Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Чугреев, Единственность вакуумного космологического решения в релятивистской теории гравитации, *ТМФ*, 2009, том 161, номер 1, 115–119

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6424>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:58:40

© 2009 г.

Ю. В. Чугреев *

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВАКУУМНОГО КОСМОЛОГИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Показано, что хотя уравнения релятивистской теории гравитации и допускают существование нетривиальных вакуумных космологических решений, все подобные решения противоречат принципу причинности. Поэтому вакуумное космологическое решение единственно и тривиально: гравитационное поле равно нулю.

Ключевые слова: релятивистская теория гравитации, космологическое решение, масса гравитона, вакуум.

Изучение эволюции фридмановской (однородной и изотропной) Вселенной в релятивистской теории гравитации (РТГ) основывается на следующем выборе исходных метрик [1], [2]:

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{d\tau^2}{a^6(\tau)} - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = d\tau^2 - \beta^4 a^2(\tau)(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)),$$

где $\beta = \text{const}$, $a(\tau)$ – масштабный фактор. Уравнения РТГ

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) + \frac{m^2}{2} (g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}),$$

$$D_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0,$$

где $T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}p$ – тензор энергии-импульса вещества, в этом случае принимают вид

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d\tau^2} = -4\pi(\rho + 3p) - \frac{m^2}{6} \left(1 - \frac{1}{a^6} \right), \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho + \frac{m^2}{12} \left(\frac{3}{a^2 \beta^4} - 2 - \frac{1}{a^6} \right). \quad (2)$$

*Институт теоретических проблем микромира им. Н. Н. Боголюбова, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: chugreev@goa.bog.msu.ru, Yuri-Chugreev@yandex.ru

Давление p и плотность ρ идеальной жидкости предполагаются функциями одной переменной – времени τ сопутствующей системы координат. Для простоты мы выбираем также $G = \hbar = c = 1$.

Обычно при описании эволюции однородной и изотропной Вселенной в РТГ с массивными гравитонами отмечается, что “при отсутствии вещества и гравитационных волн уравнения (1), (2) имеют тривиальное решение $\alpha = \beta = 1$, т.е. эволюции пустой Вселенной не происходит и эффективное риманово пространство совпадает с пространством Минковского” (см. [2], с.129).

В настоящей работе показано, что это утверждение действительно справедливо, хотя и с некоторой оговоркой, а именно: отсутствие нетривиальных вакуумных ($T_{\mu\nu} = 0$) космологических решений обеспечивается в данном случае лишь соблюдением условий принципа причинности.

Итак, для пустого пространства из (1), (2) находим

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d\tau^2} = -\frac{m^2}{6} \left(1 - \frac{1}{a^6}\right), \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau}\right)^2 = \frac{m^2}{12} \left(\frac{3}{a^2 \beta^4} - 2 - \frac{1}{a^6}\right). \quad (4)$$

Уравнение (3) не является независимым: оно представляет собой следствие уравнения (4) и специального выбора метрики эффективного риманова пространства (см. [1], [2]).

Сравнивая уравнения (4) и (2), замечаем, что положительный член $m^2/4\beta^2 a^2$ в данном случае играет роль эффективной плотности вещества ρ по аналогии с традиционным космологическим сценарием, а отрицательные члены $-m^2/6$ и $-m^2/12a^6$ по-прежнему обеспечивают наличие двух точек поворота $a_{\max}$ и $a_{\min}$ соответственно.

Отметим, что случай

$$\rho_{\text{эфф}} = \frac{3m^2}{32\pi\beta^4} \frac{1}{a^2}$$

соответствует уравнению состояния квинтэссенции

$$p = \omega \rho \quad (5)$$

с $\omega = -1/3$, поскольку $\rho = \text{const}/a^{3(1+\omega)}$. В этом случае уравнение (1) также переходит в уравнение (3).

Значение $\omega = -1/3$ соответствует предельному случаю квинтэссенции $\nu = 2/3$, где $\nu = \omega + 1$ [2], [3].

Поскольку постоянная β пока не фиксирована, нужно выяснить, при каких ее значениях подобные осциллирующие сценарии возможны в принципе и соблюдается ли для них принцип причинности.

Рассмотрим функцию

$$f(a) = \frac{3}{a^2 \beta^4} - 2 - \frac{1}{a^6}, \quad 0 \leq a < \infty. \quad (6)$$

Очевидно, что $f(a) \rightarrow -\infty$ при $a \rightarrow 0$ и $f(a) \rightarrow -2$ при $a \rightarrow \infty$. Поэтому уравнение (4) будет иметь нетривиальное осциллирующее решение, если только функция

$f(a)$ будет положительной в некоторой непустой области. Для существования этой области необходимо и достаточно, чтобы максимум функции $f(a)$ был положителен, т.е. чтобы она “поднялась” над горизонтальной осью. Найдем этот максимум $a = a^*$. В этой точке $df/da = 0$, откуда имеем

$$a^* = \beta, \quad f(a^*) = 2 \left(\frac{1}{\beta^6} - 1 \right). \quad (7)$$

Поэтому условие существования нетривиального космологического решения с отличными от единицы $a_{\max}$ и $a_{\min}$ будет определяться неравенством

$$\beta < 1. \quad (8)$$

Случай $\beta = 1$ приводит лишь к тривиальному результату $a = 1$, $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$, так как в этом случае уравнение (4) принимает вид

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{m^2}{12} \frac{(a^2 - 1)^2 (2a^2 + 1)}{a^6} \leq 0.$$

Найдем $a_{\max}$ и $a_{\min}$ при $\beta < 1$. Из (4) следует, что они будут определяться корнями кубического уравнения

$$x^3 - \frac{3x}{\beta^4} + 2 = 0,$$

где $x \equiv a^{-2}$. Эти корни равны

$$x_1 = \frac{2}{\beta^2} \cos \frac{\alpha}{3}, \quad x_{2,3} = -\frac{2}{\beta^2} \cos \left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{\pi}{3} \right), \quad (9)$$

и $\cos \alpha = -\beta^6$. Так как $\cos(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}) \geq \sqrt{3}/2$, то корень $x_3 = -\frac{2}{\beta^2} \cos(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3})$ отрицателен, поэтому он не отвечает никакому вещественному значению a . Поскольку корни $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, а их разность положительна:

$$x_1 - x_2 = \frac{2}{\beta^2} \sin \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \geq \frac{\sqrt{3}}{\beta^2} > 0,$$

то

$$a_{\max} = \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \quad a_{\min} = \frac{1}{\sqrt{x_1}}. \quad (10)$$

С помощью (9), (10) получим окончательно

$$a_{\max} = \frac{\beta}{\sqrt{2 \sin(\varepsilon/3)}}, \quad a_{\min} = \frac{\beta}{\sqrt{\sqrt{3} \cos(\varepsilon/3) - \sin(\varepsilon/3)}}, \quad (11)$$

$$\sin \varepsilon = \beta^6, \quad \varepsilon = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Несложно убедиться в том, что при $0 < \beta < 1$

$$1 < a_{\max} < \infty, \quad 1 > a_{\min} > 0. \quad (12)$$

В этом случае, как и следовало ожидать, $\ddot{a}(a_{\max}) < 0$ и $\ddot{a}(a_{\min}) > 0$ (см. (3)).

Найдем асимптотики (11) при $\beta \ll 1$:

$$a_{\max} = \frac{\sqrt{3/2}}{\beta^2} \gg 1, \quad a_{\min} = \frac{\beta}{\sqrt[4]{3}} \ll 1, \quad (13)$$

которые также легко получить из (4). Для $\beta \ll 1$ можно с хорошей точностью найти закон движения $a = a(\tau)$, пренебрегая в (4) членом $-m^2/12a^6$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{m^2}{6} \frac{(a_{\max}^2 - a^2)}{a^2}, \quad (14)$$

откуда

$$a(\tau) = a_{\max} \left| \sin \frac{m\tau}{\sqrt{6}} \right|. \quad (15)$$

Таким образом, период циклического развития Вселенной не зависит от β , а определяется массой гравитона:

$$T = \frac{\sqrt{6}\pi}{m}. \quad (16)$$

Также не зависит от параметра β и величина минимальной эффективной плотности вещества

$$\rho_{\text{эфф}}(a_{\max}) = \frac{m^2}{16\pi},$$

в то время как максимальная эффективная плотность равна

$$\rho_{\text{эфф}}(a_{\min}) = \frac{3\sqrt{3}m^2}{32\pi\beta^6} = \frac{3\sqrt{3}}{2\beta^6} \rho_{\text{эфф}}(a_{\max}).$$

Параметр замедления q в этом случае (точнее, при $a \gg a_{\min}$) положителен:

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{a}{\dot{a}}\right)^2 = \frac{a^2}{a_{\max}^2 - a^2} = \text{tg} \left(\frac{m\tau}{\sqrt{6}} \right)^2 > 0,$$

т.е. ускоренного движения для такого сценария нет (квинтэссенция имеет режим $q < 0$ лишь при $\nu < 2/3$ [2], [3]).

Таким образом, уравнения поля (1), (2), казалось бы, допускают существование нетривиальных вакуумных космологических сценариев, похожих на традиционные фридмановские сценарии с $T_{\mu\nu} \neq 0$. Единственное условие для их существования – ограничение $\beta < 1$. Однако именно это условие противоречит принципу причинности и делает невозможным существование подобных осцилляций.

Действительно, принцип причинности требует [1], [2], чтобы для любого изотропного в пространстве Минковского вектора U^μ такого, что

$$\gamma_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0, \quad (17)$$

квадратичная форма $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu$ была неположительна:

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \leq 0. \quad (18)$$

Для выбранных нами $g_{\mu\nu}$ и $\gamma_{\mu\nu}$ из (17) и (18) следует неравенство

$$\beta^4 \geq a^4.$$

Оно будет выполнено, если $\beta \geq a_{\max}$. Учитывая, что $a_{\max} > 1$ (см. (11), (12)), необходимое условие соблюдения принципа причинности получим в виде

$$\beta > 1, \quad (19)$$

что противоречит условию существования нетривиального осциллирующего сценария (8).

Таким образом, космологический вакуум в РТГ с массивными гравитонами единственный и тривиальный $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$, а гравитационное поле равно нулю, что и требовалось доказать.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность А. А. Логунову и М. А. Мествиришвили за ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] М. А. Мествиришвили, Ю. В. Чугреев, *ТМФ*, **80:2** (1989), 305–312.
- [2] А. А. Логунов, *Релятивистская теория гравитации*, Наука, М., 2006.
- [3] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, Н. П. Ткаченко, *ЭЧАЯ*, **36:5** (2005), 1003–1050.

Поступила в редакцию 4.12.2008