Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Формула Грина для разностных операторов, *ТМФ*, 2009, том 161, номер 2, 147–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6427>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 18:00:57

© 2009 г.

В. В. Жаринов*

ФОРМУЛА ГРИНА ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Для разностных операторов на многомерной целочисленной решетке построен аналог классической формулы Грина для линейных операторов в частных производных.

Ключевые слова: формула Грина, целочисленная решетка, группа сдвигов, разностный оператор, разностный джет.

Формула Грина для уравнения Лапласа

$$\phi \cdot \Delta(\psi) - \Delta(\phi) \cdot \psi = \sum_{\alpha} \partial_{\alpha}(J^{\alpha}(\phi, \psi))$$

для всех $\phi, \psi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^D)$, где $J^{\alpha}(\phi, \psi) = \phi \cdot \partial_{\alpha}(\psi) - \partial_{\alpha}(\phi) \cdot \psi$, и ее обобщения на другие уравнения классической математической физики широко используются в теории уравнений в частных производных. Фактически подобная формула Грина справедлива для любой линейной системы уравнений в частных производных с переменными коэффициентами (см., например, работу [1]). В рамках алгебро-геометрического подхода (группового анализа) она имеет естественное обобщение и на нелинейные системы уравнений в частных производных (см., например, работы [2], [3]). Ниже аналогичная формула доказана для разностных систем уравнений на многомерной целочисленной решетке.

Введем следующие обозначения:

- 1) $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – числовое поле;
- 2) $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;
- 3) $\mathcal{A}$ – унитарная ассоциативная коммутативная $\mathbb{F}$ -алгебра;
- 4) $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ – $\mathcal{A}$ -модули.

1. ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ РЕШЕТКА

Для данного натурального $D \in \mathbb{N}$ положим $\mathbb{D} = \{1, 2, \dots, D\}$. Решетка (D -мерная целочисленная решетка) есть множество $\mathbb{L} = \mathbb{Z}^D$. На множестве $\mathbb{L}$ определены две алгебраические структуры: структура абелевой группы по сложению (*группы сдвигов*)

$$\mathbb{L} \ni m = (\mu^1, \dots, \mu^D), n = (\nu^1, \dots, \nu^D) \mapsto m + n = (\mu^1 + \nu^1, \dots, \mu^D + \nu^D) \in \mathbb{L}$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zharinov@mi.ras.ru

и структура свободного $\mathbb{Z}$ -модуля, где $\lambda m = (\lambda \mu^1, \dots, \lambda \mu^D)$ для всех $\lambda \in \mathbb{Z}$ и всех $m = (\mu^1, \dots, \mu^D) \in \mathbb{L}$, с базисом $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_D = (0, \dots, 0, 1)$, так что $m = \sum_{\alpha \in \mathbb{D}} \mu^\alpha e_\alpha$ для всех $m = (\mu^1, \dots, \mu^D) \in \mathbb{L}$.

2. ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ СДВИГОВ

Говорят, что определено *действие группы G на множестве X* , если задан морфизм групп $T: G \rightarrow \text{Aut}(X)$, где $\text{Aut}(X)$ – группа всех автоморфизмов множества X .

По построению определено действие $T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{L})$ группы сдвигов $\mathbb{L}$ на решетке $\mathbb{L}$,

$$\mathbb{L} \ni n \mapsto T_n \in \text{Aut}(\mathbb{L}), \quad m \mapsto T_n(m) = m + n.$$

На поле $\mathbb{F}$ группа сдвигов $\mathbb{L}$ действует тривиально: $T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F})$, где $T_n(a) = a$ для всех $n \in \mathbb{L}$, $a \in \mathbb{F}$.

Говорят, что *действие группы сдвигов $\mathbb{L}$ определено на алгебре $\mathcal{A}$* , если задан морфизм групп $T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$, где $\text{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ – группа всех автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$, так что

$$T_n(a\phi + b\psi) = aT_n(\phi) + bT_n(\psi), \quad T_n(\phi \cdot \psi) = T_n(\phi) \cdot T_n(\psi)$$

для всех $n \in \mathbb{L}$, $a, b \in \mathbb{F}$, $\phi, \psi \in \mathcal{A}$. Обратим внимание, что для всякого *дифференцирования ζ алгебры $\mathcal{A}$* имеем

$$\zeta(a\phi + b\psi) = a\zeta(\phi) + b\zeta(\psi), \quad \zeta(\phi \cdot \psi) = \zeta(\phi) \cdot \psi + \phi \cdot \zeta(\psi).$$

Ниже будем считать фиксированными унитарную ассоциативную коммутативную алгебру $\mathcal{A}$ и действие группы сдвигов $\mathbb{L}$ на ней.

Говорят, что *действие группы сдвигов $\mathbb{L}$ определено на $\mathcal{A}$ -модуле $\mathcal{M}$* , если задан морфизм групп $T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$, где $\text{Aut}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ – группа всех автоморфизмов модуля $\mathcal{M}$, так что

$$T_n(\phi \cdot f + \psi \cdot g) = T_n(\phi) \cdot T_n(f) + T_n(\psi) \cdot T_n(g)$$

для всех $n \in \mathbb{L}$, $\phi, \psi \in \mathcal{A}$, $f, g \in \mathcal{M}$.

Пусть действие группы сдвигов $\mathbb{L}$ определено на $\mathcal{A}$ -модулях $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, и пусть $\mathcal{P} = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ есть $\mathcal{A}$ -модуль всех морфизмов из модуля $\mathcal{M}$ в модуль $\mathcal{N}$. Тогда на модуле $\mathcal{P}$ определено действие $T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P})$ группы сдвигов $\mathbb{L}$ правилом

$$T_n(pf) = T_n(p)T_n(f)$$

для всех $n \in \mathbb{L}$, $p \in \mathcal{P}$, $f \in \mathcal{M}$, где $pf \in \mathcal{N}$ – образ элемента f относительно морфизма p , $T_n(pf) \in \mathcal{N}$ – образ элемента pf относительно сдвига T_n , $T_n(p) \in \mathcal{P}$ – образ морфизма p относительно сдвига T_n , $T_n(f) \in \mathcal{M}$ – образ элемента f относительно сдвига T_n , $T_n(p)T_n(f)$ – образ элемента $T_n(f)$ относительно морфизма $T_n(p)$. Коротко, $T_n(p) = T_n \circ p \circ T_{-n}$ для всех $n \in \mathbb{L}$ и $p \in \mathcal{P}$.

В частности, если действие группы сдвигов $\mathbb{L}$ определено на $\mathcal{A}$ -модуле $\mathcal{M}$, то оно определено и на дуальном $\mathcal{A}$ -модуле $\mathcal{M}^* = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ правилом

$$T_n(\langle \omega, f \rangle) = \langle T_n(\omega), T_n(f) \rangle$$

для всех $n \in \mathbb{L}$, $\omega \in \mathcal{M}^*$, $f \in \mathcal{M}$, где $\langle \omega, f \rangle \in \mathcal{A}$ – спаривание элементов ω и f , $T_n(\langle \omega, f \rangle) \in \mathcal{A}$ – образ элемента $\langle \omega, f \rangle$ относительно сдвига T_n , $T_n(\omega) \in \mathcal{M}^*$ – образ элемента ω относительно сдвига T_n , $T_n(f) \in \mathcal{M}$ – образ элемента f относительно сдвига T_n . Коротко, $T_n(\omega) = T_n \circ \omega \circ T_{-n}$ для всех $n \in \mathbb{L}$ и $\omega \in \mathcal{M}^*$.

3. РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ – фиксированные $\mathcal{A}$ -модули, на которых определено действие группы сдвигов $\mathbb{L}$. *Разностным оператором* из модуля $\mathcal{M}$ в модуль $\mathcal{N}$ назовем всякое линейное отображение $P = \sum_{m \in \mathbb{L}} p^m \circ T_m$ из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$, где лишь конечное число коэффициентов $p^m \in \mathcal{P} = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ненулевые, так что $P(f) = \sum_m p^m T_m(f)$ для всех $f \in \mathcal{M}$.

Каждому разностному оператору $P = \sum_m p^m \circ T_m$ из модуля $\mathcal{M}$ в модуль $\mathcal{N}$ ставится в соответствие его *формально сопряженный (по Лагранжу)* разностный оператор $P^* = \sum_m T_{-m} \circ (p^m)^*$, действующий из дуального модуля $\mathcal{N}^*$ в дуальный модуль $\mathcal{M}^*$, где дуальные коэффициенты $(p^m)^* \in \mathcal{P}^* = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{N}^*, \mathcal{M}^*)$ определены правилом

$$\langle p^* \omega, f \rangle = \langle \omega, p f \rangle$$

для всех $p \in \mathcal{P}$, $\omega \in \mathcal{N}^*$, $f \in \mathcal{M}$. Для простоты введем удобное обозначение $\omega p = p^* \omega$ для всех $\omega \in \mathcal{N}^*$ и $p \in \mathcal{P}$. В частности, в таких обозначениях

$$P^*(\omega) = \sum_m T_{-m}(\omega p^m)$$

для всех $\omega \in \mathcal{N}^*$.

4. ФОРМУЛА ГРИНА

Разностные операторы с целочисленными коэффициентами определены на всех абелевых группах, на которых определены сдвиги. В частности, определены элементарные разностные операторы

$$\Delta_\alpha = T_{e_\alpha} - 1, \quad \alpha \in \mathbb{D}, \quad 1 = \text{id} = T_0.$$

Обратим внимание, что

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha(\phi \cdot \psi) &= \Delta_\alpha(\phi) \cdot \psi + \phi \cdot \Delta_\alpha(\psi) + \Delta_\alpha(\phi) \cdot \Delta_\alpha(\psi) \neq \\ &\neq \Delta_\alpha(\phi) \cdot \psi + \phi \cdot \Delta_\alpha(\psi), \quad \phi, \psi \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

так что разностные операторы Δ_α не являются дифференцированиями алгебры $\mathcal{A}$.

ЛЕММА 1. *Для любых $\mu \in \mathbb{Z}$ и $\alpha \in \mathbb{D}$ имеет место равенство*

$$T_{\mu e_\alpha} - 1 = \Delta_\alpha \circ S_\mu^\alpha, \quad S_\mu^\alpha = \begin{cases} 1 + T_{e_\alpha} + \cdots + T_{(\mu-1)e_\alpha}, & \mu > 0, \\ 0, & \mu = 0, \\ -(T_{\mu e_\alpha} + \cdots + T_{-e_\alpha}), & \mu < 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямыми вычислениями.

Для каждого $m = (\mu^1, \dots, \mu^D) \in \mathbb{L}$ положим

$$\begin{aligned} m_0 &= 0, & m_1 &= (\mu^1, 0, \dots, 0), & \dots, & m_D &= (\mu^1, \dots, \mu^D) = m, \\ \bar{m}_0 &= m, & \bar{m}_1 &= (0, \mu^2, \dots, \mu^D), & \dots, & \bar{m}_D &= 0, \end{aligned}$$

так что $m_\alpha + \bar{m}_\alpha = m$ для всех $0 \leq \alpha \leq D$.

ЛЕММА 2. Для каждого $m \in \mathbb{L}$ существуют разностные операторы J_m^α , $\alpha \in \mathbb{D}$, такие, что $T_m - 1 = \sum_{\alpha \in \mathbb{D}} \Delta_\alpha \circ J_m^\alpha$. Например, можно взять $J_m^\alpha = L_m^\alpha = T_{m_{\alpha-1}} \circ S_{\mu^\alpha}^\alpha$ или $J_m^\alpha = R_m^\alpha = T_{\bar{m}_\alpha} \circ S_{\mu^\alpha}^\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу леммы 1

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \Delta_\alpha \circ L_m^\alpha &= \sum_{\alpha} (T_{e_\alpha} - 1) \circ T_{m_{\alpha-1}} \circ S_{\mu^\alpha}^\alpha = \sum_{\alpha} T_{m_{\alpha-1}} \circ (T_{e_\alpha} - 1) \circ S_{\mu^\alpha}^\alpha = \\ &= \sum_{\alpha} T_{m_{\alpha-1}} \circ (T_{\mu^\alpha e_\alpha} - 1) = \sum_{1 \leq \alpha \leq D} (T_{m_\alpha} - T_{m_{\alpha-1}}) = T_m - 1. \end{aligned}$$

Аналогичным образом проверяется утверждение леммы для $J_m^\alpha = R_m^\alpha$.

ТЕОРЕМА. Пусть $P = \sum_m p^m \circ T_m$ – разностный оператор, действующий из модуля $\mathcal{M}$ в модуль $\mathcal{N}$, и $P^* = \sum_m T_{-m} \circ (p^m)^*$ – его формально сопряженный. Тогда существует билинейный разностный оператор $J = (J^\alpha): \mathcal{N}^* \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{D}}$ такой, что для всех $\omega \in \mathcal{N}^*$, $f \in \mathcal{M}$, справедлива формула Грина

$$\langle \omega, P(f) \rangle - \langle P^*(\omega), f \rangle = \sum_{\alpha} \Delta_\alpha (J^\alpha(\omega, f)).$$

Например, можно положить $J^\alpha(\omega, f) = \sum_m J_m^\alpha(\langle T_{-m}(\omega p^m), f \rangle)$, где J_m^α – разностные операторы, удовлетворяющие лемме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу леммы 2

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \Delta_\alpha (J^\alpha(\omega, f)) &= \sum_{\alpha} \sum_m (\Delta_\alpha \circ J_m^\alpha)(\langle T_{-m}(\omega p^m), f \rangle) = \\ &= \sum_m \sum_{\alpha} (\Delta_\alpha \circ J_m^\alpha)(\langle T_{-m}(\omega p^m), f \rangle) = \\ &= \sum_m (T_m - 1)(\langle T_{-m}(\omega p^m), f \rangle) = \\ &= \sum_m (\langle \omega, p^m T_m(f) \rangle - \langle T_{-m}(\omega p^m), f \rangle) = \langle \omega, P(f) \rangle - \langle P^*(\omega), f \rangle. \end{aligned}$$

5. ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР 1. Разностный оператор Лапласа $\Lambda = \sum_{\alpha} (T_{e_\alpha} - 2 + T_{-e_\alpha})$ действует на алгебре $\mathcal{A}$. Здесь $\Lambda^* = \Lambda$, и разностная формула Грина имеет вид

$$\phi \cdot \Lambda(\psi) - \Lambda(\phi) \cdot \psi = \sum_{\alpha} \Delta_\alpha (J^\alpha(\phi, \psi))$$

для всех $\phi, \psi \in \mathcal{A}$, где $J^\alpha(\phi, \psi) = -\phi \cdot T_{-e_\alpha}(\psi) + T_{-e_\alpha}(\phi) \cdot \psi$.

ПРИМЕР 2. Множество $\mathcal{M} = \mathcal{A}^M$, $M \in \mathbb{N}$, обладает естественной структурой $\mathcal{A}$ -модуля с покомпонентными операциями. Его элементы суть столбцы $f = (f^\mu) = (f^\mu \in \mathcal{A} \mid 1 \leq \mu \leq M)$. Группа сдвигов $\mathbb{L}$ действует на $\mathcal{A}$ -модуле $\mathcal{M}$ покомпонентно, $T_n(f) = (T_n(f^\mu))$ для всех $n \in \mathbb{L}$. Дуальный $\mathcal{A}$ -модуль $\mathcal{M}^* = \mathcal{A}_M$ состоит из строк $\chi = (\chi_\mu)$, спаривание $\langle \chi, f \rangle = \sum_\mu \chi_\mu \cdot f^\mu$, $f^\mu = \chi f$ (умножение строки на столбец), группа сдвигов $\mathbb{L}$ действует на $\mathcal{M}^*$ также покомпонентно, $T_n(\chi) = (T_n(\chi_\mu))$. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{A}^M$, $\mathcal{N} = \mathcal{A}^N$ есть пара $\mathcal{A}$ -модулей указанного типа, тогда $\mathcal{A}$ -модуль $\mathcal{P} = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \simeq \mathcal{A}_M^N$ состоит из матриц $p = (p_\mu^\nu)$, причем образ $g = pf \in \mathcal{N}$ вычисляется по правилу $g^\nu = \sum_\mu p_\mu^\nu \cdot f^\mu$ (умножение матрицы на столбец). Группа сдвигов $\mathbb{L}$ действует на $\mathcal{A}$ -модуле $\mathcal{P}$ покомпонентно, $T_n(p) = (T_n(p_\mu^\nu))$ для всех $n \in \mathbb{L}$. Дуальный $\mathcal{A}$ -модуль $\mathcal{P}^* = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{N}^*, \mathcal{M}^*) \simeq \mathcal{A}_M^N$ также состоит из матриц $p = (p_\mu^\nu)$, причем образ $\chi = \omega p$ вычисляется по правилу $\chi_\mu = \sum_\nu \omega_\nu \cdot p_\mu^\nu$ (умножение строки на матрицу). В таких обозначениях

$$\langle \omega, pf \rangle = \sum_{\mu, \nu} \omega_\nu \cdot p_\mu^\nu \cdot f^\mu = \langle p^* \omega, f \rangle = \omega p f$$

для всех $\omega \in \mathcal{N}^*$, $p \in \mathcal{P}$, $f \in \mathcal{M}$. Пусть $P = \sum_m p^m \circ T_m$ – разностный оператор из $\mathcal{A}$ -модуля $\mathcal{M} = \mathcal{A}^M$ в $\mathcal{A}$ -модуль $\mathcal{N} = \mathcal{A}^N$, и $P^* = \sum_m T_{-m} \circ (p^m)^*$ – его формально сопряженный. Тогда формула Грина для него имеет вид

$$\omega P(f) - P^*(\omega)f = \sum_\alpha \Delta_\alpha(J^\alpha(\omega, f))$$

для всех $\omega \in \mathcal{N}^*$, $f \in \mathcal{M}$, где $J^\alpha(\omega, f) = \sum_m J_m^\alpha(T_{-m}(\omega p^m)f)$, J_m^α – произвольные разностные операторы, удовлетворяющие лемме 2.

ПРИМЕР 3. Пусть $\mathcal{A}(\mathbb{L}) = \text{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{F})$ – унитарная ассоциативная коммутативная алгебра всех $\mathbb{F}$ -значных функций на решетке $\mathbb{L}$. Группа сдвигов $\mathbb{L}$ действует на алгебре $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ стандартным образом:

$$T_n(\phi)(m) = \phi(T_n(m)) = \phi(m + n)$$

для всех $m, n \in \mathbb{L}$, $\phi \in \mathcal{A}(\mathbb{L})$. Такое определение и конструкция, приведенная в примере 2, охватывают большую часть применений разностных операторов в численных экспериментах.

ПРИМЕР 4. Пусть V – конечномерное $\mathbb{F}$ -линейное пространство. Определено тривиальное векторное расслоение

$$\pi: \mathbb{L} \times V \rightarrow \mathbb{L}, \quad (m, u) \mapsto m$$

с пространством расслоения $\mathbb{L} \times V$ и базой $\mathbb{L}$. Множество всех его сечений $\mathcal{F}(\pi) = \text{Hom}(\mathbb{L}, V)$ (т.е. отображений из $\mathbb{L}$ в V) есть $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модуль, на котором группа сдвигов действует стандартным образом:

$$T_n(\phi)(m) = \phi(T_n(m)) = \phi(m + n)$$

для всех $m, n \in \mathbb{L}$, $\phi \in \mathcal{F}(\pi)$.

Расслоение разностных джетов (подробнее см. работу [4]) есть тривиальное векторное расслоение

$$\pi^\infty: \mathbb{L} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{L}, \quad (m, \mathbf{u}) \mapsto m$$

с базой $\mathbb{L}$ и пространством расслоения (*пространством разностных джетов*) $\mathbb{L} \times \mathbf{V}$, где типичный слой

$$\mathbf{V} = V_{\mathbb{L}} = \{\mathbf{u} = (u_k) \mid u_k \in V, k \in \mathbb{L}\}.$$

Группа сдвигов $\mathbb{L}$ действует на типичном слое $\mathbf{V}$ по естественному правилу $T_n(\mathbf{u}) = (u_{T_n(k)}) = (u_{k+n})$, а на пространстве разностных джетов $\mathbb{L} \times \mathbf{V}$ – по правилу $T_n((m, \mathbf{u})) = (T_n(m), T_n(\mathbf{u}))$ для всех $k, m, n \in \mathbb{L}$, $\mathbf{u} = (u_k) \in \mathbf{V}$. Множество $\mathcal{F}(\pi^\infty) = \text{Hom}(\mathbb{L}, \mathbf{V})$ всех сечений расслоения π^∞ (т.е. отображений из $\mathbb{L}$ в $\mathbf{V}$) есть $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модуль, на котором группа сдвигов $\mathbb{L}$ действует по индуцированному правилу $T_n \circ T_n(\varphi) = \varphi \circ T_n$, так что $T_n(\varphi) = T_{-n} \circ \varphi \circ T_n$, точнее

$$(T_n(\varphi))_k(m) = \varphi_{k-n}(m+n)$$

для всех $\varphi = (\phi_k \in \mathcal{F}(\pi))$, $k, m, n \in \mathbb{L}$. Определено вложение $\mathbf{j}: \mathcal{F}(\pi) \rightarrow \mathcal{F}(\pi^\infty)$, $\phi \mapsto \mathbf{j}(\phi)$, где образ $\mathbf{j}(\phi)$ называется *разностным джетом* сечения ϕ и вычисляется по правилу $(\mathbf{j}(\phi))_k = T_k(\phi)$ для всех $k \in \mathbb{L}$. Эта конструкция характеризуется следующими свойствами:

1) сечение $\varphi \in \mathcal{F}(\pi^\infty)$ является джетом некоторого сечения $\phi \in \mathcal{F}(\pi)$, $\varphi = \mathbf{j}(\phi)$, тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно сдвигов, т.е. когда $T_n \varphi = \varphi$ для всех $n \in \mathbb{L}$;

2) для любой точки $(m, \mathbf{u}) \in \mathbb{L} \times \mathbf{V}$ существует единственное сечение $\phi \in \mathcal{F}(\pi)$ такое, что $\mathbf{j}(\phi)(m) = \mathbf{u}$.

Пусть $\mathcal{A}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}) = \text{Hom}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}, \mathbb{F})$ – унитарная ассоциативная коммутативная алгебра всех $\mathbb{F}$ -значных функций на пространстве разностных джетов $\mathbb{L} \times \mathbf{V}$. Группа сдвигов $\mathbb{L}$ действует на алгебре $\mathcal{A}(\mathbb{L} \times \mathbf{V})$ по правилу $T_n(f) = f \circ T_n$, точнее

$$T_n(f)(m, \mathbf{u}) = f(T_n(m), T_n(\mathbf{u}))$$

для всех $f \in \mathcal{A}(\mathbb{L} \times \mathbf{V})$, $m, n \in \mathbb{L}$, $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. Для каждого сечения $\varphi \in \mathcal{F}(\pi^\infty)$ определен морфизм алгебр (подстановка) $\mathcal{A}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{L})$, $f \mapsto f|_\varphi$, где $(f|_\varphi)(m) = f(m, \varphi(m))$ для всех $m \in \mathbb{L}$. Имеет место *правило полного сдвига*: для данного сечения $\varphi = (\phi_k) \in \mathcal{F}(\pi^\infty)$ равенство $T_n(f)|_\varphi = T_n(f|_\varphi)$ справедливо для всех $n \in \mathbb{L}$ и $f \in \mathcal{A}(\mathbb{L} \times \mathbf{V})$ тогда и только тогда, когда $\varphi = \mathbf{j}(\phi)$, где $\phi = \phi_0$.

В приложениях (групповой анализ разностных и дифференциально-разностных уравнений, разностное вариационное исчисление, см., например, работы [4]–[7]) обычно используется подалгебра алгебры $\mathcal{A}(\mathbb{L} \times \mathbf{V})$, состоящая из всех функций $f = f(m, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}(\mathbb{L} \times \mathbf{V})$, при каждом фиксированном $m \in \mathbb{L}$ гладко зависящих (т.е. класса $\mathcal{C}^\infty$) лишь от конечного числа разностных переменных $\mathbf{u} = (u_k)$ (подробнее см., например, работу [4]). Эта подалгебра и конструкция из примера 2 полностью обеспечивают упомянутые выше приложения.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-00144_а) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3224.2008.1).

Список литературы

- [1] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, *Дифференц. уравнения*, **16**:5 (1980), 845–867.
- [2] В. В. Жаринов, *ДАН СССР*, **296**:4 (1987), 785–787.
- [3] V. V. Zharinov, *Lecture Notes on Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, Ser. Sov. and East Eur. Math., **9**, World Sci., Singapore, 1992.
- [4] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **157**:3 (2008), 391–405.
- [5] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.
- [6] P. E. Hydon, E. L. Mansfield, *Found. Comput. Math.*, **4**:2 (2004), 187–217.
- [7] W. Hereman, M. Colagrosso, R. Sayers, A. Ringler, B. Deconinck, M. Nivala, M. Hickman, “Continuous and discrete homotopy operators and the computation of conservation laws”, *Differential Equations with Symbolic Computation*, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2005, 255–290.

Поступила в редакцию 7.05.2009