Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Одесский, В. В. Соколов, Интегрируемые эллиптические псевдопотенциалы, *ТМФ*, 2009, том 161, номер 1, 21–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:47:02

© 2009 г.

А. В. Одесский^{*†}, В. В. Соколов^{*}

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛЫ

Интегрируемые псевдопотенциалы с произвольным числом полей построены в терминах эллиптического обобщения гипергеометрических функций нескольких аргументов. Эти псевдопотенциалы являются многопараметрическими деформациями псевдопотенциалов, построенных Кричевером при изучении усреднений по Уизему решений уравнения КП, и порождают новые интегрируемые $(2 + 1)$ -мерные системы гидродинамического типа. Кроме того, с ними связан интересный класс интегрируемых $(1 + 1)$ -мерных систем, описанный в терминах решений эллиптического обобщения системы Гиббонса–Царева.

Ключевые слова: интегрируемая трехмерная система гидродинамического типа, эллиптико-гипергеометрические функции.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] был построен широкий класс квазилинейных интегрируемых систем уравнений в частных производных вида

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}(\mathbf{u})u_{j,t_1} + \sum_{j=1}^m b_{ij}(\mathbf{u})u_{j,t_2} + \sum_{j=1}^m c_{ij}(\mathbf{u})u_{j,t_3} = 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$. Коэффициенты этих уравнений были записаны в терминах обобщенных гипергеометрических функций [2]. Под интегрируемостью уравнения (1) мы понимаем существование псевдопотенциального представления¹⁾

$$\psi_{t_2} = A(p, \mathbf{u}), \quad \psi_{t_3} = B(p, \mathbf{u}), \quad \text{где } p = \psi_{t_1}. \quad (2)$$

Такое представление – это бездисперсионная версия [3], [4] представления нулевой кривизны, которое является основным понятием теории интегрируемых солитонных уравнений (см. статью [5]).

¹⁾Это означает, что (1) эквивалентно условиям совместности для (2).

^{*}Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: sokolov@itp.ac.ru

[†]Brock University, St. Catharines, Ontario, Canada. E-mail: aodesski@brocku.ca

Одной из интересных и привлекательных черт теории интегрируемых систем (1) является тот факт, что зависимость псевдопотенциала от p может быть гораздо более сложной, чем в солитонном случае. В работах [6], [7] были найдены важные примеры псевдопотенциалов A , B , связанных с процедурой усреднения по Уизему интегрируемых дисперсионных уравнений и с фробениусовыми многообразиями. Эти примеры ассоциированы с универсальной алгебраической кривой рода g с M проколами, где g и M произвольны, а коэффициенты кривой зависят от $\mathbf{u}$. Более точно, при всех $p \in \mathbb{C}$ точка $(A_{ppp}/A_{pp}^2, A_p)$ принадлежит кривой рода g , а $\mathbf{u}$ – это некоторые координаты на пространстве $\mathcal{M}_{g,M}$ модулей кривых рода g с M проколами.

Псевдопотенциалы из работы [1] (см. также [8]) были записаны в следующей параметрической форме: $A = F_1(\xi, \mathbf{u})$, $p = F_2(\xi, \mathbf{u})$, где зависимость функций F_i от переменной ξ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F_{i,\xi} = \phi_i(\xi, \mathbf{u}) \cdot \xi^{-s_1} (\xi - 1)^{-s_2} (\xi - u_1)^{-s_3} \dots (\xi - u_m)^{-s_{m+2}}. \quad (3)$$

Здесь $s_1, \dots, s_{m+2}$ – произвольные постоянные, а ϕ_i – многочлены степени $m - k$ по переменной ξ . Эти псевдопотенциалы связаны с рациональными алгебраическими кривыми. Если $s_1 = \dots = s_{m+2} = 0$ и $k = 0$, то они совпадают с псевдопотенциалами из работы [6], соответствующими $\mathcal{M}_{0,m+3}$.

В настоящей статье мы строим псевдопотенциалы и интегрируемые системы (1), связанные с эллиптической кривой. Для этих систем $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n, \tau)$, где τ – это параметр эллиптической кривой, который также является неизвестной функцией в (1). Коэффициенты систем выражаются в терминах некоторого эллиптического обобщения гипергеометрических функций нескольких переменных [9]. Эти эллиптико-гипергеометрические функции определяются как решения следующей линейной переопределенной совместной системы уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} g_{u_\alpha u_\beta} &= s_\beta (\rho(u_\beta - u_\alpha) + \rho(u_\alpha + \eta) - \rho(u_\beta) - \rho(\eta)) g_{u_\alpha} + \\ &\quad + s_\alpha (\rho(u_\alpha - u_\beta) + \rho(u_\beta + \eta) - \rho(u_\alpha) - \rho(\eta)) g_{u_\beta}, \\ g_{u_\alpha u_\alpha} &= s_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} (\rho(u_\alpha) + \rho(\eta) - \rho(u_\alpha - u_\beta) - \rho(u_\beta + \eta)) g_{u_\beta} + \\ &\quad + \left(\sum_{\beta \neq \alpha} s_\beta \rho(u_\alpha - u_\beta) + (s_\alpha + 1) \rho(u_\alpha + \eta) + \right. \\ &\quad \left. + s_\alpha \rho(-\eta) + (s_0 - s_\alpha - 1) \rho(u_\alpha) + 2\pi i r \right) g_{u_\alpha} - s_0 s_\alpha (\rho'(u_\alpha) - \rho'(\eta)) g, \\ g_\tau &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta} (\rho(u_\beta + \eta) - \rho(\eta)) g_{u_\beta} - \frac{s_0}{2\pi i} \rho'(\eta) g \end{aligned} \quad (4)$$

относительно одной функции $g(u_1, \dots, u_n, \tau)$. Здесь $\eta = s_1 u_1 + \dots + s_n u_n + r\tau + \eta_0$, $s_0 = -s_1 - \dots - s_n$, где $s_1, \dots, s_n, r, \eta_0$ – произвольные постоянные, а

$$\theta(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} (-1)^\alpha e^{2\pi i(\alpha z + \alpha(\alpha-1)\tau/2)}, \quad \rho(z) = \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}. \quad (5)$$

В формулах (4), а также всюду ниже, мы опускаем второй аргумент функций θ , ρ и используем обозначения

$$\rho'(z) = \frac{\partial \rho(z)}{\partial z}, \quad \rho_\tau(z) = \frac{\partial \rho(z)}{\partial \tau}, \quad \theta'(z) = \frac{\partial \theta(z)}{\partial z}, \quad \theta_\tau(z) = \frac{\partial \theta(z)}{\partial \tau}.$$

Оказывается, что размерность пространства решений системы (4) равна $n + 1$.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 мы описываем некоторые полезные для наших целей свойства эллиптико-гипергеометрических функций. В частности, мы приводим интегральное представление, аналогичное представлению для обобщенных гипергеометрических функций (см., например, [1]).

В разделе 3 для любого n мы строим псевдопотенциалы представления (2) с $k = 0$, связанные с эллиптико-гипергеометрическими функциями. Эти псевдопотенциалы $A_n(p, u_1, \dots, u_n, \tau)$ заданы параметрически:

$$A_n = P_n(g_1, \xi), \quad p = P_n(g_0, \xi), \quad (6)$$

где g_1 , g_0 – линейно независимые решения системы (4),

$$P_n(g, \xi) = \int_0^\xi S_n(g, \xi) e^{2\pi i r(\tau - \xi)} \frac{\theta'(0)^{-s_1 - \dots - s_n} \theta(u_1)^{s_1} \dots \theta(u_n)^{s_n}}{\theta(\xi)^{-s_1 - \dots - s_n} \theta(\xi - u_1)^{s_1} \dots \theta(\xi - u_n)^{s_n}} d\xi, \quad (7)$$

$$S_n(g, \xi) = \sum_{1 \leq \alpha \leq n} \frac{\theta(u_\alpha) \theta(\xi - u_\alpha - \eta)}{\theta(u_\alpha + \eta) \theta(\xi - u_\alpha)} g_{u_\alpha} - (s_1 + \dots + s_n) \frac{\theta'(0) \theta(\xi - \eta)}{\theta(\eta) \theta(\xi)} g. \quad (8)$$

Псевдопотенциал $A_n(p, u_1, \dots, u_n, \tau)$, определенный параметрически формулой (6), называется *эллиптическим псевдопотенциалом дефекта ноль*. Псевдопотенциалы $A_n(p, u_1, \dots, u_n, \tau)$, $n = 1, 2, \dots$, определяют интегрируемые системы вида (1) с $m = l = n + 1$. В случае $s_1 = \dots = s_n = r = 0$, $\eta_0 \rightarrow 0$ наши псевдопотенциалы совпадают с эллиптическими псевдопотенциалами, построенными в работе [6].

В разделе 4 для $k < n$ мы строим псевдопотенциалы дефекта k , которые определяют системы (1) с $m = n + 1$, $l = n + k + 1$. Специальный класс решений интегрируемых систем (1), зависящий от нескольких произвольных функций одной переменной, может быть построен методом гидродинамических редукций [10], [11]. Отметим, что в работе [11] существование гидродинамических редукций использовалось также в качестве эффективного критерия интегрируемости для систем (1). Гидродинамические редукции определяются парами интегрируемых совместных $(1 + 1)$ -мерных систем гидродинамического типа

$$r_t^i = v^i(r^1, \dots, r^N) r_x^i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Такие интегрируемые системы также интересны сами по себе. Общая теория этих систем была развита в работах [12], [13].

Раздел 5 посвящен гидродинамическим редукциям систем (1), построенных в разделах 3 и 4. В случае $k = 0$ соответствующие системы (9) имеют вид

$$r_t^i = \frac{S_n(g_1(\mathbf{u}), \xi_i)}{S_n(g_2(\mathbf{u}), \xi_i)} r_x^i, \quad (10)$$

где g_1, g_2 – линейно независимые решения системы (4). Для потенциалов дефекта $k > 0$ соответствующая формула аналогична. Функции $\tau(r^1, \dots, r^N)$, $\xi_i(r^1, \dots, r^N)$, $u_i(r^1, \dots, r^N)$ определяются следующей универсальной переопределенной совместной системой уравнений в частных производных типа системы Гиббонса–Царева [10], [14]:

$$\partial_\alpha \xi_\beta = \frac{1}{2\pi i} (\rho(\xi_\alpha - \xi_\beta) - \rho(\xi_\alpha)) \partial_\alpha \tau, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial r_\alpha}, \quad (11)$$

$$\partial_\alpha \partial_\beta \tau = -\frac{1}{\pi i} \rho'(\xi_\alpha - \xi_\beta) \partial_\alpha \tau \partial_\beta \tau, \quad (12)$$

где $\alpha, \beta = 1, \dots, N$, $\alpha \neq \beta$, и

$$\partial_\alpha u_\beta = \frac{1}{2\pi i} (\rho(\xi_\alpha - u_\beta) - \rho(\xi_\alpha)) \partial_\alpha \tau, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad \beta = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Напомним, что здесь τ – это второй аргумент функции ρ . В другой связи похожие формулы появлялись в работе [15]. Легко проверить, что система (11)–(13) совместна и, следовательно, $(1+1)$ -мерные системы (10) допускают локальную параметризацию с помощью $2N$ произвольных функций одной переменной.

Для некоторых очень специальных значений параметров s_i в (4) системы (10) связаны с уиземовскими иерархиями [6], с фробениусовыми многообразиями и с уравнением ассоциативности [7], [16].

2. ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определим функцию θ двух переменных z, τ формулой (5), предполагая, что $\text{Im } \tau > 0$. Функция θ называется θ -функцией порядка 1 от одной переменной. Напомним следующие полезные формулы:

$$\begin{aligned} \theta(z+1) &= \theta(z), & \theta(z+\tau) &= -e^{-2\pi iz} \theta(z), \\ \theta(-z) &= -e^{-2\pi iz} \theta(z), & \theta_\tau(z) &= \frac{1}{4\pi i} \theta''(z) - \frac{1}{2} \theta'(z). \end{aligned}$$

Следующие утверждения проверяются непосредственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Система линейных уравнений (4) совместна для любых постоянных $s_1, \dots, s_n, r, \eta_0$. Размерность линейного пространства $\mathcal{H}$ решений системы (4) равна $n+1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Коэффициенты в (4) могут быть записаны в факторизованной форме с помощью тождества

$$\rho(u_\beta - u_\alpha) + \rho(u_\alpha + \eta) - \rho(u_\beta) - \rho(\eta) = -\frac{\theta'(0)\theta(u_\alpha - u_\beta + \eta)\theta(u_\alpha)\theta(u_\beta + \eta)}{\theta(u_\alpha - u_\beta)\theta(u_\alpha + \eta)\theta(u_\beta)\theta(\eta)}.$$

Назовем элементы пространства $\mathcal{H}$ *эллиптико-гипергеометрическими функциями*. В случае, когда нам важны значения параметров системы (4), будем обозначать $\mathcal{H}$ через $\mathcal{H}_{s_1, \dots, s_n, r, \eta_0}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Определим функцию $F(u_1, \dots, u_n, \tau)$ с помощью следующего интегрального представления:

$$F(u_1, \dots, u_n, \tau) = \int_0^1 \frac{\theta(u_1 - t)^{s_1} \dots \theta(u_n - t)^{s_n} \theta'(0)^{s_1 + \dots + s_n + 1} \theta(t + \eta)}{\theta(u_1)^{s_1} \dots \theta(u_n)^{s_n} \theta(t)^{s_1 + \dots + s_n + 1} \theta(\eta)} \times \\ \times e^{2\pi i(s_1 + \dots + s_n + r)t} dt.$$

Тогда F удовлетворяет системе (4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{s_1, \dots, s_n, r, \eta_0}$ и $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_{s_1, \dots, s_n, 0, r, \eta_0}$. Тогда $\tilde{\mathcal{H}}$ порождено элементами $\mathcal{H}$ и функцией

$$Z(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \tau) = \int_0^{u_{n+1}} \frac{\theta(u_1 - t)^{s_1} \dots \theta(u_n - t)^{s_n} \theta'(0)^{s_1 + \dots + s_n + 1} \theta(t + \eta)}{\theta(u_1)^{s_1} \dots \theta(u_n)^{s_n} \theta(t)^{s_1 + \dots + s_n + 1} \theta(\eta)} \times \\ \times e^{2\pi i(s_1 + \dots + s_n + r)t} dt. \quad (14)$$

Более того, пространство $\mathcal{H}_{s_1, \dots, s_n, 0, \dots, 0, r, \eta_0}$ (среди параметров m нулей) порождено $\mathcal{H}$ и $Z(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \tau)$, $Z(u_1, \dots, u_n, u_{n+2}, \tau)$, $\dots$, $Z(u_1, \dots, u_n, u_{n+m}, \tau)$.

В простейшем случае $n = 1$ система (4) относительно функции $g(u_1, \tau)$ имеет следующий вид:

$$g_{u_1 u_1} = \left((s_1 + 1) \frac{\theta'(u_1 + \eta)}{\theta(u_1 + \eta)} + s_1 \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} - (2s_1 + 1) \frac{\theta'(u_1)}{\theta(u_1)} + 2\pi i r \right) g_{u_1} - \\ - \frac{s_1^2 \theta'(0)^2 \theta(u_1 - \eta) \theta(u_1 + \eta)}{\theta(u_1)^2 \theta(-\eta) \theta(\eta)} g, \\ g_\tau = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_1 + \eta)}{\theta(u_1 + \eta)} - \frac{\theta'(\eta)}{\theta(\eta)} \right) g_{u_1} + \frac{s_1}{2\pi i} (\ln \theta(\eta))'' g.$$

Если $s_1 = 0$, то функции $g = 1$ и

$$g = Z(u_1, \tau) = \int_0^{u_1} \frac{\theta'(0)\theta(t+\eta)}{\theta(t)\theta(\eta)} e^{2\pi i \tau t} dt$$

порождают пространство решений. Из предложения 3 следует, что функции $1, Z(u_1, \tau), \dots, Z(u_n, \tau)$ порождают пространство решений системы (4) в случае $s_1 = \dots = s_n = 0$.

3. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛЫ ДЕФЕКТА НОЛЬ

Для любой эллиптико-гипергеометрической функции $g \in \mathcal{H}$ определим $P_n(g, \xi)$ формулами (7), (8) при $\operatorname{Re}(s_1 + \dots + s_n) > 1$ и как аналитическое продолжение выражения (7) в противном случае.

Пусть g_1, g_0 – линейно независимые элементы $\mathcal{H}$. Соотношения (6) означают, что для нахождения эллиптического псевдопотенциала дефекта ноль $A_n(p, u_1, \dots, u_n, \tau)$ нужно выразить ξ из второго уравнения и подставить результат в первое уравнение.

Пусть $g_0, g_1, \dots, g_n$ – базис в $\mathcal{H}$. Определим псевдопотенциалы $B_\alpha(p, u_1, \dots, u_n, \tau)$ дефекта ноль формулой

$$B_\alpha = P_n(g_\alpha, \xi), \quad p = P_n(g_0, \xi), \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (15)$$

Предположим, что $u_1, \dots, u_n, \tau$ являются функциями от $t_0 = x, t_1, \dots, t_n$.

ТЕОРЕМА 1. *Условия совместности $\psi_{t_\alpha t_\beta} = \psi_{t_\beta t_\alpha}$ для системы*

$$\psi_{t_\alpha} = B_\alpha(\psi_x, u_1, \dots, u_n, \tau), \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (16)$$

эквивалентны следующей системе уравнений в частных производных относительно функций $u_1, \dots, u_n, \tau$:

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq \beta \leq n} (g_q g_{r, u_\beta} - g_r g_{q, u_\beta}) \left(u_{\beta, t_s} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\beta + \eta)}{\theta(u_\beta + \eta)} - \frac{\theta'(\eta)}{\theta(\eta)} \right) \tau_{t_s} \right) + \\ & + \sum_{1 \leq \beta \leq n} (g_r g_{s, u_\beta} - g_s g_{r, u_\beta}) \left(u_{\beta, t_q} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\beta + \eta)}{\theta(u_\beta + \eta)} - \frac{\theta'(\eta)}{\theta(\eta)} \right) \tau_{t_q} \right) + \\ & + \sum_{1 \leq \beta \leq n} (g_s g_{q, u_\beta} - g_q g_{s, u_\beta}) \left(u_{\beta, t_r} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\beta + \eta)}{\theta(u_\beta + \eta)} - \frac{\theta'(\eta)}{\theta(\eta)} \right) \tau_{t_r} \right) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{1 \leq \beta \leq n, \\ \beta \neq \alpha}} \frac{\theta(u_\beta)\theta(u_\alpha - u_\beta - \eta)}{\theta(u_\beta + \eta)\theta(u_\alpha - u_\beta)} (g_{r,u_\alpha} g_{q,u_\beta} - g_{q,u_\alpha} g_{r,u_\beta}) \times \\
& \times \left(u_{\alpha,t_s} - u_{\beta,t_s} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\alpha - u_\beta - \eta)}{\theta(u_\alpha - u_\beta - \eta)} - \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} \right) \tau_{t_s} \right) + \\
& + \sum_{\substack{1 \leq \beta \leq n, \\ \beta \neq \alpha}} \frac{\theta(u_\beta)\theta(u_\alpha - u_\beta - \eta)}{\theta(u_\beta + \eta)\theta(u_\alpha - u_\beta)} (g_{s,u_\alpha} g_{r,u_\beta} - g_{r,u_\alpha} g_{s,u_\beta}) \times \\
& \times \left(u_{\alpha,t_q} - u_{\beta,t_q} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\alpha - u_\beta - \eta)}{\theta(u_\alpha - u_\beta - \eta)} - \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} \right) \tau_{t_q} \right) + \\
& + \sum_{\substack{1 \leq \beta \leq n, \\ \beta \neq \alpha}} \frac{\theta(u_\beta)\theta(u_\alpha - u_\beta - \eta)}{\theta(u_\beta + \eta)\theta(u_\alpha - u_\beta)} (g_{q,u_\alpha} g_{s,u_\beta} - g_{s,u_\alpha} g_{q,u_\beta}) \times \\
& \times \left(u_{\alpha,t_r} - u_{\beta,t_r} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\alpha - u_\beta - \eta)}{\theta(u_\alpha - u_\beta - \eta)} - \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} \right) \tau_{t_r} \right) - \\
& - (s_1 + \dots + s_n) \frac{\theta'(0)\theta(u_\alpha - \eta)}{\theta(\eta)\theta(u_\alpha)} (g_q g_{r,u_\alpha} - g_r g_{q,u_\alpha}) \times \\
& \times \left(u_{\alpha,t_s} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\alpha - \eta)}{\theta(u_\alpha - \eta)} - \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} \right) \tau_{t_s} \right) - \\
& - (s_1 + \dots + s_n) \frac{\theta'(0)\theta(u_\alpha - \eta)}{\theta(\eta)\theta(u_\alpha)} (g_r g_{s,u_\alpha} - g_s g_{r,u_\alpha}) \times \\
& \times \left(u_{\alpha,t_q} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\alpha - \eta)}{\theta(u_\alpha - \eta)} - \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} \right) \tau_{t_q} \right) - \\
& - (s_1 + \dots + s_n) \frac{\theta'(0)\theta(u_\alpha - \eta)}{\theta(\eta)\theta(u_\alpha)} (g_s g_{q,u_\alpha} - g_q g_{s,u_\alpha}) \times \\
& \times \left(u_{\alpha,t_r} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\alpha - \eta)}{\theta(u_\alpha - \eta)} - \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} \right) \tau_{t_r} \right) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (18)
\end{aligned}$$

Здесь q, r, s меняются от 0 до n .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При фиксированных t_1, t_2, t_3 теорема 1 дает систему вида (1) с $l = m = n + 1$, обладающую псевдопотенциальным представлением.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Рассмотрим случай $s_1 = \dots = s_n = 0$. Согласно результатам раздела 2 имеем

$$g = c_0 + c_1 Z(u_1, \tau) + \dots + c_n Z(u_n, \tau),$$

где $c_0, \dots, c_n$ — произвольные постоянные. Поэтому

$$S_n(g, \xi) = \sum_{1 \leq \alpha \leq n} c_\alpha e^{2\pi i r u_\alpha} \frac{\theta'(0)\theta(\xi - u_\alpha - \eta_0)}{\theta(\eta_0)\theta(\xi - u_\alpha)}.$$

Если предположить, что $r = 0$ и $c_1 + \dots + c_n = 0$, то в пределе $\eta_0 \rightarrow 0$ получим

$$S_n(g, \xi) = \sum_{1 \leq \alpha \leq n} c_\alpha \rho(\xi - u_\alpha).$$

Система уравнений в частных производных, эквивалентная условиям совместности для уравнений вида (16), была названа в работе [6] *иерархией Уизема*. В этой статье были построены некоторые иерархии Уизема, связанные с алгебраическими кривыми произвольного рода g . Иерархия, соответствующая $g = 1$, эквивалентна описанной в теореме 1, если $r = s_1 = \dots = s_n = 0$, $c_1 + \dots + c_n = 0$ и η_0 стремится к нулю, как описано выше.

4. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛЫ ДЕФЕКТА $k > 0$

Построим эллиптические псевдопотенциалы дефекта k . Зафиксируем k линейно независимых эллиптико-гипергеометрических функций $h_1, \dots, h_k \in \mathcal{H}$. Для любой функции $g \in \mathcal{H}$ определим $P_{n,k}(g, \xi)$ формулой

$$P_{n,k}(g, \xi) = \frac{1}{\Delta} \det \begin{pmatrix} P_n(g, \xi) & P_n(h_1, \xi) & \dots & P_n(h_k, \xi) \\ g_{u_{n-k+1}} & h_{1,u_{n-k+1}} & \dots & h_{k,u_{n-k+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{u_n} & h_{1,u_n} & \dots & h_{k,u_n} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Здесь

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} h_{1,u_{n-k+1}} & \dots & h_{k,u_{n-k+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1,u_n} & \dots & h_{k,u_n} \end{pmatrix},$$

а $P_n(g, \xi)$ задано формулой (7). Отметим, что $P_{n,k}(h_1, \xi) = \dots = P_{n,k}(h_k, \xi) = 0$. Легко видеть, что линейные преобразования вида $h_i \rightarrow c_{i1}h_1 + \dots + c_{ik}h_k$, $g \rightarrow g + d_1h_1 + \dots + d_kh_k$ с постоянными коэффициентами c_{ij} , d_i не меняют $P_{n,k}(g, \xi)$.

Можно проверить, что

$$(P_{n,k}(g, \xi))_\xi = S_{n,k}(g, \xi) e^{2\pi i r(\tau - \xi)} \frac{\theta'(0)^{-s_1 - \dots - s_n} \theta(u_1)^{s_1} \dots \theta(u_n)^{s_n}}{\theta(\xi)^{-s_1 - \dots - s_n} \theta(\xi - u_1)^{s_1} \dots \theta(\xi - u_n)^{s_n}}, \quad (20)$$

где

$$S_{n,k}(g, \xi) = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{1 \leq \alpha \leq n-k} \frac{\theta(u_\alpha) \theta(\xi - u_\alpha - \eta)}{\theta(u_\alpha + \eta) \theta(\xi - u_\alpha)} \Delta_\alpha(g) - (s_1 + \dots + s_n) \frac{\theta'(0) \theta(\xi - \eta)}{\theta(\eta) \theta(\xi)} \Delta_0(g) \right) \quad (21)$$

И

$$\Delta_\alpha(g) = \det \begin{pmatrix} gu_\alpha & h_{1,u_\alpha} & \dots & h_{k,u_\alpha} \\ gu_{n-k+1} & h_{1,u_{n-k+1}} & \dots & h_{k,u_{n-k+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ gu_n & h_{1,u_n} & \dots & h_{k,u_n} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_0(g) = \det \begin{pmatrix} g & h_1 & \dots & h_k \\ gu_{n-k+1} & h_{1,u_{n-k+1}} & \dots & h_{k,u_{n-k+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ gu_n & h_{1,u_n} & \dots & h_{k,u_n} \end{pmatrix}.$$

Пусть $g_1, g_2 \in \mathcal{H}$. Предположим, что $g_1, g_2, h_1, \dots, h_k$ линейно независимы. Псевдопотенциал $A_{n,k}(p, u_1, \dots, u_n, \tau)$, определенный параметрически формулой

$$A_{n,k} = P_{n,k}(g_1, \xi), \quad p = P_{n,k}(g_2, \xi), \quad (22)$$

называется *эллиптическим псевдопотенциалом дефекта k* .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $g_0, g_1, \dots, g_{n-k}, h_1, \dots, h_k$ – базис в $\mathcal{H}$, а псевдопотенциалы B_α определены формулами

$$B_\alpha = P_{n,k}(g_\alpha, \xi), \quad p = P_{n,k}(g_0, \xi), \quad \alpha = 1, \dots, n-k.$$

Тогда условия совместности для системы (16) эквивалентны следующей системе уравнений в частных производных относительно $u_1, \dots, u_n, \tau$:

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq \beta \leq n-k} (\Delta_0(g_q) \Delta_\beta(g_r) - \Delta_0(g_r) \Delta_\beta(g_q)) \left(u_{\beta, t_s} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\beta + \eta)}{\theta(u_\beta + \eta)} - \frac{\theta'(\eta)}{\theta(\eta)} \right) \tau_{t_s} \right) + \\ & + \sum_{1 \leq \beta \leq n-k} (\Delta_0(g_r) \Delta_\beta(g_s) - \Delta_0(g_s) \Delta_\beta(g_r)) \times \\ & \times \left(u_{\beta, t_q} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\beta + \eta)}{\theta(u_\beta + \eta)} - \frac{\theta'(\eta)}{\theta(\eta)} \right) \tau_{t_q} \right) + \\ & + \sum_{1 \leq \beta \leq n-k} (\Delta_0(g_s) \Delta_\beta(g_q) - \Delta_0(g_q) \Delta_\beta(g_s)) \times \\ & \times \left(u_{\beta, t_r} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\beta + \eta)}{\theta(u_\beta + \eta)} - \frac{\theta'(\eta)}{\theta(\eta)} \right) \tau_{t_r} \right) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{1 \leq \beta \leq n-k, \\ \beta \neq \alpha}} \frac{\theta(u_\beta)\theta(u_\alpha - u_\beta - \eta)}{\theta(u_\beta + \eta)\theta(u_\alpha - u_\beta)} (\Delta_\alpha(g_r)\Delta_\beta(g_q) - \Delta_\alpha(g_q)\Delta_\beta(g_r)) \times \\
& \quad \times \left(u_{\alpha, t_s} - u_{\beta, t_s} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\alpha - u_\beta - \eta)}{\theta(u_\alpha - u_\beta - \eta)} - \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} \right) \tau_{t_s} \right) + \\
& \quad + \sum_{\substack{1 \leq \beta \leq n-k, \\ \beta \neq \alpha}} \frac{\theta(u_\beta)\theta(u_\alpha - u_\beta - \eta)}{\theta(u_\beta + \eta)\theta(u_\alpha - u_\beta)} (\Delta_\alpha(g_s)\Delta_\beta(g_r) - \Delta_\alpha(g_r)\Delta_\beta(g_s)) \times \\
& \quad \times \left(u_{\alpha, t_q} - u_{\beta, t_q} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\alpha - u_\beta - \eta)}{\theta(u_\alpha - u_\beta - \eta)} - \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} \right) \tau_{t_q} \right) + \\
& \quad + \sum_{\substack{1 \leq \beta \leq n-k, \\ \beta \neq \alpha}} \frac{\theta(u_\beta)\theta(u_\alpha - u_\beta - \eta)}{\theta(u_\beta + \eta)\theta(u_\alpha - u_\beta)} (\Delta_\alpha(g_q)\Delta_\beta(g_s) - \Delta_\alpha(g_s)\Delta_\beta(g_q)) \times \\
& \quad \times \left(u_{\alpha, t_r} - u_{\beta, t_r} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\alpha - u_\beta - \eta)}{\theta(u_\alpha - u_\beta - \eta)} - \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} \right) \tau_{t_r} \right) - \\
& \quad - (s_1 + \dots + s_n) \frac{\theta'(0)\theta(u_\alpha - \eta)}{\theta(\eta)\theta(u_\alpha)} (\Delta_0(g_q)\Delta_\alpha(g_r) - \Delta_0(g_r)\Delta_\alpha(g_q)) \times \\
& \quad \times \left(u_{\alpha, t_s} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\alpha - \eta)}{\theta(u_\alpha - \eta)} - \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} \right) \tau_{t_s} \right) - \\
& \quad - (s_1 + \dots + s_n) \frac{\theta'(0)\theta(u_\alpha - \eta)}{\theta(\eta)\theta(u_\alpha)} (\Delta_0(g_r)\Delta_\alpha(g_s) - \Delta_0(g_s)\Delta_\alpha(g_r)) \times \\
& \quad \times \left(u_{\alpha, t_q} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\alpha - \eta)}{\theta(u_\alpha - \eta)} - \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} \right) \tau_{t_q} \right) - \\
& \quad - (s_1 + \dots + s_n) \frac{\theta'(0)\theta(u_\alpha - \eta)}{\theta(\eta)\theta(u_\alpha)} (\Delta_0(g_s)\Delta_\alpha(g_q) - \Delta_0(g_q)\Delta_\alpha(g_s)) \times \\
& \quad \times \left(u_{\alpha, t_r} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\theta'(u_\alpha - \eta)}{\theta(u_\alpha - \eta)} - \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} \right) \tau_{t_r} \right) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-k, \quad (24)
\end{aligned}$$

u

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\Delta_\alpha(g_r)\theta(u_\alpha)\theta(u_\beta - u_\alpha - \eta)}{\Delta\theta(u_\alpha + \eta)\theta(u_\beta - u_\alpha)} u_{\alpha, t_s} - S_{n,k}(g_r, u_\beta)u_{\beta, t_s} - \\
& \quad - \frac{1}{2\pi i} \left(S'_{n,k}(g_r, u_\beta) - \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} S_{n,k}(g_r, u_\beta) \right) \tau_{t_s} = \\
& = \sum_{\alpha=1}^{n-k} \frac{\Delta_\alpha(g_s)\theta(u_\alpha)\theta(u_\beta - u_\alpha - \eta)}{\Delta\theta(u_\alpha + \eta)\theta(u_\beta - u_\alpha)} u_{\alpha, t_r} - S_{n,k}(g_s, u_\beta)u_{\beta, t_r} - \\
& \quad - \frac{1}{2\pi i} \left(S'_{n,k}(g_s, u_\beta) - \frac{\theta'(-\eta)}{\theta(-\eta)} S_{n,k}(g_s, u_\beta) \right) \tau_{t_r}, \quad \beta = n-k+1, \dots, n. \quad (25)
\end{aligned}$$

Здесь q, r, s меняются от 0 до n и $t_0 = x$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При заданных t_1, t_2, t_3 теорема 2 приводит к системе вида (1) с $m = n + 1, l = n + k + 1$, обладающей псевдопотенциальным представлением. Действительно, формула (25) при $q, r, s = 1, 2, 3$ дает $3k$ линейно независимых уравнений. Формулы (23), (24) дают $n - k + 1$ уравнений. С другой стороны, можно построить ровно k линейных комбинаций уравнений (25) с $q, r, s = 1, 2, 3$ таких, что производные функции $u_i, i = n - k + 1, \dots, n$, сокращаются. Оказывается, что эти линейные комбинации линейно зависимы с уравнениями (23), (24). Поэтому существует $(n - k + 1) + 3k - k = n + k + 1$ линейно независимых уравнений.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Мы должны считать, что в (23)–(25) $n \geq k + 2$. Действительно, для $n = k + 1$ мы не можем построить более чем один псевдопотенциал, поэтому не существует $(2+1)$ -мерной системы (1), связанной с этим случаем. Тем не менее, соответствующий псевдопотенциал порождает интересные интегрируемые $(1+1)$ -мерные системы гидродинамического типа (см. раздел 5). Вероятно, эти псевдопотенциалы для $k = 0, 1, \dots$ также связаны с некоторыми бесконечными цепочками типа цепочки Бенни [17], [18].

Система (23)–(25) обладает законами сохранения гидродинамического типа. В частности, следующее утверждение может быть проверено непосредственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любых $r, s = 0, 1, \dots, n, r \neq s$, система (23)–(25) имеет k законов сохранения вида

$$\left(\frac{\Delta(g_r, h_1, \dots, \hat{i}, \dots, h_k)}{\Delta(h_1, \dots, h_k)} \right)_{t_s} = \left(\frac{\Delta(g_s, h_1, \dots, \hat{i}, \dots, h_k)}{\Delta(h_1, \dots, h_k)} \right)_{t_r}, \quad (26)$$

где $i = 1, \dots, k$, а символ $\hat{i}$ означает отсутствие среди аргументов элемента h_i . Здесь

$$\Delta(f_1, \dots, f_k) = \det \begin{pmatrix} f_{1, u_{n-k+1}} & \cdots & f_{k, u_{n-k+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1, u_n} & \cdots & f_{k, u_n} \end{pmatrix}.$$

Предложение 4 позволяет определить функции $z_1, \dots, z_k$ такие, что

$$\frac{\Delta(g_r, h_1, \dots, \hat{i}, \dots, h_k)}{\Delta(h_1, \dots, h_k)} = z_{i, t_r}, \quad i = 1, \dots, k, \quad r = 0, 1, \dots, n. \quad (27)$$

Предположим, что $n+1 \geq 3k$. Тогда система (1), полученная из системы (23)–(25) с $q, r, s = 1, 2, 3$, состоит из $3k$ уравнений (25) (они эквивалентны уравнениям (26)) и $n+1-2k$ уравнений (23), (24). Действительно, только $n+1-2k$ уравнений (23), (24) линейно независимы с (25). Выражая $\tau, u_1, \dots, u_{3k-1}$ через $z_{i, t_1}, z_{i, t_2}, z_{i, t_3}, i = 1, \dots, k$, из (27) и подставляя результат в $n+1-2k$ уравнений (23), (24), мы получим систему из $n+1-2k$ уравнений относительно $n+1-2k$ неизвестных $z_1, \dots, z_k, u_{3k}, \dots, u_n$. Это трехмерная квазилинейная система второго порядка относительно z_i и первого порядка относительно u_j , коэффициенты которой зависят от $z_{i, t_1}, z_{i, t_2}, z_{i, t_3}, i = 1, \dots, k$, и $u_{3k}, \dots, u_n$. Ясно, что ее общее решение может быть локально параметризовано с помощью $n+1-k$ функций от двух аргументов.

В случае $2k \leq n+1 < 3k$ функции $z_{i,t_1}, z_{i,t_2}, z_{i,t_3}$, $i = 1, \dots, k$, функционально зависимы. Мы имеем $3k - n - 1$ уравнений вида

$$R_i(z_{1,t_1}, z_{1,t_2}, z_{1,t_3}, \dots, z_{k,t_1}, z_{k,t_2}, z_{k,t_3}) = 0, \quad i = 1, \dots, 3k - n - 1,$$

и $n+1-2k$ квазилинейных уравнений второго порядка. Всего имеется $(3k-n-1) + (n+1-2k) = k$ уравнений относительно k неизвестных функций $z_1, \dots, z_k$. Ясно, что ее общее решение локально параметризуется с помощью $n+1-k$ функций от двух аргументов.

Предположим, что $n+1 < 2k$. Тогда имеем $n+1+k < 3k$, и это означает, что $3k$ уравнений (25) линейно зависимы. По-видимому, в этом случае общее решение тоже может быть локально параметризовано с помощью $n+1-k$ функций двух переменных.

Одним из наиболее интересных случаев является $n+1 = 3k$, когда мы имеем систему k квазилинейных уравнений второго порядка относительно функций $z_1, \dots, z_k$. В простейшем случае $k = 2$.

5. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ $(1+1)$ -МЕРНЫЕ СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РЕДУКЦИИ

В этом разделе мы приводим интегрируемые $(1+1)$ -мерные системы гидродинамического типа (9), описанные в терминах эллипτικο-гипергеометрических функций. Эти системы возникают как так называемые гидродинамические редукции наших эллиптических псевдопотенциалов $A_{n,k}$. Результаты и формулы этого раздела похожи на соответствующие результаты и формулы из работы [1].

Под интегрируемостью системы (9) мы понимаем существование у нее бесконечного числа гидродинамических коммутирующих потоков и законов сохранения. Известно [13], что это условие эквивалентно следующим соотношениям для скоростей $v^i(r^1, \dots, r^N)$:

$$\partial_j \frac{\partial_i v^k}{v^i - v^k} = \partial_i \frac{\partial_j v^k}{v^j - v^k}, \quad i \neq j \neq k. \quad (28)$$

Здесь $\partial_\alpha = \partial/\partial r^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, N$. Если выполнены условия (28), система (9) называется *полугамильтоновой*.

Основным геометрическим объектом, связанным с полугамильтоновой системой (9), является диагональная метрика g_{kk} , $k = 1, \dots, N$, где

$$\frac{1}{2} \partial_i \ln g_{kk} = \frac{\partial_i v^k}{v^i - v^k}, \quad i \neq k. \quad (29)$$

В силу (28) переопределенная система (29) совместна, и функция g_{kk} определяется с точностью до произвольного множителя $\eta_k(r^k)$. Метрика g_{kk} называется *метрикой, ассоциированной с системой (9)*. Известно, что две системы гидродинамического типа совместны, если и только если они обладают общей ассоциированной метрикой [13].

Рассмотрим систему (11)–(13). Легко проверить, что система (11), (12) находится в инволюции, и поэтому ее общее решение допускает локальную параметризацию с помощью $2N$ функций одной переменной. При фиксированном решении ξ_i , τ системы (11), (12) система (13) находится в инволюции и, следовательно, имеет однопараметрическое семейство решений.

Пусть $\xi_1(r^1, \dots, r^N)$, $\dots$, $\xi_N(r^1, \dots, r^N)$, $\tau(r^1, \dots, r^N)$, $u_1(r^1, \dots, r^N)$, $\dots$, $u_n(r^1, \dots, r^N)$ – решение системы (11)–(13). Рассмотрим следующую систему гидродинамического типа:

$$r_t^i = \frac{S_{n,k}(g_1, \xi_i)}{S_{n,k}(g_2, \xi_i)} r_x^i, \quad (30)$$

где g_1 , g_2 – линейно независимые решения системы (4), многочлены $S_{n,k}$, $k > 0$, определены формулой (21), а $S_{n,0} = S_n$ (см. (8)).

ТЕОРЕМА 3. Система (30) является полугамильтоновой. Ее ассоциированная метрика задается формулой

$$g_{ii} = \left(S_{n,k}(g_2, \xi_i) e^{2\pi i r(\tau - \xi_i)} \frac{\theta'(0)^{-s_1 - \dots - s_n} \theta(u_1)^{s_1} \dots \theta(u_n)^{s_n}}{\theta(\xi_i)^{-s_1 - \dots - s_n} \theta(\xi_i - u_1)^{s_1} \dots \theta(\xi_i - u_n)^{s_n}} \right)^2 \partial_i \tau.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Диагональная метрика g_{ii} называется метрикой егоровского типа, если существует потенциал G такой, что $g_{ii} = \partial_i G$ для всех i . Метрики из теоремы 3, вообще говоря, не являются метриками егоровского типа. Однако при очень специальных значениях параметров s_i в (4) существует решение $g_2 \in \mathcal{H}$ такое, что метрика является егоровской для любого решения системы (11)–(13). Егоровские метрики играют важную роль в теории ВДВВ-уравнений ассоциативности и в теории фробениусовых многообразий [7], [16].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Предположим, что решение $\xi_1, \dots, \xi_N$, τ , $u_1, \dots, u_n$ системы (11)–(13) фиксировано. Тогда системы гидродинамического типа

$$r_{t_1}^i = \frac{S_{n,k}(g_1, \xi_i)}{S_{n,k}(g_3, \xi_i)} r_x^i, \quad r_{t_2}^i = \frac{S_{n,k}(g_2, \xi_i)}{S_{n,k}(g_3, \xi_i)} r_x^i \quad (31)$$

совместны для любых g_1 , g_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Некоторые совместные системы вида (31) можно также строить, используя предложение 3. Положим в (31) $g_2 = Z(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \tau)$. Здесь u_{n+1} – произвольное решение системы (13) (в которой n заменено на $n+1$), отличное от $u_1, \dots, u_n$. Ясно, что уравнения (31) совместны для такого g_2 и любого $g_1 \in \mathcal{H}$. Более того, из предложения 3 следует, что уравнения (31) совместны, если положить $g_1 = Z(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \tau)$, $g_2 = Z(u_1, \dots, u_n, u_{n+2}, \tau)$ для произвольных решений u_{n+1} , u_{n+2} системы (13).

Все члены иерархии, построенной в предложении 5, допускают бездисперсионное представление Лакса вида

$$L_t = \{L, A\}, \quad (32)$$

где $\{L, A\} = A_p L_x - A_x L_p$, с одним и тем же $L = L(p, r^1, \dots, r^N)$. А именно, определим функцию $L(\xi, r^1, \dots, r^N)$ с помощью следующей системы:

$$\partial_\alpha L = -\frac{1}{2\pi i} (\rho(\xi_\alpha - \xi) - \rho(\xi_\alpha)) L_\xi \partial_\alpha \tau, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (33)$$

Легко проверить, что система (33) находится в инволюции, и поэтому функция $L(\xi, r^1, \dots, r^N)$ определена однозначно с точностью до несущественного преобразования $L \rightarrow \lambda(L)$. Для того чтобы найти функцию $L(p, r^1, \dots, r^N)$, нужно выразить ξ через p из (6) для $k = 0$ или из (22) для $k > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $u_1, \dots, u_n$ – произвольное решение системы (13). Тогда система (30) допускает бездисперсионное представление Лакса (32), где $A = A_{n,k}$ определен формулой (6) при $k = 0$ и формулой (22) при $k > 0$.

Покажем, что интегрируемые двумерные системы (30) определяют гидродинамические редукции для псевдопотенциалов и трехмерных систем из разделов 3 и 4.

В работах [11], [14] и [19] в терминах гидродинамических редукций было дано определение интегрируемости для систем (1), (2) и (32) соответственно.

Предположим, что существуют пара совместных полугамильтоновых систем гидродинамического типа,

$$r_{t_1}^i = v_1^i(r^1, \dots, r^N) r_x^i, \quad r_{t_2}^i = v_2^i(r^1, \dots, r^N) r_x^i, \quad (34)$$

и функции $u_i = u_i(r^1, \dots, r^N)$, удовлетворяющие (1) для любого решения систем (34). Тогда (34) называется *гидродинамической редукцией* для (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [11]. Система вида (1) называется *интегрируемой*, если уравнение (1) допускает достаточно много гидродинамических редукций для каждого $N \in \mathbb{N}$.

“Достаточно много” означает, что множество гидродинамических редукций может быть локально параметризовано $2N$ функциями одной переменной. Отметим, что по модулю калибровочных преобразований $r^i \rightarrow \lambda_i(r^i)$ мы имеем только N существенных функциональных параметров для гидродинамических редукций.

Предположим, что существуют полугамильтонова система гидродинамического типа (9) и функции $u_i = u_i(r^1, \dots, r^N)$, $L = L(p, r^1, \dots, r^N)$, удовлетворяющие бездисперсионному уравнению Лакса (32) для любого решения $r^1(x, t), \dots, r^N(x, t)$ системы (9). Тогда (9) называется *гидродинамической редукцией* для (32).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [19]. Бездисперсионное уравнение Лакса (32) называется *интегрируемым*, если оно допускает достаточно много гидродинамических редукций для каждого $N \in \mathbb{N}$. Соответствующий псевдопотенциал $A(p, u_1, \dots, u_n)$ мы также называем интегрируемым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [1]. Два интегрируемых псевдопотенциала A_1, A_2 называются *согласованными*, если система

$$L_{t_1} = \{L, A_1\}, \quad L_{t_2} = \{L, A_2\}$$

допускает достаточно много гидродинамических редукций (34) для каждого $N \in \mathbb{N}$.

Если псевдопотенциалы A_1, A_2 согласованы, то $A = c_1 A_1 + c_2 A_2$ интегрируем для любых постоянных c_1, c_2 . Действительно, система

$$r_t^i = (c_1 v_1^i(\mathbf{r}) + c_2 v_2^i(\mathbf{r})) r_x^i$$

является гидродинамической редукцией для (32).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Под трехмерной системой, *ассоциированной* с согласованной парой A_1, A_2 мы подразумеваем систему вида (1), эквивалентную условиям совместности для системы

$$\psi_{t_2} = A_1(\psi_{t_1}, u_1, \dots, u_n), \quad \psi_{t_3} = A_2(\psi_{t_1}, u_1, \dots, u_n). \quad (35)$$

Ясно, что система, ассоциированная с парой согласованных псевдопотенциалов, допускает достаточно много гидродинамических редукций и поэтому интегрируема в смысле определения 1.

Следующее утверждение является переформулировкой предложения 6.

ТЕОРЕМА 4. Система (30) является гидродинамической редукцией псевдопотенциала $A_{n,k}$, определенного формулой (6) при $k = 0$ и формулой (22) при $k > 0$. Напомним, что мы используем обозначения $S_n \stackrel{\text{def}}{=} S_{n,0}$, $A_n \stackrel{\text{def}}{=} A_{n,0}$, $P_n \stackrel{\text{def}}{=} P_{n,0}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Предположим, что $g_1, g_2, g_3, h_1, \dots, h_k \in \mathcal{H}$ линейно независимы. Определим псевдопотенциалы A_1, A_2 формулами

$$A_1 = P_{n,k}(g_1, \xi), \quad A_2 = P_{n,k}(g_2, \xi), \quad p = P_{n,k}(g_3, \xi).$$

Тогда A_1 и A_2 согласованы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что система (11)–(13), (33) не содержит g_1, g_2, g_3 , и поэтому мы имеем семейство функций L, ξ_i, u_i, τ , задающих гидродинамические редукции вида (30) обоих псевдопотенциалов A_1 и A_2 . Кроме того, согласно предложению 7 системы

$$r_{t_1}^i = \frac{S_{n,k}(g_1, \xi_i)}{S_{n,k}(g_3, \xi_i)} r_x^i, \quad r_{t_2}^i = \frac{S_{n,k}(g_2, \xi_i)}{S_{n,k}(g_3, \xi_i)} r_x^i$$

совместны.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Из этого результата следует, что трехмерные системы, построенные в разделах 3, 4, допускают достаточно много гидродинамических редукций и поэтому интегрируемы в смысле определения 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Используя предложение 3, можно построить согласованные псевдопотенциалы A_1 и A_2 , зависящие от разного числа переменных u_i . Действительно, пусть $g_1, g_3, h_1, \dots, h_k \in \mathcal{H}$ и $g_2 = Z(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \tau)$. Тогда A_2 зависит от $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \tau$, а A_1 зависит только от $u_1, \dots, u_n, \tau$.

Благодарности. Авторы благодарны И. М. Кричеверу, М. В. Павлову, В. П. Спиридонову, Б. Л. Фейгину и В. А. Шрамченко за полезные обсуждения. В. В. Соколов был частично поддержан РФФИ (гранты № 08-01-464, 09-01-9244КЭ) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3472.2008.2).

Список литературы

- [1] A. Odesskii, V. Sokolov, *Integrable pseudopotentials related to generalized hypergeometric functions*, [arxiv:0803.0086](#).
- [2] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Петух, *УМН*, **47**:4(286) (1992), 3–82.
- [3] V. E. Zakharov, “Dispersionless limit of integrable systems in $2 + 1$ dimensions”, *Singular Limits of Dispersive Waves*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., **320**, eds. N. M. Ercolani, I. R. Gabitov, C. D. Levermore, D. Serre, Plenum, New York, 1994, 165–174.
- [4] I. M. Krichever, *Comm. Math. Phys.*, **143**:2 (1992), 415–429.
- [5] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **13**:3 (1979), 13–22.
- [6] I. M. Krichever, *Comm. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475.
- [7] В. А. Дубровин, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable Systems and Quantum Groups*, Lecture Notes in Math., **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, 1996, 120–348.
- [8] A. V. Odesskii, *Selecta Math.*, **13**:4 (2008), 727–742.
- [9] В. П. Спиридонов, *УМН*, **63**:3(381) (2008), 3–72.
- [10] J. Gibbons, S. P. Tsarev, *Phys. Lett. A*, **211**:1 (1996), 19–24; **258**:4–6 (1999), 263–271.
- [11] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, *Comm. Math. Phys.*, **248**:1 (2004), 187–206; *J. Phys. A*, **37**:8 (2004), 2949–2963.
- [12] В. А. Дубровин, С. П. Новиков, *УМН*, **44**:6(270) (1989), 29–98.
- [13] С. П. Царев, *ДАН СССР*, **282**:3 (1985), 534–537; С. П. Царев, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:5 (1990), 1048–1068.
- [14] M. V. Pavlov, *Comm. Math. Phys.*, **272**:2 (2007), 469–505.
- [15] V. A. Shramchenko, *J. Phys. A*, **36**:42 (2003), 10585–10605; [arxiv:math-ph/0402014](#).
- [16] А. А. Ахметшин, Ю. С. Вольвовский, И. М. Кричевер, *УМН*, **54**:2(326) (1999), 167–168.
- [17] E. V. Ferapontov, D. G. Marshall, *Math. Ann.*, **339**:1 (2007), 61–99.
- [18] M. V. Pavlov, *J. Phys. A*, **39**:34 (2006), 10803–10819.
- [19] А. В. Одесский, М. В. Павлов, В. В. Соколов, *ТМФ*, **154**:2 (2008), 249–260.

Поступила в редакцию 11.11.2008