Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Х. Расулов, Исследование спектра одного модельного оператора в пространстве Фока, *ТМФ*, 2009, том 161, номер 2, 164–175

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6429>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:26:54

© 2009 г.

Т. Х. Расулов*

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА

Рассмотрен модельный оператор H , соответствующий квантовой системе с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке. На основе анализа спектра канальных операторов описано положение существенного спектра оператора H . Получено уравнение типа уравнения Фаддеева для собственных векторов оператора H .

Ключевые слова: модельный оператор, система с несохраняющимся ограниченным числом частиц, уравнение Фаддеева, существенный спектр, канальный оператор.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию существенного спектра системы с сохраняющимся ограниченным числом частиц в непрерывном пространстве и на решетке посвящены многие работы (см., например, [1], [2] и [3], [4] соответственно). Отметим, что в непрерывном пространстве и на решетке имеются более интересные в определенном смысле задачи, в которых число частиц не сохраняется. Такие задачи возникают в физике твердого тела, квантовой теории поля и статистической физике. Системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц в непрерывном пространстве рассмотрены в работах [5], [6].

В настоящей работе рассматривается (решетчатый) модельный оператор H , действующий в трехчастичном обрезанном подпространстве пространства Фока. Выделены канальные операторы, и положение существенного спектра оператора H описано через спектры канальных операторов. Также получен аналог уравнения Фаддеева для собственных векторов оператора H .

Заметим, что ранее в работе [7] оператор H рассмотрен в случае, когда операторы K_i , $i = 1, 2$, определенные ниже, являются частичными интегральными операторами с вырожденными ядрами, а в работе [8] – в случае, когда $K_i = 0$, $i = 1, 2$. Существенный и дискретный спектры, а также уравнение Фаддеева для симметричного варианта модельного оператора H изучены в работах [9]–[14] (в случаях, когда K_i , $i = 1, 2$, являются частичными интегральными операторами с вырожденными

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: rth@mail.ru

и невырожденными ядрами, а также нулевыми операторами). Оператор H , рассматриваемый в настоящей работе, и симметричный вариант оператора H имеют разные спектральные свойства, поэтому исследование спектральных свойств нашего модельного оператора играет важную роль в современной математической физике.

Структура работы следующая. В разделе 2 модельный оператор рассматривается как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и формулируется основной результат работы. В разделе 3, пользуясь разложением в прямой операторный интеграл, мы сводим изучение спектральных свойств модельного оператора к изучению спектральных свойств семейства операторов обобщенной модели Фридрихса. В разделе 4 получен аналог уравнения Фаддеева для собственных векторов оператора H . Раздел 5 посвящен доказательству основного результата настоящей работы.

2. МОДЕЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $\mathbf{T}^\nu \equiv (-\pi; \pi]^\nu - \nu$ -мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $(\mathbf{T}^\nu)^2 = \mathbf{T}^\nu \times \mathbf{T}^\nu$ – декартово произведение, $L_2((\mathbf{T}^\nu)^n)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbf{T}^\nu)^n$, $n = 1, 2$, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость. Положим

$$\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}, \quad \mathcal{H}_n = L_2((\mathbf{T}^\nu)^n), \quad n = 1, 2, \quad \mathcal{H}^{(n,m)} = \bigoplus_{i=n}^m \mathcal{H}_i, \quad 0 \leq n < m \leq 2.$$

Рассмотрим модельный оператор H , действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(0,2)}$ и заданный как операторная матрица

$$H = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & 0 \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где операторы $H_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2$, определяются формулами

$$\begin{aligned} (H_{00}f_0)_0 &= w_0 f_0, & (H_{01}f_1)_0 &= \int v_1(s) f_1(s) ds, & (H_{10}f_0)_1(p) &= v_1(p) f_0, \\ (H_{11}f_1)_1(p) &= w_1(p) f_1(p), & (H_{12}f_2)_1(p) &= \int v_2(s) f_2(p, s) ds, \\ (H_{21}f_1)_2(p, q) &= v_2(q) f_1(p), \\ H_{22} &= H_{22}^0 - K_1 - K_2, & (H_{22}^0 f_2)_2(p, q) &= w_2(p, q) f_2(p, q), \\ (K_1 f_2)_2(p, q) &= \int K_1(p, s) f_2(s, q) ds, & (K_2 f_2)_2(p, q) &= \int K_2(s, q) f_2(p, s) ds. \end{aligned}$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1, 2$; w_0 – фиксированное вещественное число; $w_1(\cdot)$, $v_i(\cdot)$ – вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbf{T}^\nu$, $w_2(\cdot, \cdot)$ и $K_i(\cdot, \cdot)$ – вещественнозначные непрерывные функции на $(\mathbf{T}^\nu)^2$, $i = 1, 2$. Здесь и далее интеграл без

указания пределов означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

В дальнейшем мы будем дополнительно предполагать, что операторы K_1 и K_2 являются положительными и принадлежат пространству операторов со следом. При таких предположениях существуют положительные корни из этих операторов, задающиеся формулами

$$\begin{aligned}(K_1^{1/2} f_2)(p, q) &= \int K_1^{1/2}(p, s) f_2(s, q) ds, \\ (K_2^{1/2} f_2)(p, q) &= \int K_2^{1/2}(s, q) f_2(p, s) ds,\end{aligned}\tag{2.2}$$

где через $K_i^{1/2}(\cdot, \cdot)$ формально обозначено ядро оператора $K_i^{1/2}$, $i = 1, 2$. В математической физике операторы H_{01} и H_{12} называются операторами уничтожения, а операторы H_{10} и H_{21} – операторами рождения.

Можно легко проверить, что оператор H , определенный операторной матрицей (2.1) и действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(0,2)}$, является ограниченным и самосопряженным.

Для формулировки основного результата работы наряду с оператором H рассмотрим также операторы H_1 и H_2 , действующие соответственно в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}^{(1,2)}$ по формулам

$$H_1 = H_{22}^0 - K_1, \quad H_2 = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22}^0 - K_2 \end{pmatrix},$$

и семейство операторов обобщенной модели Фридрихса $h_1(q)$, $q \in \mathbf{T}^\nu$, и $h_2(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, действующих соответственно в $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}^{(0,1)}$ по формулам

$$h_1(q) = h_1^{(0)}(q) - k_1, \quad h_2(p) = \begin{pmatrix} h_{00}^{(2)}(p) & h_{01}^{(2)} \\ h_{10}^{(2)} & h_{11}^{(2,0)}(p) - k_2 \end{pmatrix},\tag{2.3}$$

где элементы задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}(h_1^{(0)}(q) f_1)(p) &= w_2(p, q) f_1(p), & (k_1 f_1)(p) &= \int K_1(p, s) f_1(s) ds, & f_1 &\in \mathcal{H}, \\ (h_{00}^{(2)}(p) f_0)_0 &= w_1(p) f_0, & (h_{01}^{(2)} f_1)_0 &= \int v_2(s) f_1(s) ds, \\ (h_{10}^{(2)} f_0)_1(q) &= v_2(q) f_0, & (h_{11}^{(2,0)}(p) f_1)_1(q) &= w_2(p, q) f_1(q), \\ (k_2 f_1)_1(q) &= \int K_2(s, q) f_1(s) ds, & f_i &\in \mathcal{H}_i, \quad i = 0, 1.\end{aligned}$$

Очевидно, что операторы H_1 и H_2 являются ограниченными и самосопряженными в $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}^{(1,2)}$ соответственно. Они выбраны единственным образом из некомпактной части оператора H в силу свойства разложимости в прямой операторный интеграл (см. раздел 3).

Пусть $\sigma(H_i)$ – спектр оператора H_i , $i = 1, 2$, и

$$m = \min_{p, q \in \mathbf{T}^\nu} w_2(p, q), \quad M = \max_{p, q \in \mathbf{T}^\nu} w_2(p, q).$$

Введем также обозначения $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ и $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$ для дискретного и существенного спектров соответственно. Спектр операторов H_i , $i = 1, 2$, описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. *Для спектра $\sigma(H_i)$ оператора H_i имеет место равенство*

$$\sigma(H_i) = \sigma_{\text{two}}(H_i) \cup \sigma_{\text{three}}(H_i),$$

где

$$\sigma_{\text{two}}(H_i) = \bigcup_{p \in \mathbf{T}^\nu} \sigma_{\text{disc}}(h_i(p)), \quad \sigma_{\text{three}}(H_i) = [m, M], \quad i = 1, 2.$$

Теперь сформулируем основной результат настоящей работы – теорему, которая описывает существенный спектр оператора H .

ТЕОРЕМА 2. *Существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H)$ оператора H совпадает с объединением спектров операторов H_1 и H_2 , т.е. $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)$.*

Согласно теореме 2 операторы H_1 и H_2 обладают характеристическим свойством канального оператора (см., например, работы [3]–[5], [10]). По этой причине мы назовем их канальными операторами, соответствующими оператору H . Заметим, что канальные операторы H_1 и H_2 имеют более простую структуру, чем H , и поэтому теорема 2 играет важную роль в дальнейших исследованиях спектра оператора H .

Теперь введем новые подмножества существенного спектра оператора H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [9], [13], [14]. Множества

$$\sigma_{\text{two}}(H) = \sigma_{\text{two}}(H_1) \cup \sigma_{\text{two}}(H_2), \quad \sigma_{\text{three}}(H) = \sigma_{\text{three}}(H_1) = \sigma_{\text{three}}(H_2)$$

называются *двухчастичной* и *трехчастичной ветвями* существенного спектра оператора H соответственно.

3. НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КАНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом разделе, используя разложение в прямой операторный интеграл, мы сводим изучение спектральных свойств канальных операторов H_i к изучению спектральных свойств семейства операторов обобщенной модели Фридрихса $h_i(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, которые определены формулами (2.3). Мы описываем спектр операторов $h_i(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, и доказываем теорему 1.

Сначала рассмотрим оператор H_2 , который коммутирует с любым оператором умножения U_α на ограниченную функцию $\alpha(\cdot)$, заданную на $\mathbf{T}^\nu$. Оператор U_α действует в $\mathcal{H}^{(1,2)}$ по правилу

$$U_\alpha \begin{pmatrix} g_1(p) \\ g_2(p, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(p)g_1(p) \\ \alpha(p)g_2(p, q) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^{(1,2)}.$$

Из разложения $\mathcal{H}^{(1,2)} = \int \oplus \mathcal{H}^{(0,1)} dp$ пространства $\mathcal{H}^{(1,2)}$ в прямой интеграл [2] следует, что оператор H_2 разлагается в прямой интеграл: $H_2 = \int \oplus h_2(p) dp$, где оператор $h_2(p)$ определен в (2.3), $p \in \mathbf{T}^\nu$.

Пусть оператор $h_2^0(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, действует в $\mathcal{H}^{(0,1)}$ как

$$h_2^0(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{11}^{(2,0)}(p) \end{pmatrix}.$$

Оператор возмущения $h_2(p) - h_2^0(p)$ оператора $h_2^0(p)$ является самосопряженным компактным оператором. Из известной теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при компактных возмущениях вытекает, что существенный спектр оператора $h_2(p)$ совпадает с существенным спектром оператора $h_2^0(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$. Известно, что $\sigma_{\text{ess}}(h_2^0(p)) = [m(p), M(p)]$, где числа $m(p)$ и $M(p)$ определяются следующим образом:

$$m(p) = \min_{q \in \mathbf{T}^\nu} w_2(p, q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbf{T}^\nu} w_2(p, q).$$

Из последних двух фактов следует, что $\sigma_{\text{ess}}(h_2(p)) = [m(p), M(p)]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для некоторого $p \in \mathbf{T}^\nu$ существенный спектр оператора $h_2(p)$ может стянуться в точку $m(p)$ и, следовательно, мы не можем сказать, что для любого $p \in \mathbf{T}^\nu$ существенный спектр оператора $h_2(p)$ является абсолютно непрерывным. Например, если функция $w_2(\cdot, \cdot)$ имеет вид $w_2(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(p + q) + \varepsilon(q)$, где

$$\varepsilon(q) = \sum_{i=1}^{\nu} (1 - \cos q_i), \quad q = (q_1, \dots, q_\nu) \in \mathbf{T}^\nu, \quad p = (\underbrace{\pi, \dots, \pi}_{\nu}) \in \mathbf{T}^\nu,$$

то $\sigma_{\text{ess}}(h_2(p)) = \{4\nu\}$.

Докажем два вспомогательных утверждения, которые понадобятся в этом и следующих разделах.

ЛЕММА 1. Операторы k_i , $i = 1, 2$, в формулах (2.3) являются положительными, и положительные квадратные корни $k_i^{1/2}$ из этих операторов задаются равенствами

$$(k_1^{1/2} f)(p) = \int K_1^{1/2}(p, s) f(s) ds, \quad (k_2^{1/2} f)(q) = \int K_2^{1/2}(s, q) f(s) ds, \quad (3.1)$$

где функция $K_i^{1/2}(\cdot, \cdot)$ есть квадратично-интегрируемое ядро оператора $k_i^{1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из положительности оператора K_i следует, что оператор k_i также является положительным. Следовательно, каждое нетривиальное собственное значение λ_m^i оператора k_i положительно. В силу теоремы Гильберта–Шмидта имеем разложение $k_i = \sum_m \lambda_m^i (\varphi_m^i, \cdot) \varphi_m^i$ с условием $\sum_m \lambda_m^i < \infty$; здесь φ_m^i – собственный вектор оператора k_i , соответствующий собственному значению λ_m^i , $i = 1, 2$. Пусть $k_i^{1/2}$ есть положительный корень из оператора k_i , тогда $k_i^{1/2} = \sum_m \sqrt{\lambda_m^i} (\varphi_m^i, \cdot) \varphi_m^i$. В силу условия $\sum_m \lambda_m^i < \infty$ оператор $k_i^{1/2}$ является оператором Гильберта–Шмидта. Следовательно, ядро $K_i^{1/2}(\cdot, \cdot)$ интегрального оператора $k_i^{1/2}$ является квадратично-интегрируемым. Лемма 1 доказана.

Пусть I_i – единичный оператор в $\mathcal{H}_i$, $i = 0, 1, 2$.

ЛЕММА 2. *Положительный корень из оператора K_i , $i = 1, 2$, определяется по формуле (2.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операторы K_i , $i = 1, 2$, представимы в виде $K_1 = k_1 \otimes I_1$, $K_2 = I_1 \otimes k_2$. В силу леммы 1 операторы k_i , $i = 1, 2$, являются положительными, и положительные корни из этих операторов определяются по формуле (3.1). Легко можно проверить, что $K_1^{1/2} = k_1^{1/2} \otimes I_1$ и $K_2^{1/2} = I_1 \otimes k_2^{1/2}$. Лемма 2 доказана.

При каждом фиксированном $p \in \mathbf{T}^\nu$ оператор $A_0(p; z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_2(p))$, действует в $\mathcal{H}^{(0,1)}$ как

$$A_0(p; z) = \begin{pmatrix} A_{00}(p; z) & A_{01}(p; z) \\ A_{10}(p; z) & A_{11}(p; z) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} (A_{00}(p; z)g_0)_0 &= \left(w_1(p) - z - \int \frac{v_2^2(s) ds}{w_2(p, s) - z} - 1 \right) g_0, \\ (A_{01}(p; z)g_1)_0 &= \int \frac{v_2(s) ds}{w_2(p, s) - z} \int K_2^{1/2}(t, s) g_1(t) dt, \\ (A_{10}(p; z)g_0)_1(q) &= \int \frac{K_2^{1/2}(s, q) v_2(s) ds}{w_2(p, s) - z} \cdot g_0, \\ (A_{11}(p; z)g_1)_1(q) &= - \int \frac{K_2^{1/2}(t, q) dt}{w_2(p, t) - z} \int K_2^{1/2}(s, t) g_1(s) ds. \end{aligned}$$

Отметим, что при любых фиксированных $p \in \mathbf{T}^\nu$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_2(p))$ оператор $A_0(p; z)$ принадлежит пространству операторов со следом. Следовательно, $\det[I^{(0,1)} + A_0(p; z)]$ оператора $I^{(0,1)} + A_0(p; z)$ хорошо определен (здесь $I^{(0,1)} = \text{diag}\{I_0, I_1\}$).

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями оператора $h_2(p)$ и нулями функции $\det[I^{(0,1)} + A_0(p; \cdot)]$, $p \in \mathbf{T}^\nu$.

ЛЕММА 3. *При каждом фиксированном $p \in \mathbf{T}^\nu$ число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_2(p))$ является собственным значением оператора $h_2(p)$ тогда и только тогда, когда $\det[I^{(0,1)} + A_0(p; z)] = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_2(p))$ является собственным значением оператора $h_2(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, и $f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}^{(0,1)}$ – соответствующая собственная вектор-функция. Тогда f_0 и f_1 удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} (w_1(p) - z)f_0 + \int v_2(s)f_1(s) ds &= 0, \\ v_2(q)f_0 + (w_2(p, q) - z)f_1(q) - \int K_2(s, q)f_1(s) ds &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Так как $w_2(p, q) - z \neq 0$ для любых $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_2(p))$ и $q \in \mathbf{T}^\nu$, из второго уравнения системы (3.3) для f_1 имеем

$$f_1(q) = \frac{(k_2^{1/2} \tilde{f}_1)(q)}{w_2(p, q) - z} - \frac{v_2(q)f_0}{w_2(p, q) - z}, \quad (3.4)$$

где оператор $k_2^{1/2}$ определен формулой (3.1) и

$$\tilde{f}_1(q) = (k_2^{1/2} f_1)(q). \quad (3.5)$$

Подставляя выражение (3.4) для f_1 в первое уравнение системы (3.3) и равенство (3.5), получим, что система уравнений (3.3) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{aligned} \left(w_1(p) - z - \int \frac{v_2^2(s) ds}{w_2(p, s) - z} \right) f_0 + \int \frac{v_2(s) ds}{w_2(p, s) - z} \int K_2^{1/2}(t, s) \tilde{f}_1(t) dt &= 0, \\ \int \frac{K_2^{1/2}(s, q) v_2(s) ds}{w_2(p, s) - z} \cdot f_0 + \tilde{f}_1(q) - \int \frac{K_2^{1/2}(t, q) dt}{w_2(p, t) - z} \int K_2^{1/2}(s, t) \tilde{f}_1(s) ds &= 0 \end{aligned}$$

или, что эквивалентно, уравнение $I^{(0,1)}\Phi + A_0(p; z)\Phi = 0$, где $\Phi = (f_0, \tilde{f}_1) \in \mathcal{H}^{(0,1)}$, имеет ненулевое решение, т.е. когда $\det[I^{(0,1)} + A_0(p; z)] = 0$. Лемма доказана.

Из леммы 3 вытекает, что число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_2(p))$ принадлежит дискретному спектру оператора $h_2(p)$ тогда и только тогда, когда $\det[I^{(0,1)} + A_0(p; z)] = 0$. Следовательно, верна следующая лемма.

ЛЕММА 4. *Для дискретного спектра $\sigma_{\text{disc}}(h_2(p))$ оператора $h_2(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, имеет место равенство*

$$\sigma_{\text{disc}}(h_2(p)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_2(p)) : \det[I^{(0,1)} + A_0(p; z)] = 0\}.$$

Аналогично можно сформулировать и доказать следующую лемму.

ЛЕММА 5. *Для дискретного спектра $\sigma_{\text{disc}}(h_1(q))$ оператора $h_1(q)$, $q \in \mathbf{T}^\nu$, верно равенство*

$$\sigma_{\text{disc}}(h_1(q)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_1(q)) : \det[I_1 - k_1^{1/2} r_0(q; z) k_1^{1/2}] = 0\},$$

где $r_0(q; z) = (h_1^{(0)}(q) - zI_1)^{-1}$ – резольвента оператора $h_1^{(0)}(q)$, $q \in \mathbf{T}^\nu$.

Теперь мы готовы доказать теорему 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Применяя теорему о спектре разложимых операторов и учитывая равенства

$$\begin{aligned} \sigma(h_i(p)) &= \sigma_{\text{disc}}(h_i(p)) \cup [m(p), M(p)], \quad p \in \mathbf{T}^\nu, \quad i = 1, 2, \\ \bigcup_{p \in \mathbf{T}^\nu} [m(p), M(p)] &= [m, M], \end{aligned}$$

мы приходим к утверждению теоремы 1.

4. АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРА H

В этом разделе мы получим аналог уравнения Фаддеева для собственных векторов оператора H , который играет важную роль при изучении существенного и дискретного спектров рассматриваемого оператора.

Пусть

$$\overline{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{H}_0, \quad \overline{\mathcal{H}}_1 = \mathcal{H}_1, \quad \overline{\mathcal{H}}_2 = \overline{\mathcal{H}}_3 = \mathcal{H}_2, \quad \overline{\mathcal{H}} = \bigoplus_{i=n}^m \overline{\mathcal{H}}_i.$$

Пусть операторные матрицы $A(z)$ и $K(z)$ при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{three}}(H_2)$ действуют в пространстве $\overline{\mathcal{H}}$ по формулам

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_{00}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11}(z) & 0 & A_{13}(z) \\ 0 & 0 & A_{22}(z) & 0 \\ 0 & A_{31}(z) & 0 & A_{33}(z) \end{pmatrix},$$

$$K(z) = \begin{pmatrix} K_{00}(z) & K_{01}(z) & 0 & 0 \\ K_{10}(z) & 0 & K_{12}(z) & 0 \\ 0 & K_{21}(z) & 0 & K_{23}(z) \\ 0 & 0 & K_{32}(z) & 0 \end{pmatrix},$$

где операторы $A_{ij}(z): \overline{\mathcal{H}}_j \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_i$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, определяются равенствами

$$(A_{00}(z)g_0)_0 = g_0, \quad (A_{11}(z)g_1)_1(p) = \left(w_1(p) - z - \int \frac{v_2^2(s) ds}{w_2(p, s) - z} \right) g_1(p),$$

$$(A_{13}(z)g_3)_1(p) = \int \frac{v_2(s) ds}{w_2(p, s) - z} \int K_2^{1/2}(t, s) g_3(p, t) dt,$$

$$(A_{22}(z)g_2)_2(p, q) = g_2(p, q) - (K_1^{1/2} R_{22}^0(z) K_1^{1/2} g_2)(p, q),$$

$$(A_{31}(z)g_1)_3(p, q) = \int \frac{K_2^{1/2}(s, q) v_2(s) ds}{w_2(p, s) - z} ds \cdot g_1(p),$$

$$(A_{33}(z)g_3)_3(p, q) = g_3(p, q) - (K_2^{1/2} R_{22}^0(z) K_2^{1/2} g_3)_3(p, q),$$

а операторы $K_{ij}(z): \overline{\mathcal{H}}_j \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_i$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, — формулами

$$(K_{00}(z)g_0)_0 = (w_0 - z + 1)g_0, \quad K_{01}(z) \equiv H_{01}, \quad K_{10}(z) \equiv -H_{10},$$

$$(K_{12}(z)g_2)_1(p) = \int \frac{v_2(s) ds}{w_2(p, s) - z} \int K_1^{1/2}(p, t) g_2(t, s) dt,$$

$$(K_{21}(z)g_1)_2(p, q) = -v_2(q) \int \frac{K_1^{1/2}(p, s) g_1(s) ds}{w_2(s, q) - z},$$

$$(K_{23}(z)g_3)_2(p, q) = (K_1^{1/2} R_{22}^0(z) K_2^{1/2} g_3)(p, q),$$

$$(K_{32}(z)g_2)_3(p, q) = (K_2^{1/2} R_{22}^0(z) K_1^{1/2} g_2)(p, q).$$

Здесь $g_i \in \overline{\mathcal{H}}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$; множество $\sigma_{\text{three}}(H_2)$ определено в теореме 1 и $R_{22}^0(z) = (H_{22}^0 - zI_2)^{-1}$ — резольвента оператора H_{22}^0 .

Отметим, что операторы $K_{ij}(z)$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{three}}(H_2)$ принадлежат пространству операторов Гильберта–Шмидта, следовательно, $K(z)$ является компактным оператором.

ЛЕММА 6. Оператор $A(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{three}}(H_2)$ является ограниченным и обратимым тогда и только тогда, когда $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала определим матричный оператор $A_0(z)$, действующий в $\overline{\mathcal{H}}_1 \oplus \overline{\mathcal{H}}_3$ как

$$A_0(z) = \begin{pmatrix} A_{11}(z) & A_{13}(z) \\ A_{31}(z) & A_{33}(z) \end{pmatrix}.$$

По определению операторов $A(z)$ и $A_0(z)$ имеем, что оператор $A(z)$ обратим тогда и только тогда, когда операторы $A_0(z)$ и $A_{22}(z)$ обратимы.

По аналогии с тем, как это делалось для оператора H_2 , мы можем получить следующее разложение: $A_0(z) = \int \oplus [I^{(0,1)} + A_0(p; z)] dp$, где оператор $A_0(p; z)$ определен по формуле (3.3). В силу леммы 4 и теоремы 1 при любых фиксированных $p \in \mathbf{T}^\nu$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_2)$ мы имеем, что $\det[I^{(0,1)} + A_0(p; z)] \neq 0$. Следовательно, при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_2)$ оператор $A_0(z)$ является обратимым. Аналогично можно доказать, что при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_1)$ оператор $A_{22}(z)$ также является обратимым. Легко можно показать, что если операторы $A_0(z)$ и $A_{22}(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{three}}(H_2)$, являются ограниченными и обратимыми, то $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$. Лемма доказана.

В силу леммы 6 при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ оператор $A(z)$ является ограниченным и обратимым, поэтому для таких z мы можем определить оператор $T(z) = A^{-1}(z)K(z)$.

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями операторов H и $T(z)$.

ЛЕММА 7. Число $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора $T(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ – собственное значение оператора H . Тогда уравнение $Hf = zf$ или, что эквивалентно, система уравнений

$$\begin{aligned} ((H_{00} - zI_0)f_0)_0 + (H_{01}f_1)_0 &= 0, \\ (H_{10}f_0)_1(p) + ((H_{11} - zI_1)f_1)_1(p) + (H_{12}f_2)_1(p) &= 0, \\ (H_{21}f_1)_2(p, q) + ((H_{22} - zI_2)f_2)_2(p, q) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

имеет нетривиальное решение $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}^{(0,2)}$. Так как $z \notin \sigma_{\text{three}}(H_1)$, то из третьего уравнения системы (4.1) для f_2 имеем

$$f_2(p, q) = (R_{22}^0(z)K_1f_2)(p, q) + (R_{22}^0(z)K_2f_2)(p, q) - (R_{22}^0(z)H_{21}f_1)(p, q), \quad (4.2)$$

где $R_{22}^0(z) = (H_{22}^0 - zI_2)^{-1}$ – резольвента оператора H_{22}^0 .

Пусть

$$\psi_i(p, q) = (K_i^{1/2}f_2)(p, q), \quad i = 1, 2. \quad (4.3)$$

Тогда равенство (4.2) можно переписать в виде

$$f_2(p, q) = (R_{22}^0(z)K_1^{1/2}\psi_1)(p, q) + (R_{22}^0(z)K_2^{1/2}\psi_2)(p, q) - (R_{22}^0(z)H_{21}f_1)(p, q). \quad (4.4)$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (4.1) и равенство (4.3), получим, что система уравнений

$$\begin{aligned}
 f_0 &= (w_0 - z + 1)f_0 + \int v_1(s)f_1(s) ds, \\
 \left(w_1(p) - z - \int \frac{v_2^2(s) ds}{w_2(p, s) - z} \right) f_1(p) &+ \int \frac{v_2(s) ds}{w_2(p, s) - z} \int K_2^{1/2}(t, s)\psi_2(p, t) dt = \\
 &= -v_1(p)f_0 - \int \frac{v_2(s) ds}{w_2(p, s) - z} \int K_1^{1/2}(p, t)\psi_1(t, s) dt, \\
 \psi_1(p, q) - (K_1^{1/2}R_{22}^0(z)K_1^{1/2}\psi_1)(p, q) &= \\
 &= -v_2(q) \int \frac{K_1^{1/2}(p, s)f_1(s) ds}{w_2(s, q) - z} + (K_1^{1/2}R_{22}^0(z)K_2^{1/2}\psi_2)(p, q), \\
 (K_2^{1/2}R_{22}^0(z)H_{21}f_1)(p, q) + \psi_2(p, q) - (K_2^{1/2}R_{22}^0(z)K_2^{1/2}\psi_2)(p, q) &= \\
 &= (K_2^{1/2}R_{22}^0(z)K_1^{1/2}\psi_1)(p, q)
 \end{aligned}$$

или уравнение $A(z)\psi = K(z)\psi$, $\psi = (f_0, f_1, \psi_1, \psi_2) \in \overline{\mathcal{H}}$, имеют ненулевое решение тогда и только тогда, когда система уравнений (4.1) имеет ненулевое решение.

В силу леммы 6 при каждом фиксированном $z \notin \sigma_{\text{two}}(H_1) \cup \sigma_{\text{two}}(H_2)$ оператор $A(z)$ является обратимым и, следовательно, уравнение $\psi = A^{-1}(z)K(z)\psi$, или $\psi = T(z)\psi$, имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уравнений (4.1) имеет ненулевое решение. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Уравнение $T(z)\psi = \psi$ является аналогом системы интегральных уравнений типа уравнений Фаддеева для собственных векторов оператора H .

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В этом разделе, пользуясь утверждениями разделов 3 и 4, а также критерием Вейля, мы докажем основной результат работы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала докажем, что $\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$. С этой целью перепишем множество $\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)$ в виде

$$\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2) = \sigma_{\text{two}}(H_1) \cup \sigma_{\text{two}}(H_2) \cup \sigma_{\text{three}}(H_2).$$

Включение $\sigma_{\text{three}}(H_2) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$ доказывается аналогично тому, как это сделано в работе [11].

Докажем, что $\sigma_{\text{two}}(H_2) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$. Для этого удобно воспользоваться критерием Вейля, т.е. достаточно построить последовательность ортонормированных векторов $\{f^{(n)}\}$, для которых $\|(H - z_0)f^{(n)}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $z_0 \in \sigma_{\text{two}}(H_2)$ — произвольная точка. Тогда по лемме 4 существует $p_0 \in \mathbf{T}^\nu$ такое, что $z_0 \in \sigma_{\text{disc}}(h_2(p_0))$. Следовательно, существует ненулевой вектор $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{H}^{(0,1)}$ такой, что

$$(h_2(p_0) - z_0 I^{(0,1)})\varphi = 0. \quad (5.1)$$

Положим $f^{(n)} = (0, f_1^{(n)}, f_2^{(n)}) \in \mathcal{H}^{(0,2)}$, где

$$f_1^{(n)}(p) = \frac{\chi_{V_n}(p)}{\sqrt{\mu(V_n(p_0))}} \frac{\varphi_0}{\|\varphi\|}, \quad f_2^{(n)}(p, q) = \frac{\chi_{V_n}(p)}{\sqrt{\mu(V_n(p_0))}} \frac{\varphi_1(q)}{\|\varphi\|},$$

$\chi_{V_n}(\cdot)$ есть характеристическая функция множества

$$V_n(p_0) = \left\{ p \in \mathbf{T}^\nu : \frac{1}{n+1} < |p - p_0| < \frac{1}{n} \right\},$$

$\mu(V_n(p_0))$ – лебегова мера множества $V_n(p_0)$. Легко можно проверить, что система $\{f^{(n)}\}$ является ортонормированной. Покажем, что при $z_0 \in \sigma_{\text{two}}(H_2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(H - z_0 I^{(0,2)})f^{(n)}\| = 0, \quad I^{(0,2)} = \text{diag}\{I_0, I_1, I_2\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \|(H - z_0 I^{(0,2)})f^{(n)}\|^2 &= \frac{|\varphi_0|^2}{\|\varphi\|^2} \cdot \left| \int \frac{\chi_{V_n}(s)v_1(s) ds}{\sqrt{\mu(V_n(p_0))}} \right|^2 + \\ &+ \int \left| \int \frac{\chi_{V_n}(s)K_1(p, s) ds}{\sqrt{\mu(V_n(p_0))}} \right|^2 dp \int \frac{|\varphi_1(q)|^2 dq}{\|\varphi\|^2} + \\ &+ \int |((H_{11} - z_0 I_1)f_1^{(n)})_1(p) + (H_{12}f_2^{(n)})_1(p)|^2 dp + \\ &+ \int |(H_{21}f_1^{(n)})_2(p, q) + ((H_{22} - z_0 I_2)f_2^{(n)})_2(p, q)|^2 dp dq. \end{aligned}$$

Оценим сумму двух первых слагаемых в правой части равенства величиной $C\sqrt{\mu(V_n(p_0))}$, которая по построению множества $V_n(p_0)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Сумму двух оставшихся слагаемых оценим величиной

$$\int \frac{\chi_{V_n}(p)}{\mu(V_n(p_0))} \|h_2(p) - z_0 I^{(0,1)}\|^2 dp \leq \max_{p \in V_n(p_0)} \|h_2(p) - z_0 I^{(0,1)}\|^2.$$

В силу равенства (5.1) последнее выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Из произвольности точки $z_0 \in \sigma_{\text{two}}(H_2)$ вытекает, что $\sigma_{\text{two}}(H_2) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$.

Включение $\sigma_{\text{two}}(H_1) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$ доказывается аналогично. Таким образом, мы доказали, что $(\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$.

Теперь докажем обратное включение, т.е. покажем, что $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$. В силу компактности оператора $K(z)$ и ограниченности оператора $A^{-1}(z)$ получаем, что $T(z)$ – компактная операторнозначная аналитическая функция на множестве $\mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ и оператор $I - T(z)$ обратим при больших $|z|$, где z – вещественное число (здесь I – единичный оператор в $\bar{\mathcal{H}}$). Согласно аналитической теореме Фредгольма [2] существует дискретное множество $S \subset \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ такое, что операторнозначная функция $(I - T(z))^{-1}$ существует и аналитична в $\mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2) \cup S)$, а в точках S имеет вычеты конечного ранга. Следовательно, в силу леммы 7 для оператора $H - zI^{(0,2)}$ существует ограниченный обратный

оператор. Это означает, что множество $\sigma(H) \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ состоит только из изолированных точек и может иметь предельные точки только на границе множества $\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)$. Следовательно, $\sigma(H) \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)) \subset \sigma(H) \setminus \sigma_{\text{ess}}(H)$, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$. Теорема 2 доказана.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность М. Э. Муминову за плодотворные обсуждения результатов работы и рецензенту за ценные и полезные замечания.

Список литературы

- [1] Г. М. Жислин, Труды ММО, **9**, 1960, 81–120.
- [2] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. Т. 4. *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [3] С. Н. Лакаев, М. Э. Муминов, *ТМФ*, **135**:3 (2003), 478–503.
- [4] М. Э. Муминов, *ТМФ*, **148**:3 (2006), 428–443.
- [5] R. A. Minlos, H. Spohn, “The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons”, *Topics in Statistical and Theoretical Physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **177**, ed. R. L. Dobrushin, AMS, Providence, RI, 1996, 159–193.
- [6] Ю. В. Жуков, Р. А. Минлос, *ТМФ*, **103**:1 (1995), 63–81.
- [7] Г. Р. Ёдгоров, М. Э. Муминов, *ТМФ*, **144**:3 (2005), 544–554.
- [8] Т. Х. Расулов, *Матем. заметки*, **83**:1 (2008), 86–94.
- [9] M. I. Muminov, T. H. Rasulov, *The Faddeev Equation and Essential Spectrum of a Hamiltonian in Fock Space*, ICTP Preprint IC/2008/027.
- [10] Т. Х. Расулов, *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 12, 59–69.
- [11] С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов, *Матем. заметки*, **73**:4 (2003), 556–564.
- [12] С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:1 (2003), 81–84.
- [13] S. Albeverio, S. N. Lakaev, T. H. Rasulov, *J. Stat. Phys.*, **127**:2 (2007), 191–220.
- [14] Т. Х. Расулов, *ТМФ*, **152**:3 (2007), 518–527.

Поступила в редакцию 17.11.2008,
после доработки 12.02.2009