Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. П. Волобуев, А. С. Михайлов, Ю. С. Михайлов,
М. Н. Смоляков, Гравитация в стабилизированной моде-
ли мира на бране в пятимерной теории Бранса–Дикке,
ТМФ, 2009, том 161, номер 1, 120–135

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6425>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:27:39

© 2009 г. И. П. Волобуев*, А. С. Михайлов[†], Ю. С. Михайлов[†],
М. Н. Смоляков*

ГРАВИТАЦИЯ В СТАБИЛИЗИРОВАННОЙ МОДЕЛИ МИРА НА БРАНЕ В ПЯТИМЕРНОЙ ТЕОРИИ БРАНСА–ДИККЕ

В стабилизированной модели мира на бране в пятимерной теории Бранса–Дикке получены и решены линеаризованные уравнения движения для гравитационного и скалярного полей. Выделены физические степени свободы, найден спектр масс возмущений Калуцы–Клейна, а также константы связи мод Калуцы–Клейна с материей на бране с отрицательным натяжением.

Ключевые слова: теории Калуцы–Клейна, теория Бранса–Дикке, браны, стабилизация радиона, линеаризованная гравитация.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время широко обсуждаются модели с дополнительными измерениями пространства-времени, в которых фундаментальный энергетический масштаб, определяемый пятимерной массой Планка, лежит в области нескольких ТэВ. Наиболее известной и интересной с феноменологической точки зрения является модель Рэндалл–Сундрума [1]. Эта модель описывает систему из двух бран, взаимодействующих с гравитацией в пятимерном пространстве-времени, и предлагает оригинальное решение проблемы иерархии гравитационного взаимодействия [1]–[3]. Однако у модели Рэндалл–Сундрума имеется существенный недостаток: расстояние между бранами не фиксируется параметрами модели. Это приводит к тому, что в эффективных четырехмерных теориях на бранах появляется безмассовое скалярное поле – радион. Константа связи этого поля с материей на бране с отрицательным натяжением, где предположительно локализованы поля Стандартной Модели, оказывается очень большой, что противоречит экспериментальным данным даже на уровне классической гравитации [2], [4].

* Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобелевича Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: volobuev@theory.sinp.msu.ru, smolyakov@theory.sinp.msu.ru

[†] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: mikhailov@theory.sinp.msu.ru

Эта проблема была решена введением в теорию дополнительного скалярного поля, распространяющегося во всем пятимерном пространстве. Наиболее последовательная модель была предложена в работе [5], где были найдены точные решения уравнений движения для фоновой конфигурации метрики и скалярного поля. При этом размер дополнительного измерения в этой модели задается граничными условиями на бранах. Однако фоновое решение для метрики в этой модели имеет более сложный вид, чем в модели Рэндалл–Сундрума. Оказалось, что решить линеаризованные уравнения движения аналитически в этом случае возможно только при определенных значениях параметров модели, когда решение для метрики можно аппроксимировать решением нестабилизированной модели Рэндалл–Сундрума [6]. Возникает вопрос: существует ли стабилизированное решение в системе двух бран, в котором фоновое решение для метрики имеет вид простого решения модели Рэндалл–Сундрума? Оказалось, что этого можно добиться, если стабилизирующее скалярное поле неминимально взаимодействует с гравитацией. Такая модель впервые обсуждалась в работе [7]. В то же время решение для скалярного поля в этой модели имеет достаточно сложный вид.

Одной из стандартных форм неминимального взаимодействия скалярного поля с гравитацией является линейное взаимодействие со скалярной кривизной, используемое в теории Бранса–Дикке. Оказалось, что в рамках пятимерной теории Бранса–Дикке можно построить стабилизированную модель с двумя бранами, в которой решение для метрики имеет такой же вид, как и решение в модели Рэндалл–Сундрума, в то время как решение для скалярного поля также является простой экспоненциальной функцией [8].

В настоящей работе изучается линеаризованная гравитация в стабилизированной модели мира на бране, предложенной в работе [8]. Оказалось, что в этой модели, в отличие от стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума [5], благодаря простоте фонового решения линеаризованные уравнения движения можно решить аналитически при любых значениях параметров модели. Также в настоящей работе вычисляются константы связи физических степеней свободы с материей на бране с отрицательным натяжением, для которой решается проблема иерархий гравитационного взаимодействия, и описывается спектр масс мод Калуцы–Клейна.

2. ФОНОВОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим в пятимерном пространстве-времени $E = M_4 \times S^1/Z_2$ гравитацию, взаимодействующую с двумя бранами и скалярным полем ϕ . Обозначим координаты в E через $\{x^M\} = \{x^\mu, y\}$, $M = 0, 1, 2, 3, 4$, где $\{x^\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, – координаты в четырехмерном пространстве-времени, а координата $y \equiv x^4$ соответствует пятому дополнительному измерению. Оно образует орбифолд S^1/Z_2 , представляющий собой окружность диаметра $2L/\pi$ с отождествленными точками y и $-y$. В соответствии с этим метрика g_{MN} и скалярное поле ϕ удовлетворяют условиям симметрии

орбифолда

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x, -y) &= g_{\mu\nu}(x, y), & g_{\mu 4}(x, -y) &= -g_{\mu 4}(x, y), \\ g_{44}(x, -y) &= g_{44}(x, y), & \phi(x, -y) &= \phi(x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Браны расположены в неподвижных точках орбифолда $y = 0$ и $y = L$.

Действие модели записывается в виде

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \int_{-L}^L dy \sqrt{-g} \left(\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi - V(\phi) \right) - \\ - \int_{y=0} \sqrt{-\tilde{g}} \lambda_1(\phi) d^4x - \int_{y=L} \sqrt{-\tilde{g}} \lambda_2(\phi) d^4x, \end{aligned} \quad (2)$$

где $V(\phi)$ – потенциал скалярного поля в пятимерном пространстве, $\lambda_{1,2}(\phi)$ – потенциалы на бранах, ω – пятимерный параметр Бранса–Дикке, $\tilde{g}_{\mu\nu}$ обозначает индуцированную на бранах метрику, сигнатура метрики g_{MN} выбрана равной $(-, +, +, +, +)$, а индексы 1 и 2 различают браны.

Решение для метрики будем искать в стандартном виде, сохраняющем пуанкаре-инвариантность в четырехмерном пространстве-времени:

$$ds^2 = \gamma_{MN} dx^M dx^N = e^{2\sigma(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (3)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ есть метрика Минковского, а решение для скалярного поля в виде

$$\phi(x, y) = \phi(y). \quad (4)$$

Функции $\sigma(y)$, $\phi(y)$ определяются из уравнений движения [8]

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\phi} (\phi'' + 4\sigma' \phi') - 4\sigma'' - 10(\sigma')^2 - \\ - \frac{\omega}{2\phi^2} (\phi')^2 - \frac{1}{2} \frac{dV}{d\phi} - \frac{1}{2} \frac{d\lambda_1}{d\phi} \delta(y) - \frac{1}{2} \frac{d\lambda_2}{d\phi} \delta(y-L) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$6(\sigma')^2 \phi - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\phi} (\phi')^2 - V \right) + 4\sigma' \phi' = 0, \quad (6)$$

$$3\sigma'' \phi + \frac{\omega}{\phi} (\phi')^2 + \phi'' - \sigma' \phi' + \frac{1}{2} \lambda_1 \delta(y) + \frac{1}{2} \lambda_2 \delta(y-L) = 0. \quad (7)$$

Здесь и далее штрих означает производную $\partial_4 = \partial/\partial y$.

Выберем потенциалы скалярного поля в пятимерном пространстве и на бранах в виде

$$V(\phi) = \Lambda \phi, \quad \lambda_{1,2} = \pm \lambda \phi. \quad (8)$$

Тогда функции $\sigma(y)$, $\phi(y)$, являющиеся решением уравнений (5)–(7), имеют вид

$$\sigma = -k|y| + C, \quad \phi = C_1 e^{-u|y|}, \quad (9)$$

где

$$u = \sqrt{\frac{-\Lambda}{(3\omega+4)(4\omega+5)}}, \quad k = (\omega+1)u, \quad \lambda = 4\sqrt{-\Lambda} \sqrt{\frac{3\omega+4}{4\omega+5}}. \quad (10)$$

Фоновое решение для метрики в этом случае действительно имеет такой же вид, как и в случае нестабилизированной модели Рэндалл–Сундрума [1]. Нас будет интересовать случай, когда, как и в модели Рэндалл–Сундрума, материя находится на бране в точке $y = L$. При выборе $C = kL$ четырехмерные координаты на бране в точке $y = L$ становятся галилеевыми (см. [2]–[4]).

Для фиксации размера дополнительного измерения добавим к потенциалам на бранах слагаемые

$$\Delta\lambda_{1,2} = \frac{\beta_{1,2}^2}{2}(\phi - v_{1,2})^2. \quad (11)$$

В этом случае уравнения движения будут выполняться, если

$$\phi|_{y=0} = C_1 = v_1, \quad \phi|_{y=L} = v_2. \quad (12)$$

Таким образом, расстояние между бранами определяется граничными условиями на бранах для поля ϕ и выражается через параметры потенциала следующим образом:

$$L = \frac{1}{u} \ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right). \quad (13)$$

Мы будем считать, что $v_1 \simeq v_2$ и $uL < 1$, а $kL \approx 35$, что возможно при $\omega > 35$. Отметим, что стабилизация достигается благодаря зависимости решения для скалярного поля от координаты дополнительного измерения. Параметры потенциалов $v_{1,2}$, приведенные к безразмерному виду с помощью фундаментального пятимерного масштаба теории Λ , следует считать положительными величинами порядка $O(1)$, т.е. в параметрах модели не должно содержаться иерархического различия масштабов.

Как уже было отмечено, пятимерное скалярное поле в стабилизированных моделях обычно минимально взаимодействует с гравитацией [5]. В случае неминимального взаимодействия существуют конформные преобразования, с помощью которых можно привести действие к форме эйнштейновского действия, в котором скалярное поле минимально взаимодействует с гравитацией. Для действия вида (2) эти преобразования явно выписаны в работе [8] (вместе с координатными преобразованиями, приводящими фоновую метрику к стандартному виду). Различие между исходным и конформно-преобразованным действиями определяется тем, как материя на бранах взаимодействует с гравитацией, т.е. в какой метрике “мы живем”. Оказалось, что если “мы живем” в мире, в котором пятимерное поле неминимально взаимодействует с пятимерной кривизной, более удобно рассматривать линейаризованную гравитацию, используя исходное непреобразованное действие. Это позволяет упростить нахождение спектра масс мод Калуцы–Клейна и констант взаимодействия этих мод с материей на бранах. Однако конформные преобразования позволяют упростить выбор калибровочных условий, необходимых для выделения физических степеней свободы. Выбору таких условий посвящен раздел 3.

3. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ВЫБОР КАЛИБРОВКИ

Для описания линеаризованной гравитации сначала необходимо построить лагранжиан второй вариации модели. Для этого параметризуем метрику и скалярное поле следующим образом:

$$g_{MN}(x, y) = \gamma_{MN}(y) + h_{MN}(x, y), \quad \phi(x, y) = \phi(y) + f(x, y), \quad (14)$$

где $\phi(y)$ – фоновое решение для скалярного поля. Подставим (14) в действие (2) и сохраним члены второго порядка по возмущениям (в дальнейшем под ϕ будем подразумевать фоновое решение $\phi(y)$). Мы не будем выписывать получившийся лагранжиан второй вариации в явном виде из-за его громоздкости, а выпишем линеаризованные уравнения движения для флуктуаций метрики и стабилизирующего скалярного поля, вытекающие из этого лагранжиана:

1) $\mu\nu$ -компонента:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left[\phi(\partial_\sigma \partial^\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\sigma h_{\sigma\nu} - \partial_\nu \partial^\sigma h_{\sigma\mu} + \partial_4 \partial_4 h_{\mu\nu}) + \phi \partial_\mu \partial_\nu \tilde{h} + \right. \\ & + \phi \partial_\mu \partial_\nu h_{44} - \phi \partial_4 (\partial_\mu h_{4\nu} + \partial_\nu h_{4\mu}) - 2\sigma' \phi (\partial_\mu h_{4\nu} + \partial_\nu h_{4\mu}) + \\ & + \phi \gamma_{\mu\nu} (-\partial_4 \partial_4 \tilde{h} - \partial_\sigma \partial^\sigma h_{44} - \partial_\sigma \partial^\sigma \tilde{h} - 4\sigma' \partial_4 \tilde{h} + 3\sigma' \partial_4 h_{44} + \\ & + \partial_\sigma \partial_\tau h^{\sigma\tau} + 2\partial^\sigma \partial_4 h_{\sigma 4} + 4\sigma' \partial^\sigma h_{4\sigma}) - 2h_{\mu\nu} (2(\sigma')^2 \phi + \sigma'' \phi + \sigma' \phi') + \\ & + 3h_{44} \gamma_{\mu\nu} (4(\sigma')^2 + \sigma'') - \phi' (\partial_\mu h_{\nu 4} + \partial_\nu h_{\mu 4} - \partial_4 h_{\mu\nu}) + 2\partial_\mu \partial_\nu f + \\ & + \gamma_{\mu\nu} \phi' \left(\partial_4 h_{44} + 2\partial^\sigma h_{\sigma 4} - \partial_4 \tilde{h} + 7\sigma' h_{44} - 2\frac{\omega}{\phi} f' - 8\frac{\omega}{\phi} f \sigma' \right) + \\ & + \gamma_{\mu\nu} \left(h_{44} \phi'' - 2f'' - 2\partial_\sigma \partial^\sigma f + 2f \sigma'' + \right. \\ & \left. + 8f(\sigma')^2 + 2\frac{\omega}{\phi^2} f(\phi')^2 - 2\frac{\omega}{\phi} f \phi'' - 6\sigma' f' \right) \left. \right] = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

2) $\mu 4$ -компонента:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\phi \partial_4 (\partial_\mu \tilde{h} - \partial^\nu h_{\mu\nu}) + \phi \partial^\nu (\partial_\nu h_{\mu 4} - \partial_\mu h_{\nu 4}) - 3\sigma' \phi \partial_\mu h_{44} + \right. \\ & \left. + 2\partial_\mu \partial_4 f - 2\sigma' \partial_\mu f - \phi' \partial_\mu h_{44} + 2\frac{\omega}{\phi} \partial_\mu f \phi' \right] = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

3) 44-компонента:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left[\phi \partial^\mu (\partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial_\mu \tilde{h}) + 6\phi \sigma' \partial^\mu h_{\mu 4} - 3\phi \sigma' \partial_4 \tilde{h} - 12f(\sigma')^2 + \right. \\ & + 12\phi h_{44}(\sigma')^2 + 2\phi' \left(\partial^\mu h_{\mu 4} + 4\sigma' h_{44} - \frac{1}{2} \partial_4 \tilde{h} \right) - 2\partial_\mu \partial^\mu f - \\ & \left. - 8\sigma' f' - \frac{\omega}{\phi^2} (\phi')^2 f + 2\frac{\omega}{\phi} \phi' f' - \frac{\omega}{\phi} (\phi')^2 h_{44} - \frac{dV}{d\phi} f \right] = 0; \end{aligned} \quad (17)$$

4) уравнение для поля f :

$$\begin{aligned}
 & \partial^\mu (\partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial_\mu h_{44} - \partial_\mu \tilde{h} + 2\partial_4 h_{\mu 4}) - \partial_4 \partial_4 \tilde{h} + \\
 & + \partial^\mu h_{\mu 4} \left(10\sigma' - 2\frac{\omega}{\phi} \phi' \right) + \partial_4 h_{44} \left(4\sigma' - \frac{\omega}{\phi} \phi' \right) + \partial_4 \tilde{h} \left(-5\sigma' + \frac{\omega}{\phi} \phi' \right) - \\
 & - h_{44} \left(\frac{dV}{d\phi} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda_1}{d\phi} \delta(y) + \frac{1}{2} \frac{d\lambda_2}{d\phi} \delta(y-L) \right) + \\
 & + f \left(2\frac{\omega}{\phi^3} (\phi')^2 - 8\frac{\omega}{\phi^2} \sigma' \phi' - 2\frac{\omega}{\phi^2} \phi'' - \frac{d^2 V}{d\phi^2} - \frac{d^2 \lambda_1}{d\phi^2} \delta(y) - \right. \\
 & \left. - \frac{d^2 \lambda_2}{d\phi^2} \delta(y-L) \right) + f' \left(8\frac{\omega}{\phi} \sigma' - 2\frac{\omega}{\phi^2} \phi' \right) + 2\frac{\omega}{\phi} f'' + 2\frac{\omega}{\phi} \partial^\mu \partial_\mu f = 0, \quad (18)
 \end{aligned}$$

где $h = \gamma_{MN} h^{MN}$, $\tilde{h} = \gamma_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$, ∇_M обозначает ковариантную производную в смысле метрики γ_{MN} . Отметим, что эти же уравнения получаются при линейаризации общих уравнений Эйнштейна и скалярного уравнения, получающихся из действия (2), на фоне вакуумного решения вида (3), (4).

Обсудим теперь калибровочную инвариантность линейаризованной теории. Нетрудно проверить, что квадратичное действие инвариантно относительно следующих калибровочных преобразований:

$$h_{MN}^{(\prime)} = h_{MN} - (\nabla_M \xi_N + \nabla_N \xi_M), \quad f^{(\prime)} = f - \phi' \xi_4,$$

если функции ξ^M удовлетворяют условиям симметрии орбифолда

$$\xi^\mu(x, -y) = \xi^\mu(x, y), \quad \xi^4(x, -y) = -\xi^4(x, y) \quad (19)$$

(штрих $(\prime)$ обозначает преобразованное поле). Эти преобразования являются следствием инвариантности действия (2) относительно координатных преобразований. Аналогичные калибровочные преобразования для тензорного поля в модели Рэндалл–Сундрума без скалярного поля и в стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума обсуждались в работах [4], [6], [9], [10]. Их можно использовать для выделения физических степеней свободы полей h_{MN} и f . Однако можно упростить данную задачу. Действительно, для случая минимального взаимодействия стабилизирующего поля в общем случае были найдены калибровочные условия, позволяющие выделить физические степени свободы, а также доказана возможность наложения этих условий [6]. Воспользовавшись конформными преобразованиями, дополненными координатными преобразованиями и описанными в работе [8], можно из калибровок, соответствующих минимальному взаимодействию стабилизирующего поля с гравитацией, получить калибровки, соответствующие действию (2) и фоновой метрике вида (3):

$$\partial_4 \left[\left(h_{44} + \frac{2}{3} \frac{f}{\phi} \right) e^{2\sigma} \phi^{2/3} \right] = \frac{4}{3} \left(\omega + \frac{4}{3} \right) e^{2\sigma} \frac{\phi'}{\phi^{4/3}} f, \quad h_{\mu 4} = 0. \quad (20)$$

Аналогичным образом найдем подстановку, позволяющую расцепить уравнения движения (15)–(18) и в дальнейшем диагонализировать лагранжиан второй вариации:

$$h_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} h_{44} - \gamma_{\mu\nu} \frac{f}{\phi}, \quad (21)$$

где $b_{\mu\nu}$ – поперечно-бесследовое поле.

В калибровке (20) и с учетом (21) уравнение (16) выполняется тождественно. Уравнение (15) принимает вид

$$\frac{1}{2} \left(\partial_\sigma \partial^\sigma b_{\mu\nu} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} b_{\mu\nu} \right) - b_{\mu\nu} \left(2(\sigma')^2 + \sigma'' + \sigma' \frac{\phi'}{\phi} \right) + \frac{\phi'}{2\phi} b'_{\mu\nu} = 0. \quad (22)$$

Уравнение для 44-компоненты (17) заметно упрощается, если его переписать на интервале $(0, L)$, вводя новую функцию

$$g = e^{2\sigma(y)} \phi^{2/3} \left(h_{44}(x, y) + \frac{2}{3} \frac{f}{\phi} \right),$$

а также используя связь потенциала V с функциями σ и ϕ (6):

$$g'' + g' \left(\frac{5}{3} \frac{\phi'}{\phi} - 2\sigma' - 2 \frac{\phi''}{\phi'} \right) - \frac{2}{3} \frac{(\phi')^2}{\phi^2} \left(\omega + \frac{4}{3} \right) g + \partial_\mu \partial^\mu g = 0. \quad (23)$$

Заметим, что уравнение (17) не содержит вторых производных по координате дополнительного измерения и членов с δ -функциями. Таким образом, из уравнения (17) не следуют какие-либо граничные условия на бранах.

В терминах функции g подстановка (21) и калибровочные условия, позволяющие расцепить уравнения движения, принимают вид

$$h_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} e^{-2\sigma} \phi^{-2/3} g - \frac{2}{3} \gamma_{\mu\nu} \frac{f}{\phi}, \quad (24)$$

$$h_{44} = e^{-2\sigma} \phi^{-2/3} g - \frac{2}{3} \frac{f}{\phi}, \quad (25)$$

$$g' = \frac{4}{3} \left(\omega + \frac{4}{3} \right) e^{2\sigma} \frac{\phi'}{\phi^{4/3}} f, \quad (26)$$

$$h_{\mu 4} = 0, \quad \tilde{b} = \gamma_{\mu\nu} b^{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\nu b_{\mu\nu} = 0. \quad (27)$$

Отметим, что поле g есть суперпозиция h_{44} компоненты флуктуаций метрики и флуктуации f стабилизирующего скалярного поля.

Подстановка (24)–(27) в уравнение (18) приводит к уравнению во всем пятимерном пространстве, получающемуся дифференцированием уравнения (23) по y , и граничным условиям на бранах

$$\begin{aligned} \left(\frac{\phi''}{\phi'} - \frac{1}{4} \frac{\phi}{\omega + 4/3} \frac{d^2 \lambda_1}{d\phi^2} + \frac{1}{3\omega + 4} \left(\omega \frac{\phi'}{\phi} - 4\sigma' \right) \right) g' - \partial_\mu \partial^\mu g \Big|_{y=+0} &= 0, \\ \left(\frac{\phi''}{\phi'} + \frac{1}{4} \frac{\phi}{\omega + 4/3} \frac{d^2 \lambda_2}{d\phi^2} + \frac{1}{3\omega + 4} \left(\omega \frac{\phi'}{\phi} - 4\sigma' \right) \right) g' - \partial_\mu \partial^\mu g \Big|_{y=L-0} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Обсудим вывод условий (28) более подробно. Уравнение (18) содержит вторые производные по координате дополнительного измерения и члены с δ -функциями. Стандартными методами, используя условия симметрии орбифолда (1), можно получить граничные условия на бранах. Эти граничные условия, в частности, будут содержать член $\sim f'$. С учетом (26) это означает, что граничные условия будут содержать члены со вторыми производными по координате дополнительного измерения $\sim g''$. Используя уравнения (23)–(25), (27), получаем условия (28), содержащие члены $\sim \partial_\mu \partial^\mu g$. Отметим, что условия такого типа обычно возникают в моделях типа Двали–Габададзе–Поррати с индуцированными на бране членами кривизны [11]. В рассматриваемом нами случае механизм возникновения членов $\sim \partial_\mu \partial^\mu g$ в граничных условиях другой. Граничные условия типа (28) характерны не только для стабилизированных моделей с неминимальным взаимодействием скалярного поля с гравитацией, но и для обычных стабилизированных моделей, в которых используется калибровка, позволяющая выделить физические степени свободы [6], что отличается от случая более простых моделей [12], в частности от исходной модели Рэндалл–Сундрума [4].

В случае фонового решения (9), (10) граничные условия существенно упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{\phi}{\omega + 4/3} \beta_1^2 g' + \partial_\mu \partial^\mu g \Big|_{y=+0} &= 0, \\ \frac{1}{4} \frac{\phi}{\omega + 4/3} \beta_2^2 g' - \partial_\mu \partial^\mu g \Big|_{y=L-0} &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Следует отметить, что такое упрощение граничных условий имеет место для целого класса фоновых решений в пятимерной теории Бранса–Дикке, а именно, когда уравнения движения для фоновой конфигурации полей могут быть сведены к дифференциальным уравнениям первого порядка [8].

4. СПЕКТР МАСС МОД КАЛУЦЫ–КЛЕЙНА И ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ЭФФЕКТИВНЫЙ ЛАГРАНЖИАН

Рассмотрим сначала моды тензорного поля $b_{\mu\nu}$, которое удовлетворяет уравнению (22). Для нахождения спектра масс и волновых функций мод в дополнительном измерении представим поле $b_{\mu\nu}$ в виде

$$b_{\mu\nu}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\mu\nu}^n(x) \psi_n(y), \quad \square b_{\mu\nu}^n(x) = m_n^2 b_{\mu\nu}^n(x), \quad (30)$$

где $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$. Подставляя это разложение в (22), получаем

$$e^{-2\sigma} m_n^2 \psi_n + \psi_n'' - \left(4(\sigma')^2 + 2\sigma'' + 2\sigma' \frac{\phi'}{\phi} \right) \psi_n + \frac{\phi'}{\phi} \psi_n' = 0. \quad (31)$$

Граничные условия, следующие из уравнения (31), могут быть получены интегрированием этого уравнения в бесконечно малой окрестности точек $y = 0$, $y = L$ и

имеют вид

$$\psi'_n - 2\sigma'\psi_n|_{y=+0} = 0, \quad (32)$$

$$\psi'_n - 2\sigma'\psi_n|_{y=L-0} = 0. \quad (33)$$

В результате подстановки

$$\psi_n = \omega_n e^{2\sigma} \quad (34)$$

в терминах функции ω_n граничные условия принимают простой вид

$$\omega'_n|_{y=+0} = 0, \quad (35)$$

$$\omega'_n|_{y=L-0} = 0, \quad (36)$$

а уравнение (31) легко преобразуется к форме Штурма–Лиувилля

$$(e^{4\sigma}\phi\omega'_n)' + m_n^2 e^{2\sigma}\phi\omega_n = 0. \quad (37)$$

Формулы (35)–(37) определяют задачу Штурма–Лиувилля с граничными условиями Неймана. Из общей теории (см., например, [13]) следует, что для положительной весовой функции $e^{2\sigma}\phi$ все собственные значения рассматриваемой задачи действительные и неотрицательные, при этом единственное нулевое собственное значение отвечает $\omega_0 = \text{const}$.

Собственные функции ω_n , отвечающие разным собственным значениям, ортогональны с весом $e^{2\sigma}\phi$. Функции ψ_n , связанные с ними формулой (34), мы будем нормировать условием

$$\int_{-L}^L \phi e^{-2\sigma} \psi_n \psi_k dy = \delta_{nk}. \quad (38)$$

Отметим, что нормированное решение для нулевой моды имеет вид

$$\psi_0(y) = \sqrt{\frac{k+u/2}{v_1}} \frac{e^{-kL}}{\sqrt{1-e^{-2kL-uL}}} e^{2kL-2k|y|}, \quad (39)$$

при $u \ll k$ и $kL \approx 35$

$$\psi_0(L) \approx \sqrt{\frac{k}{v_1}} e^{-kL}. \quad (40)$$

В случае массивных мод уравнение (31) в области $(0, L)$ решается стандартным образом (см., например, [4], [6]): переходом к переменной $z = m_n e^{ky-kL}/k$ получаем

$$\psi_n(z) = z^a (AJ_\alpha(z) + BJ_{-\alpha}(z)), \quad (41)$$

где $J_\alpha(z)$ – функция Бесселя, $a = u/(2k)$, $\alpha = 2 + u/(2k)$. В разделе 5 мы покажем, что для воспроизведения ньютоновской гравитации на бране в точке L при сильной пятимерной гравитации нужно взять $kL \approx 35$. В этом случае с большой точностью можно считать $z|_{y=0} = m_n e^{-kL}/k \approx 0$, и граничное условие в нуле позволяет не учитывать сингулярный член $J_{-\alpha}(z)$ в (41), так как $B/A \sim e^{-2\alpha kL}$ и возникающие

поправки пренебрежимо малы. Граничное условие в точке L дает нам спектр масс тензорных мод Калуцы–Клейна, которое имеет вид

$$J_{\alpha-1}\left(\frac{m_n}{k}\right) = 0. \quad (42)$$

Заметим, что при $u = 0$ воспроизводится уравнение на спектр масс тензорных мод в нестабилизированной модели Рэндалл–Сундрума $J_1(m_n/k) = 0$ [4]. Нормировочный множитель A определяется интегралом (38), и нормированные волновые функции массивных тензорных мод принимают вид

$$\psi_n(y) = \sqrt{\frac{k}{v_1}} e^{u|y|/2} \frac{J_\alpha((m_n/k)e^{k|y|-kL})}{J_\alpha(m_n/k)}. \quad (43)$$

В точке $y = L$ функция $\psi_n(y)|_{y=L}$ принимает простой вид

$$\psi_n(y)|_{y=L} = \sqrt{\frac{k}{v_2}}. \quad (44)$$

Теперь рассмотрим скалярный сектор модели. Для того чтобы найти спектр масс скалярных частиц, описываемых уравнением (22), будем искать g в виде

$$g(x, y) = e^{ipx} g_n(y), \quad p^2 = -\mu_n^2.$$

В результате уравнение (23) и граничные условия (29) для $g_n(y)$ принимают вид

$$g_n'' + g_n' \left(\frac{5}{3} \frac{\phi'}{\phi} - 2\sigma' - 2 \frac{\phi''}{\phi'} \right) - \frac{2}{3} \frac{(\phi')^2}{\phi^2} \left(\omega + \frac{4}{3} \right) g_n + e^{-2\sigma} \mu_n^2 g_n = 0, \quad (45)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\phi}{\omega + 4/3} \beta_1^2 g_n' + e^{-2\sigma} \mu_n^2 g_n \Big|_{y=+0} = 0, \quad (46)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\phi}{\omega + 4/3} \beta_2^2 g_n' - e^{-2\sigma} \mu_n^2 g_n \Big|_{y=L-0} = 0. \quad (47)$$

Уравнение (45) также может быть записано в форме Штурма–Лиувилля

$$\left(g_n' \frac{\phi^{5/3} e^{-2\sigma}}{(\phi')^2} \right)' - \frac{2}{9} (3\omega + 4) \frac{e^{-2\sigma}}{\phi^{1/3}} g_n + \frac{\phi^{5/3} e^{-4\sigma}}{(\phi')^2} \mu_n^2 g_n = 0, \quad (48)$$

однако граничные условия (46), (47) имеют нестандартный вид, так как включают в себя собственные значения μ_n^2 . Нетрудно увидеть, что оператор (48) с этими граничными условиями не является самосопряженным. Тем не менее граничные условия (46) и (47) очень похожи на стандартные граничные условия Штурма–Лиувилля и позволяют сделать определенные заключения о спектре и собственных функциях рассматриваемой задачи.

Умножим уравнение (48) на g_k и проинтегрируем по координате дополнительного измерения от 0 до L . Интеграл, содержащий слагаемое с g'_n , можно взять по частям, что с учетом граничных условий (46) и (47) дает

$$\begin{aligned} \int_0^L dy \left(\frac{\phi^{5/3} e^{-2\sigma}}{(\phi')^2} g'_n g'_k + \frac{2}{9} (3\omega + 4) \frac{e^{-2\sigma}}{\phi^{1/3}} g_n g_k \right) = \\ = \mu_n^2 \left(\int_0^L dy \frac{\phi^{5/3} e^{-4\sigma}}{(\phi')^2} g_n g_k + \frac{\phi^{5/3} e^{-4\sigma}}{(\phi')^2} \frac{4(3\omega + 4)}{3\beta_1^2 \phi} g_n g_k \Big|_{y=0} + \right. \\ \left. + \frac{\phi^{5/3} e^{-4\sigma}}{(\phi')^2} \frac{4(3\omega + 4)}{3\beta_2^2 \phi} g_n g_k \Big|_{y=L} \right). \end{aligned} \quad (49)$$

При $n = k$, $\beta_{1,2}^2 > 0$ и $g_n(y) \not\equiv 0$ интеграл в левой части (49), а также выражение в скобках в правой части (49) положительны, и, следовательно, все собственные значения рассматриваемой задачи действительные и положительные, $\mu_n^2 > 0$. Для случая $\mu_0 = 0$ получаем $g_0(y) \equiv 0$. Таким образом, скалярный сектор не содержит тахионов и нулевой моды с $\mu_0 = 0$.

Далее, интегрируя первое слагаемое в левой части (49) еще раз по частям, с учетом (46)–(48) получаем

$$\begin{aligned} (\mu_n^2 - \mu_k^2) \left(\int_0^L dy \frac{\phi^{5/3} e^{-4\sigma}}{(\phi')^2} g_n g_k + \frac{\phi^{5/3} e^{-4\sigma}}{(\phi')^2} \frac{4(3\omega + 4)}{3\beta_1^2 \phi} g_n g_k \Big|_{y=0} + \right. \\ \left. + \frac{\phi^{5/3} e^{-4\sigma}}{(\phi')^2} \frac{4(3\omega + 4)}{3\beta_2^2 \phi} g_n g_k \Big|_{y=L} \right) = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

что подразумевает при $n \neq k$ и $\mu_n \neq \mu_k$

$$\begin{aligned} \int_0^L dy \frac{\phi^{5/3} e^{-4\sigma}}{(\phi')^2} g_n g_k + \frac{\phi^{5/3} e^{-4\sigma}}{(\phi')^2} \frac{4(3\omega + 4)}{3\beta_1^2 \phi} g_n g_k \Big|_{y=0} + \\ + \frac{\phi^{5/3} e^{-4\sigma}}{(\phi')^2} \frac{4(3\omega + 4)}{3\beta_2^2 \phi} g_n g_k \Big|_{y=L} = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Формулу (51) можно записать в виде интеграла по окружности S^1 (с учетом условий симметрии орбифлекда (1)) и нормировать собственные функции условием

$$\begin{aligned} \mu_n^2 \int_{-L}^L dy \frac{\phi^{5/3} e^{-4\sigma}}{(\phi')^2} \left(\frac{8(3\omega + 4)}{3\beta_1^2 \phi} \delta(y) + \frac{8(3\omega + 4)}{3\beta_2^2 \phi} \delta(y - L) + 1 \right) g_n g_k = \\ = \frac{8(3\omega + 4)}{27} \delta_{nk}. \end{aligned} \quad (52)$$

В соответствии с этим задачу Штурма–Лиувилля (46)–(48) с учетом условия симметрии орбифлекда (1) можно эквивалентно записать как задачу Штурма–Лиувилля на окружности с периодическими граничными условиями для функции g :

$$\left(g'_n \frac{\phi^{5/3} e^{-2\sigma}}{(\phi')^2}\right)' - \frac{2}{9}(3\omega + 4) \frac{e^{-2\sigma}}{\phi^{1/3}} g_n + \frac{\phi^{5/3} e^{-4\sigma}}{(\phi')^2} \left(\frac{8(3\omega + 4)}{3\beta_1^2 \phi} \delta(y) + \frac{8(3\omega + 4)}{3\beta_2^2 \phi} \delta(y - L) + 1\right) \mu_n^2 g_n = 0. \quad (53)$$

Отметим, что, в отличие от функции g , ее производная имеет разрывы на окружности. Уравнение (53) приводит к стандартному условию нормировки с весовой функцией, определяемой этим уравнением. Единственное отличие от стандартной теории состоит в том, что эта весовая функция содержит δ -функции, т.е. является обобщенной. Как мы показали, собственные значения μ_n^2 задачи (53) положительны, а система собственных функций является ортогональной с обобщенной весовой функцией. Однако вопрос о полноте этой системы оказывается намного более сложным.

Физические соображения подсказывают, что эта система функций полна, поскольку она содержит бесконечное число элементов, и, как будет показано ниже, разложение пятимерного скалярного поля по этой системе диагонализует соответствующую часть лагранжиана второй вариации. Кроме того, при $\beta_{1,2} \rightarrow \infty$ граничные условия (46), (47) переходят в граничные условия Неймана, и система собственных функций в этом случае, очевидно, полна. Математически строгое обсуждение аналогичных краевых задач с граничными условиями, одно из которых содержит собственное значение, можно найти в работе [14] и в цитируемой в ней литературе. Таким образом, мы будем считать, что пятимерное скалярное поле $g(x, y)$ можно разложить по этой системе:

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) g_n(y), \quad (54)$$

где четырехмерные скалярные поля $\varphi_n(x)$ имеют массы μ_n .

С учетом (9) и (10) уравнение (45) на интервале $(0, L)$ принимает вид

$$g''_n + g'_n \left(2k + \frac{u}{3}\right) - \frac{2}{3} u^2 \left(\omega + \frac{4}{3}\right) g_n + e^{2ky - 2kL} \mu_n^2 g_n = 0. \quad (55)$$

Перейдем к переменной $z = \mu_n e^{ky - kL} / k$ и абсолютно аналогично вычислениям, проведенным в работе [6] для скалярного сектора стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума, получаем

$$g_n(z) = z^q (A_n J_\gamma(z) + B_n J_{-\gamma}(z)), \quad (56)$$

где

$$q = -1 - \frac{u}{6k} = -\frac{6\omega + 7}{6\omega + 6}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{2u^2}{3k^2} \left(\omega + \frac{4}{3}\right) + q^2} = \frac{2\omega + 3}{2\omega + 2}.$$

Подставляя (56) в граничное условие в нуле, мы, так же как и в случае тензорных мод, можем пренебречь сингулярным членом $\sim J_{-\gamma}(z)$, т.е. $B_n = 0$. Граничное условие в L определяет спектр масс и принимает вид

$$J_{\gamma}\left(\frac{\mu_n}{k}\right)\left[1 + \frac{v_2\beta_2^2 k}{\mu_n^2(2\omega + 2)}\right] = J_{\gamma-1}\left(\frac{\mu_n}{k}\right)\frac{3v_2\beta_2^2}{4\mu_n(3\omega + 4)}. \quad (57)$$

Нормировочный коэффициент A_n может быть получен с помощью условия (52). Тогда функции $g_n(y)$ принимают вид

$$g_n(y) = A_n \left(\frac{\mu_n}{k} e^{k|y|-kL}\right)^q J_{\gamma}\left(\frac{\mu_n}{k} e^{k|y|-kL}\right), \quad (58)$$

$$A_n = \frac{u}{3\mu_n J_{\gamma}(\mu_n/k)} \left(\frac{\mu_n}{k}\right)^{-q} \times \\ \times \left[\frac{3}{8v_2^{1/3}k(3\omega + 4)} \left(1 - \frac{\gamma^2 k^2}{\mu_n^2} + \left(\frac{4(3\omega + 4)\mu_n}{3v_2\beta_2^2} - \frac{qk}{\mu_n}\right)^2\right) + \frac{1}{\beta_2^2 v_2^{4/3}} \right]^{-1/2}. \quad (59)$$

Для того чтобы получить эффективный четырехмерный лагранжиан теории (что позволит также проверить правильность выбора условий нормировки (38) и (52), которые обеспечивают правильные значения коэффициентов перед четырехмерными кинетическими членами полей), необходим лагранжиан второй вариации модели. Интересующая нас часть лагранжиана второй вариации оказывается равной

$$\frac{L_g}{\sqrt{-\gamma}} = \frac{1}{2}(-h^{\mu\nu} \times [\text{eq. (15)}]_{\mu\nu} - h^{44} \times [\text{eq. (17)}] + f \times [\text{eq. (18)}]), \quad (60)$$

где мы учли, что $h_{\mu 4} \equiv 0$, а [eq. (15)] $_{\mu\nu}$, [eq. (17)] и [eq. (18)] – левые части уравнений (15), (17) и (18) соответственно. На самом деле этот результат не удивителен, так как формула (60) фактически следует из определения лагранжиана второй вариации. Таким образом, можно получить лагранжиан второй вариации при наличии только линеаризованных уравнений движения для полей.

Подставляя (30) и (54) в лагранжиан второй вариации (60) с учетом (24)–(27), (38) и (52) и интегрируя по координате дополнительного измерения, получаем

$$S_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \int d^4x (\partial^{\sigma} b^{k,\mu\nu} \partial_{\sigma} b_{\mu\nu}^k + m_k^2 b^{k,\mu\nu} b_{\mu\nu}^k) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int d^4x (\partial_{\nu} \varphi_k \partial^{\nu} \varphi_k + \mu_k^2 \varphi_k \varphi_k). \quad (61)$$

Таким образом, мы получили эффективный лагранжиан теории, представляющий собой сумму стандартных четырехмерных лагранжианов тензорных и скалярных полей. Отметим, что кинетические члены полей в эффективном лагранжиане имеют правильный знак, т.е. в четырехмерной теории отсутствуют фантомные поля.

5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С МАТЕРИЕЙ

Взаимодействие четырехмерных полей $b_{\mu\nu}^n(x)$ и $\varphi_n(x)$ с полями на бранах определяется взаимодействием флуктуаций пятимерного гравитационного поля $h_{\mu\nu}$ с материей на бранах, которое имеет вид

$$\frac{1}{2} \int_{B_1} h_{\mu\nu}(x, 0) T_{(1)}^{\mu\nu} \sqrt{-\det \gamma_{\rho\sigma}(0)} d^4x + \frac{1}{2} \int_{B_2} h_{\mu\nu}(x, L) T_{(2)}^{\mu\nu} \sqrt{-\det \gamma_{\rho\sigma}(L)} d^4x, \quad (62)$$

где $T_{(1)}^{\mu\nu}$ и $T_{(2)}^{\mu\nu}$ – тензоры энергии-импульса материи на бране 1 и бране 2 соответственно.

В дальнейшем мы будем рассматривать поля только на бране в точке $y = L$, которая считается “нашей” браной. Подставим в (62) разложения (30), (54) и с учетом (24)–(26) и (47) получаем, что взаимодействие тензорных и скалярных полей с материей на бране в точке $y = L$ в галилеевых координатах определяется выражением

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{B_2} \left(\psi_0(L) b_{\mu\nu}^0(x) T^{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(L) b_{\mu\nu}^n(x) T^{\mu\nu} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} v_2^{-2/3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4\mu_n^2}{uv_2\beta_2^2} \right) g_n(L) \varphi_n(x) T_{\mu}^{\mu} \right) d^4x. \end{aligned} \quad (63)$$

Коэффициент перед нулевой модой тензорного поля $b_{\mu\nu}^0(x)$ определяет четырехмерную массу Планка на бране M_{Pl} , и с учетом (40) получаем

$$M_{Pl} = \psi_0^{-1}(L) \approx \sqrt{\frac{v_1}{k}} e^{kL}. \quad (64)$$

Если предположить, что $\sqrt{k/v_1} \sim 1 \text{ ТэВ}^{-1}$, а $kL \approx 35$, то получаем $M_{Pl} \sim 10^{19} \text{ ГэВ}$. Таким образом, на бране в точке $y = L$ проблема иерархии гравитационного взаимодействия решается так же, как и в модели Рэндалл–Сундрума. С учетом (44) для массивных тензорных мод константы связи с материей на бране имеют вид

$$\frac{\psi_n(L)}{2} \approx \sqrt{\frac{k}{4v_2}} \sim 1 \text{ ТэВ}^{-1}. \quad (65)$$

В случае $\omega > 35$ получаем $\alpha \approx 2$, и спектр масс тензорных мод практически не отличается от соответствующего спектра масс в нестабилизированной модели Рэндалл–Сундрума [4]. В этом случае $m_1 \approx 3.8k$ и может быть порядка 3–4 ТэВ.

Рассмотрим скалярный сектор и сначала отметим особенность констант взаимодействия скалярных мод. Теоретически возможна ситуация, когда при определенных значениях параметров

$$\mu_j = \sqrt{\frac{uv_2\beta_2^2}{4}}.$$

В этом случае j -я мода скалярного поля не будет взаимодействовать с материей.

Теперь оценим массу и константу связи легчайшей моды – поля радиона. Для упрощения расчетов рассмотрим предел бесконечно “жесткого” потенциала на бране: $\beta_2^2 \rightarrow \infty$. Предположим, что $\mu_1 < k$. Разлагая в (57) функции Бесселя до второго порядка по μ_1/k и решая полученное квадратное уравнение, имеем

$$\mu_1 \approx \frac{2k}{\sqrt{\omega}}. \quad (66)$$

Поскольку мы предположили, что $\omega > 35$, то $\mu_1 < k$, и мы действительно можем использовать разложения функций Бесселя.

Отметим, что при $\beta_2^2 \rightarrow \infty$, как следует из граничного условия (47), $g'_n(L) = 0$. Таким образом, из двух слагаемых в (63), описывающих взаимодействие скалярных мод с материей на бране, остается только одно, и константы взаимодействия принимают вид

$$\epsilon_n = -\frac{1}{4}v_2^{-2/3}g_n(L). \quad (67)$$

Для легчайшей моды (радиона) с учетом (66) и того факта, что $\omega > 35$, константа взаимодействия равна

$$\epsilon_1 \approx -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{15v_2}} \approx -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{4v_2}} \quad (68)$$

и в предположении, что $k^3 \sim v_2 \sim 1 \text{ ТэВ}^3$, оказывается $\epsilon_1 \sim 0.1 \text{ ТэВ}^{-1}$. Масса радиона в этом случае может быть порядка сотен ГэВ.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы рассмотрели стабилизированную модель в пятимерной теории Бранса–Дикке и получили уравнения движения для полей, описывающих возмущения над фоновым решением. Были найдены удобная калибровка и подстановка, позволившие расцепить уравнения движения и выделить физические степени свободы модели. Как и в случае стабилизированной модели со скалярным полем, минимально взаимодействующим с гравитацией, сектор тензорных полей отщепляется от скалярного сектора. Для случая фонового решения вида (9) найдены спектр масс тензорных и скалярных мод и константы взаимодействия с материей на бране в точке $y = L$, на которой предположительно находится наш мир. Показано, что эффективный четырехмерный лагранжиан не содержит тахионов и фантомных полей. Оказалось, что, в отличие от стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума, в случае фонового решения (9) линеаризованные уравнения движения можно решить аналитически для всех физически интересных значений параметров модели, т.е. эта модель является точно решаемой в линейном приближении. Этот факт может быть полезен для оценки влияния дополнительного измерения на процессы на бране при различных значениях параметров пятимерной теории.

Анализ тензорного и скалярного секторов показал, что при определенном выборе параметров модели масса радиона может быть порядка сотен ГэВ, а обратный размер дополнительного измерения и массы тензорных полей могут быть порядка ТэВ. Константы связи массивных тензорных и скалярных мод оказываются порядка ТэВ⁻¹. Что касается безмассового гравитона, то его константа связи оказывается $\sim M_{\text{Pl}}^{-1}$, т.е. на бране в точке $y = L$ решается проблема иерархии гравитационного взаимодействия.

Заметим, что явный вид фоновых полей $\sigma(y)$ и $\phi(y)$ мы использовали только для получения спектра масс и констант связи. Все результаты, связанные с выбором калибровки, расщеплением уравнений движения и структурой тензорного и скалярного секторов, справедливы для любого потенциала скалярного поля в стабилизированной модели в пятимерной теории Бранса–Дикке с фоновым решением вида (3), (4).

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 08-02-92499-НЦНИЛ-а) и Программой поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ-1456.2008.2). Работа М. Смолякова была также поддержана грантом Президента Российской Федерации МК-5602.2008.2, грантом фонда “Династия” и стипендией 2009 г. для молодых преподавателей и научных сотрудников Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Список литературы

- [1] L. Randall, R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.*, **83**:17 (1999), 3370–3373.
- [2] В. А. Рубаков, *УФН*, **171**:9 (2001), 913–938.
- [3] Yu. A. Kubyshin, *Models with extra dimensions and their phenomenology*, [arXiv:hep-ph/0111027](#).
- [4] Э. Э. Боос, И. П. Волобуев, Ю. А. Кубышин, М. Н. Смоляков, *ТМФ*, **131**:2 (2002), 216–230.
- [5] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, A. Karch, *Phys. Rev. D*, **62**:4 (2000), 046008.
- [6] Э. Э. Боос, И. П. Волобуев, Ю. С. Михайлов, М. Н. Смоляков, *ТМФ*, **149**:3 (2006), 339–353.
- [7] B. Grzadkowski, J. F. Gunion, *Phys. Rev. D*, **68**:5 (2003), 055002.
- [8] A. S. Mikhailov, Yu. S. Mikhailov, M. N. Smolyakov, I. P. Volobuev, *Class. Quant. Grav.*, **24**:1 (2007), 231–242.
- [9] I. Ya. Aref'eva, M. G. Ivanov, W. Mück, K. S. Viswanathan, I. V. Volovich, *Nucl. Phys. B*, **590**:1–2 (2000), 273–286.
- [10] Ch. Charmousis, R. Gregory, V. Rubakov, *Phys. Rev. D*, **62**:6 (2000), 067505.
- [11] G. R. Dvali, G. Gabadadze, M. Porrati, *Phys. Lett. B*, **485**:1–3 (2000), 208–214.
- [12] A. O. Barvinsky, *Phys. Rev. D*, **74**:8 (2006), 084033.
- [13] В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др., *Линейные уравнения математической физики*, Наука, М., 1964.
- [14] О. Ш. Мухтаров, М. Кадакал, *Сиб. матем. журн.*, **46**:4 (2005), 860–875.

Поступила в редакцию 27.10.2008,
после доработки 2.02.2009