma}_r(\varphi) &= \frac{\theta_4(\lambda + 2\pi(r + 1/2)/3 + \varphi)}{\theta_4(\lambda + 2\pi r/3)}, \\ \tilde{\gamma}'_r(\varphi) &= \frac{\theta_4(\lambda + 2\pi(r - 1/2)/3 - \varphi)}{\theta_4(\lambda + 2\pi r/3)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Соответствующие частичные статистические суммы для наших граничных условий связаны равенством

$$\tilde{Z}_n^r(\{\chi\}; \{\psi\}) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\Phi_{r+i-1}(\chi_i - \psi_i + \chi_{n-i+1} - \psi_{n-i+1})}{\Phi_{r+i}(\chi_i - \psi_i + \chi_{n-i+1} - \psi_{n-i+1})} \right] Z_n^r(\{\chi\}; \{\psi\}).$$

Используя трюк, подобный тому, который использовался для шестивершинной модели в работах [14], [15], можно показать, что уравнения Янга–Бакстера ведут к симметрии функции $\tilde{Z}_n^r(\{\chi\}; \{\psi\})$ как по переменным χ_i , так и по переменным ψ_i .

Рис. 7

Рассмотрим вершину на пересечении линии с меткой χ_n и линии с меткой ψ_n . Для этой вершины существуют две возможные конфигурации из четырех граней – вторая и пятая на рис. 2. Они имеют больцмановские веса $\tilde{\alpha}'_r(\chi_n - \psi_n)$ и $\tilde{\gamma}_r(\chi_n - \psi_n)$ соответственно. Если положить $\chi_n = \psi_n + \pi/3$, то только те конфигурации, которые соответствуют второй возможности, дадут ненулевой вклад в статистическую сумму. При этом конфигурации из четырех граней для вершин, принадлежащих внутренней нижней строке и внутреннему правому столбцу, оказываются фиксированными (см. рис. 7). Конфигурации оставшихся граней соответствуют конфигурациям $(n-1) \times (n-1)$ -решетки с граничными условиями типа доменной стенки. Следовательно, имеется следующее рекурсивное соотношение:

$$\begin{aligned} & \tilde{Z}_n^r(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}, \chi_n; \psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \psi_n) \Big|_{\chi_n = \psi_n + \pi/3} = \\ & = \tilde{\gamma}_r(2\pi/3) \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{\beta}'_{r+n-i}(\chi_i - \psi_n) \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{\beta}_{r+n-i}(\psi_n - \psi_i + \pi/3) \times \\ & \times \tilde{Z}_{n-1}^r(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}; \psi_1, \dots, \psi_{n-1}). \end{aligned}$$

Используя определения (14) и (2), перепишем это соотношение в виде

$$\begin{aligned} & \tilde{Z}_n^r(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}, \chi_n; \psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \psi_n) \Big|_{\chi_n = \psi_n + \pi/3} = \theta_1^{2-2n}(2\pi/3) \times \\ & \times \frac{\theta_4(\lambda + 2\pi(r+n)/3)}{\theta_4(\lambda + 2\pi(r+n-1)/3)} \prod_{i=1}^{n-1} \theta_1(\chi_i - \psi_n + \pi/3) \prod_{i=1}^{n-1} \theta_1(\psi_n - \psi_i + 2\pi/3) \times \\ & \times \tilde{Z}_{n-1}^r(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}; \psi_1, \dots, \psi_{n-1}). \end{aligned}$$

Так как функции $\tilde{Z}_n^r(\{\chi\}; \{\psi\})$ симметричны по переменным χ_i и ψ_i , мы имеем в действительности n^2 рекурсивных соотношений вида

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n^r(\chi_1, \dots, \chi_k, \dots, \chi_n; \psi_1, \dots, \psi_\ell, \dots, \psi_n) \Big|_{\chi_k = \psi_\ell + \pi/3} &= \theta_1^{2-2n}(2\pi/3) \times \\ &\times \frac{\theta_4(\lambda + 2\pi(r+n)/3)}{\theta_4(\lambda + 2\pi(r+n-1)/3)} \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n \theta_1(\chi_i - \psi_\ell + \pi/3) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq \ell}}^n \theta_1(\psi_\ell - \psi_i + 2\pi/3) \times \\ &\times \tilde{Z}_{n-1}^r(\chi_1, \dots, \widehat{\chi_k}, \dots, \chi_n; \psi_1, \dots, \widehat{\psi_\ell}, \dots, \psi_n). \end{aligned} \quad (15)$$

Начав с правой верхней грани и вновь использовав симметрию функции $\tilde{Z}_n^r(\chi; \psi)$ по переменным χ_i и ψ_i , мы получаем еще одну систему рекурсивных соотношений:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n^r(\chi_1, \dots, \chi_k, \dots, \chi_n; \psi_1, \dots, \psi_\ell, \dots, \psi_n) \Big|_{\chi_k = \psi_\ell - \pi/3} &= \theta_1^{2-2n}(2\pi/3) \times \\ &\times \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n \theta_1(\chi_i - \psi_\ell - \pi/3) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq \ell}}^n \theta_1(\psi_\ell - \psi_i - 2\pi/3) \times \\ &\times \tilde{Z}_{n-1}^{r+1}(\chi_1, \dots, \widehat{\chi_k}, \dots, \chi_n; \psi_1, \dots, \widehat{\psi_\ell}, \dots, \psi_n). \end{aligned} \quad (16)$$

Соотношения (15) и (16) аналогичны соотношениям (8) и (9) предыдущего раздела. Найдем теперь аналоги уравнений (6) и (7). Для начала введем функции

$$\begin{aligned} F_n^r(\{\chi\}; \{\psi\}) &= \frac{1}{\theta_4(\lambda + 2\pi(r+n)/3)} \times \\ &\times \prod_{\substack{i,j=1, \\ i < j}}^n \theta_1(\chi_i - \chi_j) \prod_{i,j=1}^n \theta_1(\chi_i - \psi_j) \prod_{\substack{i,j=1, \\ i < j}}^n \theta_1(\psi_i - \psi_j) \tilde{Z}_n^r(\{\chi\}; \{\psi\}). \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\theta_1(\varphi | p) \theta_1(\varphi + \pi/3 | p) \theta_1(\varphi + 2\pi/3 | p) = D(p) \theta_1(3\varphi | p^3), \quad (18)$$

где $D(p)$ задается соотношением

$$D(p) = \frac{\theta_1'(0 | p) \theta_1(\pi/3 | p) \theta_1(2\pi/3 | p)}{3\theta_1'(0 | p^3)}.$$

Используя равенство (18) и рекурсивные соотношения (15), мы видим, что

$$\begin{aligned} F_n^r(\chi_1, \dots, \chi_k, \dots, \chi_n; \psi_1, \dots, \psi_\ell, \dots, \psi_n | \lambda, p) \Big|_{\chi_k = \psi_\ell + \pi/3} &= \\ &= (-1)^{n-1} D^{2n-2}(p) \theta_1^{3-2n}(2\pi/3 | p) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n \theta_1(3(\psi_\ell - \chi_i) | p^3) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq \ell}}^n \theta_1(3(\psi_\ell - \psi_i) | p^3) \times \\ &\times F_{n-1}^r(\chi_1, \dots, \widehat{\chi_k}, \dots, \chi_n; \psi_1, \dots, \widehat{\psi_\ell}, \dots, \psi_n | \lambda, p). \end{aligned} \quad (19)$$

Подобным образом рекурсивное соотношение (16) дает

$$\begin{aligned}
 & F_n^r(\chi_1, \dots, \chi_k, \dots, \chi_n; \psi_1, \dots, \psi_\ell, \dots, \psi_n \mid \lambda, p) \Big|_{\chi_k = \psi_\ell - \pi/3} = \\
 & = -(-1)^{n-1} D^{2n-2}(p) \theta_1^{3-2n}(2\pi/3 \mid p) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n \theta_1(3(\psi_\ell - \chi_i) \mid p^3) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq \ell}}^n \theta_1(3(\psi_\ell - \psi_i) \mid p^3) \times \\
 & \quad \times F_{n-1}^{r+1}(\chi_1, \dots, \widehat{\chi_k}, \dots, \chi_n; \psi_1, \dots, \widehat{\psi_\ell}, \dots, \psi_n \mid \lambda, p). \tag{20}
 \end{aligned}$$

Теперь определим функции

$$S_{n,k}^r(\chi_1, \dots, \chi_k, \dots, \chi_n; \{\psi\}) = \sum_{s=0}^2 F_n^{r+s}(\chi_1, \dots, \chi_k + 2\pi s/3, \dots, \chi_n; \{\psi\}).$$

Оказывается, что $S_{n,k}^r(\{\chi\}, \{\psi\}) = 0$. Чтобы доказать этот факт, заметим прежде всего, что достаточно установить, что $S_{n,1}^0(\{\chi\}, \{\psi\}) = 0$. Все другие случаи могут быть сведены к этому с помощью использования антисимметрии функций $F_n^r(\{\chi\}, \{\psi\})$ по переменным χ_i и равенства

$$F_n^{r+1}(\{\chi\}, \{\psi\} \mid \lambda, p) = F_n^r(\{\chi\}, \{\psi\} \mid \lambda + 2\pi/3, p),$$

которое следует из соотношения

$$\widetilde{W}_{r+1, r'+1}^{s+1, s'+1}(\varphi \mid \lambda, p) = \widetilde{W}_{rr'}^{ss'}(\varphi \mid \lambda + 2\pi/3, p).$$

Докажем равенство $S_{n,1}^0(\{\chi\}, \{\psi\}) = 0$ индукцией по n . Легко видеть, что

$$F_1^r(\chi_1; \psi_1) = \frac{\theta_1(\chi_1 - \psi_1) \theta_4(\lambda + \chi_1 - \psi_1 + 2\pi(r+1/2)/3)}{\theta_4(\lambda + 2\pi(r+1)/3) \theta_4(\lambda + 2\pi r/3)}.$$

Следовательно, функция $S_{1,1}^0(\chi_1; \psi_1)$, рассматриваемая как функция от $\varphi = \chi_1 - \psi_1$, имеет вид

$$\begin{aligned}
 S_{1,1}^0(\varphi) &= \frac{\theta_1(\varphi) \theta_4(\lambda + \varphi + \pi/3)}{\theta_4(\lambda + 2\pi/3) \theta_4(\lambda)} + \\
 &+ \frac{\theta_1(\varphi + 2\pi/3) \theta_4(\lambda + \varphi + 5\pi/3)}{\theta_4(\lambda + 4\pi/3) \theta_4(\lambda + 2\pi/3)} + \frac{\theta_1(\varphi + 4\pi/3) \theta_4(\lambda + \varphi + 3\pi)}{\theta_4(\lambda + 2\pi) \theta_4(\lambda + 4\pi/3)}. \tag{21}
 \end{aligned}$$

Все члены суммы в правой части данного равенства имеют одинаковые множители периодичности, соответствующие периодам π и $\pi\tau$. Деля эту сумму на ее первый член, получаем двоякопериодическую функцию. Легко проверить, что эта функция не имеет полюсов и, следовательно, является константой. При $\varphi = -\pi/3$ функция $S_{1,1}^0(\varphi)$ обращается в нуль, а первый член суммы в правой части равенства (21) не равен нулю в этой точке. Таким образом, искомая константа равна нулю, и $S_{1,1}^0(\chi_1; \psi_1) = 0$. Как мы отмечали выше, это означает, что $S_{1,1}^r(\chi_1; \psi_1) = 0$ для любого r .

Предположим теперь, что $S_{n-1,1}^r(\{\chi\}, \{\psi\}) = 0$ для некоторого $n > 1$. Из рекурсивных соотношений (19) следует, что

$$\begin{aligned} S_{n,1}^r(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}, \chi_n; \psi_1, \dots, \psi_\ell, \dots, \psi_n \mid \lambda, p) \Big|_{\chi_n = \psi_\ell + \pi/3} = \\ = (-1)^{n-1} D^{2n-2}(p) \theta_1^{3-2n}(2\pi/3 \mid p) \prod_{i=1}^{n-1} \theta_1(3(\psi_\ell - \chi_i) \mid p^3) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq \ell}}^n \theta_1(3(\psi_\ell - \psi_i) \mid p^3) \times \\ \times S_{n-1,1}^r(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}; \psi_1, \dots, \widehat{\psi_\ell}, \dots, \psi_n \mid \lambda, p) = 0, \end{aligned}$$

а рекурсивные соотношения (20) дают

$$\begin{aligned} S_{n,1}^r(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}, \chi_n; \psi_1, \dots, \psi_\ell, \dots, \psi_n \mid \lambda, p) \Big|_{\chi_n = \psi_\ell - \pi/3} = \\ = -(-1)^{n-1} D^{2n-2}(p) \theta_1^{3-2n}(2\pi/3 \mid p) \prod_{i=1}^{n-1} \theta_1(3(\psi_\ell - \chi_i) \mid p^3) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq \ell}}^n \theta_1(3(\psi_\ell - \psi_i) \mid p^3) \times \\ \times S_{n-1,1}^{r+1}(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}; \psi_1, \dots, \widehat{\psi_\ell}, \dots, \psi_n \mid \lambda, p) = 0. \end{aligned}$$

Напомним, что для любого состояния шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки число вершин типа γ и γ' в любом столбце и в любой строке является нечетным. Из соответствия между состояниями модели трех цветов и шестивершинной модели, описанного в разделе 1, следует, что для любого состояния модели трех цветов с граничными условиями типа доменной стенки общее число вершин типа γ и γ' в любом столбце и в любой строке также нечетно. Учитывая равенства

$$\theta_1(\varphi \pm \pi \mid p) = -\theta_1(\varphi \mid p), \quad \theta_4(\varphi \pm \pi \mid p) = \theta_4(\varphi \mid p),$$

приходим к выводу, что каждое слагаемое статистической суммы $\widetilde{Z}_n^r(\{\chi\}; \{\psi\})$ имеет один и тот же множитель периодичности, соответствующий периоду π , по любой переменной χ_i . То же справедливо и для слагаемых функций $F_n^r(\{\chi\}; \{\psi\})$ и $S_{n,k}^r(\{\chi\}; \{\psi\})$.

Используя равенства

$$\theta_1(\varphi + \pi\tau \mid p) = -p^{-1}e^{-2i\varphi}\theta_1(\varphi \mid p), \quad \theta_4(\varphi + \pi\tau \mid p) = -p^{-1}e^{-2i\varphi}\theta_4(\varphi \mid p),$$

мы видим, что

$$\widetilde{W}_{rs}^{r's'}(\varphi + \pi\tau) = -p^{-1}e^{-2i\varphi} \frac{\Psi_{r'}\Psi_s}{\Psi_r\Psi_{s'}} \widetilde{W}_{rs}^{r's'}(\varphi),$$

где $\Psi_r = e^{i(r-1)[\pi(r+1)/3+\lambda]\tau}$. Теперь можно показать, что каждое слагаемое статистической суммы $\widetilde{Z}_n^r(\{\chi\}; \{\psi\})$ имеет один и тот же множитель периодичности, соответствующий периоду $\pi\tau$, по любой из переменных χ_i . То же верно для слагаемых функций $F_n^r(\{\chi\}; \{\psi\})$ и $S_{n,k}^r(\{\chi\}; \{\psi\})$.

Любое слагаемое функции $S_{n,1}^r(\{\chi\}; \{\psi\})$ содержит произведение $3n-1$ тета-функций, аргументы которых содержат переменную χ_n . Все слагаемые имеют одинаковые множители периодичности. Поэтому, если поделить $S_{n,1}^r(\{\chi\}; \{\psi\})$ на одно из ее слагаемых, получится двоякопериодическая функция от χ_n . Каждая эллиптическая тета-функция имеет один и только один нуль в ячейке с вершинами $\xi, \xi + \pi, \xi + \pi + \pi\tau, \xi + \pi\tau$. Следовательно, порядок функции, полученной после деления функции $S_{n,1}^r(\{\chi\}; \{\psi\})$ на какое-нибудь из слагаемых, меньше или равен $3n-1$. С другой стороны, как мы показали выше, функция $S_{n,1}^r(\{\chi\}; \{\psi\})$ равна нулю для $\chi_n = \psi_\ell \pm 2\pi/3$, $\ell = 1, \dots, n$. Более того, из определения функций $S_{n,k}^r(\{\chi\}; \{\psi\})$ следует, что $S_{n,1}^r(\{\chi\}; \{\psi\})$ равна нулю для $\chi_n = \chi_\ell$, $\ell = 2, \dots, n-1$, и для $\chi_n = \psi_\ell$, $\ell = 1, \dots, n$. Следовательно, функция $S_{n,1}^r(\{\chi\}; \{\psi\})$ имеет по крайней мере $4n-2$ нулей, и, поскольку $4n-2 > 3n-1$ при $n > 1$, мы имеем $S_{n,1}^r(\{\chi\}; \{\psi\}) = 0$.

Таким образом, мы доказали, что

$$\sum_{s=0}^2 F_n^{r+s}(\chi_1, \dots, \chi_k + 2\pi s/3, \dots, \chi_n; \{\psi\}) = 0,$$

где функция $F_n^r(\{\chi\}; \{\psi\})$ связана со статистической суммой модели в соответствии с равенством (17). Таким же способом можно показать, что

$$\sum_{s=0}^2 F_n^{r+s}(\{\chi\}; \psi_1, \dots, \psi_k - 2\pi s/3, \dots, \psi_n) = 0.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

После подстановок $\lambda \rightarrow \lambda + \pi\tau/2$ и $\varphi \rightarrow -\varphi - \pi/3$ с учетом равенства

$$\theta_4(\varphi | p) = ip^{1/4} e^{-i\varphi} \theta_1(\varphi - \pi\tau/2 | p)$$

мы преобразуем веса (1) в веса

$$\begin{aligned} \alpha_r(\varphi) &= \alpha'_r(\varphi) = \zeta_r^{-3\varphi/4\pi} \frac{\theta_1(2\pi/3 + \varphi)}{\theta_1(2\pi/3)}, \\ \beta_r(\varphi) &= \beta'_r(\varphi) = -\zeta_r^{1/2+3\varphi/4\pi} \frac{\theta_1(\varphi)}{\theta_1(2\pi/3)}, \\ \gamma_r(\varphi) &= e^{i\varphi} \frac{\zeta_r^{\varphi/2\pi}}{\zeta_{r+\bar{1}}^{\varphi/2\pi}} \frac{\theta_1(\lambda + 2\pi r/3 - \varphi)}{\theta_1(\lambda + 2\pi r/3)}, \\ \gamma'_r(\varphi) &= e^{-i\varphi} \frac{\zeta_r^{\varphi/2\pi}}{\zeta_{r-\bar{1}}^{\varphi/2\pi}} \frac{\theta_1(\lambda + 2\pi r/3 + \varphi)}{\theta_1(\lambda + 2\pi r/3)}, \end{aligned} \tag{П.1}$$

где

$$\zeta_r = \frac{\theta_1(\lambda + 2\pi(r-1)/3)\theta_1(\lambda + 2\pi(r+1)/3)}{\theta_1^2(\lambda + 2\pi r/3)}.$$

Эти веса удовлетворяют уравнениям Янга–Бакстера вида

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}_3} W_{r't}^{r''s''}(\varphi) W_{rs}^{r't}(\varphi') W_{ts}^{s''s'}(\varphi - \varphi') = \sum_{t \in \mathbb{Z}_3} W_{r'r}^{r''t}(\varphi - \varphi') W_{ts}^{r''s''}(\varphi') W_{rs}^{ts'}(\varphi),$$

а калибровочные преобразования опять даются формулой (13), где функции $\Phi_r(\varphi)$ удовлетворяют теперь соотношению

$$\Phi_r(\varphi - \varphi') = \frac{\Phi_r(\varphi)}{\Phi_r(\varphi')}.$$

В явном виде калибровочные преобразования (13) описываются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_r(\varphi) &= \frac{\Phi_{r-\bar{1}}(\varphi) \Phi_{r+\bar{1}}(\varphi)}{\Phi_r^2(\varphi)} \alpha_r(\varphi), & \tilde{\alpha}'_r(\varphi) &= \frac{\Phi_{r-\bar{1}}(\varphi) \Phi_{r+\bar{1}}(\varphi)}{\Phi_r^2(\varphi)} \alpha'_r(\varphi), \\ \tilde{\beta}_r(\varphi) &= \frac{C_{r+\bar{1}}}{C_{r-\bar{1}}} \frac{\Phi_r^2(\varphi)}{\Phi_{r-\bar{1}}^{-1}(\varphi) \Phi_{r+\bar{1}}(\varphi)} \beta_r(\varphi), & \tilde{\beta}'_r(\varphi) &= \frac{C_{r-\bar{1}}}{C_{r+\bar{1}}} \frac{\Phi_r^2(\varphi)}{\Phi_{r-\bar{1}}^{-1}(\varphi) \Phi_{r+\bar{1}}(\varphi)} \beta'_r(\varphi), \\ \tilde{\gamma}_r(\varphi) &= \frac{\Phi_r^2(\varphi)}{\Phi_{r+\bar{1}}^2(\varphi)} \gamma_r(\varphi), & \tilde{\gamma}'_r(\varphi) &= \frac{\Phi_r^2(\varphi)}{\Phi_{r-\bar{1}}^2(\varphi)} \gamma'_r(\varphi). \end{aligned}$$

Применяя калибровочные преобразования (13) с

$$C_r = e^{i\pi/2} \theta_1^{-1/2} (\lambda + 2\pi r/3), \quad \Phi_r(\varphi) = e^{ir\varphi/2} \zeta_r^{-\varphi/4\pi}$$

к весам (II.1), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_r(\varphi) &= \frac{\theta_1(2\pi/3 + \varphi)}{\theta_1(2\pi/3)}, & \tilde{\alpha}'_r(\varphi) &= \frac{\theta_1(2\pi/3 + \varphi)}{\theta_1(2\pi/3)}, \\ \tilde{\beta}_r(\varphi) &= \frac{\theta_1(\lambda + 2\pi(r-1)/3)}{\theta_1(\lambda + 2\pi r/3)} \frac{\theta_1(\varphi)}{\theta_1(2\pi/3)}, & \tilde{\beta}'_r(\varphi) &= \frac{\theta_1(\lambda + 2\pi(r+1)/3)}{\theta_1(\lambda + 2\pi r/3)} \frac{\theta_1(\varphi)}{\theta_1(2\pi/3)}, \\ \tilde{\gamma}_r(\varphi) &= \frac{\theta_1(\lambda + 2\pi r/3 + \varphi)}{\theta_1(\lambda + 2\pi r/3)}, & \tilde{\gamma}'_r(\varphi) &= \frac{\theta_1(\lambda + 2\pi r/3 + \varphi)}{\theta_1(\lambda + 2\pi r/3)}. \end{aligned}$$

Эти веса совпадают с весами, использованными в работе [13].

Благодарности. Мы признательны Х. Розенгрёну за то, что он привлек наше внимание к работе [13] и за плодотворные дискуссии. Работа была частично поддержана РФФИ (грант № 07-01-00234).

Список литературы

- [1] R. J. Baxter, *J. Math. Phys.*, **11**:10 (1970), 3116–3124.
- [2] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985.
- [3] Ю.Г. Строганов, *Общие свойства и частные решения уравнения треугольника. Вычисление статистической суммы для некоторых моделей на плоской решетке*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, ИФВЭ, Протвино, 1982.
- [4] Yu. G. Stroganov, *Phys. Lett. A*, **74**:1–2 (1979), 116–118.
- [5] Е.Т. Уиттекер, Г.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Гостехиздат, Л.-М., 1933–1934.

- [6] A. Lenard, *J. Math. Phys.*, **2**:5 (1961), 682–693.
- [7] Ю. Г. Строганов, *ТМФ*, **146**:1 (2006), 65–76; [arXiv:math-ph/0204042](#).
- [8] А. В. Разумов, Ю. Г. Строганов, *ТМФ*, **141**:3 (2004), 323–347; [arXiv:math-ph/0312071](#).
- [9] А. Г. Изергин, *Докл. АН СССР*, **297**:2 (1987), 331–333.
- [10] V. E. Korepin, *Comm. Math. Phys.*, **86**:3 (1982), 391–418.
- [11] P. A. Pearce, K. A. Seaton, *Phys. Rev. Lett.*, **60**:14 (1988), 1347–1350.
- [12] R. J. Baxter, *Ann. Phys.*, **76**:1 (1973), 25–47.
- [13] H. Rosengren, *Adv. Appl. Math.*, **43**:2 (2009), 137–155; [arXiv:0801.1229](#).
- [14] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*, Наука, М., 1992.
- [15] G. Kuperberg, *Int. Math. Res. Not.*, **1996**:3 (1996), 139–150; [arXiv:math/9712207](#).
- [16] W. H. Mills, D. P. Robbins, H. Rumsey Jr., *J. Combin. Theory A*, **34**:3 (1983), 340–359.
- [17] W. H. Mills, D. P. Robbins, H. Rumsey Jr., *Invent. Math.*, **66**:1 (1982), 73–87.
- [18] D. Zeilberger, *New York J. Math.*, **2** (1996), 59–68; [arXiv:math/9606224](#).

Поступила в редакцию 8.12.2008