Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. П. Новиков, О системе Шлезингера с матрицами размера 2×2 и уравнении Белавина–Полякова–Замолодчикова, *ТМФ*, 2009, том 161, номер 2, 191–203

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6431>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 06:34:45

© 2009 г.

Д. П. Новиков*

О СИСТЕМЕ ШЛЕЗИНГЕРА С МАТРИЦАМИ РАЗМЕРА 2×2 И УРАВНЕНИИ БЕЛАВИНА–ПОЛЯКОВА–ЗАМОЛОДЧИКОВА

Показано, что уравнение Белавина–Полякова–Замолотчикова минимальной модели конформной теории поля в случае центрального заряда алгебры Вирасоро $c = 1$ содержится в системе линейных уравнений, порождающей систему Шлезингера с матрицами размера 2×2 . Это обобщает результаты Сулейманова об уравнениях Пенлеве. Рассмотрены свойства решений, выражающихся через тета-функцию Римана.

Ключевые слова: уравнение Белавина–Полякова–Замолотчикова, система Шлезингера, уравнения Пенлеве, система Гарнье.

1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОПРОВОЖДАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ И ШЛЕЗИНГЕРА

Система уравнений Шлезингера [1] с матрицами $A_i = A_i(t_1, \dots, t_m)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_j}{\partial t_i} &= \frac{[A_i, A_j]}{t_i - t_j}, & i \neq j, \\ \frac{\partial A_i}{\partial t_i} &= - \sum_{j \neq i} \frac{[A_i, A_j]}{t_i - t_j}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $i, j = \overline{1, m}$ (вторую группу уравнений можно заменить условием постоянства по $t_1, \dots, t_m$ матрицы $A_1 + \dots + A_m = A_\infty$), была открыта как условие совместности системы уравнений

$$\begin{aligned} \Psi_x &= A \Psi, & A &= \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{x - t_i}, \\ \Psi_{t_i} &= - \frac{A_i}{x - t_i} \Psi. \end{aligned} \quad (2)$$

Известны все алгебраические интегралы системы (1) – следы $\text{tr } A_i^k$, $k = 1, 2, \dots$ (эквивалентно, характеристические полиномы матриц A_i). В работе [2] была найдена

*Омский государственный технический университет, Омск, Россия

замкнутая форма $\omega = \sum H_i dt_i$:

$$H_i = \frac{1}{2} \operatorname{res}_{x=t_i} (\operatorname{Tr} A^2) \equiv \sum_{j \neq i}^m \frac{\operatorname{tr}(A_j A_i)}{t_i - t_j},$$

и определена τ -функция $(\ln \tau)_{t_i} = H_i$.

В настоящей работе рассматривается только один аспект проблемы полного интегрирования системы (1) в терминах специальных функций. Речь идет о существовании в случае с матрицами A_i размера 2×2 линейного уравнения 2-го порядка для функции $\Phi = \tau\Psi$, все коэффициенты которого являются рациональными функциями от $x, t_1, \dots, t_m$, и об использовании линейной суперпозиции его решений для интегрирования уравнений (2), (1).

В дальнейшем будем считать, что матрицы A_i имеют размер 2×2 и

$$\operatorname{tr} A_i = 0, \quad \det A_i = -\Delta_i, \quad \det A_\infty = -\Delta_\infty;$$

отметим связь $\Delta_i = \delta_i^2/4$ с разностью δ_i собственных чисел A_i . Поскольку

$$\det A = - \sum_i \left[\frac{H_i}{x - t_i} + \frac{\Delta_i}{(x - t_i)^2} \right],$$

то из системы уравнений (2) получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{xx} &= (A^2 + A_x)\Psi = \sum_i \left[\frac{H_i}{x - t_i} + \frac{\Delta_i}{(x - t_i)^2} - \frac{A_i}{(x - t_i)^2} \right] \Psi, \\ \sum_i \frac{1}{x - t_i} \Psi_{t_i} &= \Psi_{xx} - \sum_i \left[\frac{\Delta_i}{(x - t_i)^2} + \frac{H_i}{x - t_i} \right] \Psi. \end{aligned}$$

Для $\Phi = \tau\Psi$ отсюда следует уравнение

$$\sum_i \frac{1}{x - t_i} \Phi_{t_i} = \Phi_{xx} - \sum_i \frac{\Delta_i}{(x - t_i)^2} \Phi. \quad (3)$$

Кроме того,

$$\sum_i (x - t_i) \Psi_{t_i} = -A_\infty \Psi, \quad \Psi_x + \sum_i \Psi_{t_i} = 0.$$

С помощью соотношений

$$\sum_i H_i = 0, \quad \sum_i (t_i H_i + \Delta_i) = \Delta_\infty,$$

следующих из разложения $\det A \sim -\Delta_\infty x^{-2}$ при $x \rightarrow \infty$, выводим уравнения

$$\sum_i (x - t_i) \Phi_{t_i} = \left(\sum_i \Delta_i - \Delta_\infty - A_\infty \right) \Phi, \quad \sum_i \Phi_{t_i} = -\Phi_x. \quad (4)$$

Коэффициенты системы (3), (4) являются рациональными функциями от x, t_i и однозначно определены фиксированием величин Δ_i, A_∞ алгебраических интегралов

системы (1). Заменой $\Phi \rightarrow g\Phi$ с независимой от x, t_i матрицей g можно привести матрицу A_∞ к жордановой форме:

$$A_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\infty = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k_\infty & 0 \\ 0 & -k_\infty \end{pmatrix},$$

тогда первая компонента вектора $\Phi = (\varphi, \psi)^T$ удовлетворяет соотношениям

$$\sum_i \frac{1}{x - t_i} \varphi_{t_i} = \varphi_{xx} - \sum_i \frac{\Delta_i}{(x - t_i)^2} \varphi, \quad \sum_i (x - t_i) \varphi_{t_i} = \rho \varphi, \quad \sum_i \varphi_{t_i} = -\varphi_x$$

с $\rho = \sum_i \Delta_i - \Delta_\infty - k_\infty/2$.

Уравнения (3) появлялись в разных работах. При создании “минимальной” модели двумерной квантовой теории поля с конформной группой симметрий Белафин, Поляков, Замолотчиков получили, в частности, уравнение (см. формулу (5.17) работы [3])

$$\sum_i \frac{1}{x - t_i} \Phi_{t_i} = \varkappa \Phi_{xx} - \sum_i \frac{\Delta_i}{(x - t_i)^2} \Phi,$$

где центральный заряд алгебры Вирасоро $c = -6\varkappa + 13 - 6\varkappa^{-1}$. Уравнение (3) соответствует значению $c = 1$. Дополнительные условия (4) тоже появляются в работах [3], [4].

В работах [5], [6] из уравнений Книжника–Замолотчикова в квазиклассическом пределе были получены системы Шлезингера для матриц произвольного размера. О подобном переходе при $\varkappa \rightarrow 0$ от уравнений работ [3], [4] к уравнению Пенлеве–VI сообщалось в [7]. Связь уравнений из [3], [8] с помощью интегрального преобразования в композиции с введенной в [9] заменой переменных рассматривалась в работе [10].

Излагаемые в настоящей работе результаты автор вывел до того, как ему стали известны статьи [11]–[13], где получены уравнения параболического типа, входящие в представления Лакса уравнений Пенлеве–I–Пенлеве–VI. Приведем для сравнения эквивалент системы Фукса [14], исключение из которой переменной f дает уравнение Пенлеве–VI для u . После введения переменных

$$t = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}, \quad z = \frac{x - t_1}{t_2 - t_1}, \quad f = z^{-\delta_1/2} (z - 1)^{-\delta_2/2} (z - t)^{-\delta_3/2} \varphi$$

система (3), (4) с тремя переменными t_i сводится к одному уравнению

$$\frac{t(t-1)}{z(z-1)(z-t)} f_t = f_{zz} + \left(\frac{1+\delta_1}{z} + \frac{1+\delta_2}{z-1} + \frac{\delta_3}{z-t} \right) f_z + \frac{\rho'}{z(z-1)} f,$$

а вместо первого уравнения системы (2) получаем

$$f_{zz} + \left(\frac{1+\delta_1}{z} + \frac{1+\delta_2}{z-1} + \frac{1+\delta_3}{z-t} - \frac{1}{z-u} \right) f_z + \frac{\rho' z^2 + Pz + Q}{z(z-1)(z-t)(z-u)} f = 0.$$

Отсутствие неизвестной u в первом уравнении позволяет упростить доказательство теоремы 2 работы [15]. Уравнение (3) было найдено аналогично: путем исключения

неизвестных A_i из системы (2) на основе теории из работы [16]. Отметим близость тематики замены переменных и интегральных преобразований [17], [18] для уравнений (3) и (2). Например, сдвиг параметров $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, k_\infty) \rightarrow (\delta_1, \delta_2 - 1, \delta_3 - 1, k_\infty)$ можно получить, применяя к f преобразование Шлезингера или несколько замен переменных и интегральных преобразований Эйлера. Сравнение результатов $f_1 = f_2$ дает интегродифференциальное уравнение для функции f .

2. О ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТЕТА-ФУНКЦИИ И РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ БЕЛАВИНА–ПОЛЯКОВА–ЗАМОЛОДЧИКОВА

Ниже используется теория абелевых функций [19]–[22]. На гиперэллиптической кривой Γ рода g

$$\mu^2 = R(x) = (x - t_0)(x - t_1) \dots (x - t_{2g})$$

(без ограничения общности можно считать $t_0 = 0, t_{2g} = 1$) выберем канонический по Вейерштрассу базис циклов: цикл a_i окружает разрез t_{2i-2}, t_{2i-1} на верхнем листе, цикл b_i идет от того же разреза к разрезу t_{2g}, ∞ по верхнему и нижнему листам. Для наглядности в вещественном случае точки $t_0, \dots, t_{2g}$ располагают по возрастанию между 0 и 1. По базису циклов a_j, b_j определяются интегралы первого рода v и матрица периодов B :

$$v_i(x) = \int_{\infty}^x \frac{(c_{i1}\gamma^{g-1} + \dots + c_{ig})d\gamma}{\sqrt{R(\gamma)}}, \quad \oint_{a_j} dv_i = \delta_{ij}, \quad \oint_{b_j} dv_i = B_{ij}.$$

Введем тета-функции с характеристиками

$$\Theta[p, q](z; B) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_g=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \langle n+p, (n+p)B+2(z+q) \rangle}, \quad \Theta = \Theta[0, 0].$$

Подставим величины $z = v(x) + m_1 B + m_2$, где $[m_1, m_2]$ – такая полупелая характеристика, что $\Theta(z; B) \neq 0$, и любые постоянные p, q . Следуя работам [16], [23], построим пару многозначных по x функций

$$f(x) = \frac{\Theta[p, q](z; B)}{\Theta(z; B)}, \quad f^-(x) = \frac{\Theta[-p, -q](z; B)}{\Theta(z; B)}.$$

Преобразования монодромии для функций f, f^- не зависят от t_i , что проверяется по свойствам интегралов $v(x)$ и тета-функции. После обхода x вокруг ∞ произойдет перестановка f и f^- . После обхода x по циклам a_j и b_j получаем соответственно

$$\begin{aligned} z_i &\rightarrow z_i + \delta_{ij}, & f &\rightarrow e^{2\pi i p_j} f, & f^- &\rightarrow e^{-2\pi i p_j} f^-, \\ z_i &\rightarrow z_i + B_{ij}, & f &\rightarrow e^{-2\pi i q_j} f, & f^- &\rightarrow e^{2\pi i q_j} f^-. \end{aligned}$$

Далее ограничимся случаем ($t_0 = 0, t_{2g} = 1$)

$$f(x) = \frac{\Theta[p, q](v(x) - v(t_0) - v(t_{2g}); B)}{\Theta(v(x) - v(t_0) - v(t_{2g}); B)}. \quad (5)$$

Обозначим множества $J = \{2, \dots, 2g-2\}$, если $g > 1$, и $J = \emptyset$, если $g = 1$. По теореме Римана об обращении в нуль тета-функций [19] функция (5) либо тождественно равна нулю, либо имеет ровно g нулей: $(x, \mu) = (U_i, \sqrt{R(U_i)})$, $i = \overline{1, g}$, и ровно g полюсов: $x = \infty$ и $x = t_i$, $i \in J$, тогда $\ln f(x)$ – интеграл третьего рода:

$$\ln \frac{f(x)}{f(1)} = \frac{1}{2} \int_1^x \left[\sum_{i=1}^g \left(\frac{\sqrt{R(U_i)} + \sqrt{R(\gamma)}}{(\gamma - U_i)\sqrt{R(\gamma)}} + \frac{P_i \gamma^{i-1}}{\sqrt{R(\gamma)}} \right) - \sum_J \frac{1}{\gamma - t_i} \right] d\gamma. \quad (6)$$

Используя данное выражение для $\ln f$, можно выписать уравнения изомонодромной деформации для f – систему Гарнье [24], [25], скалярную версию системы (2). Деформируемому уравнению $\Psi_x = A\Psi$ соответствует уравнение

$$f_{xx} + \left[\sum_{i \in I} \frac{1/2}{x - t_i} + \sum_{i \in J} \frac{3/2}{x - t_i} - \sum_{i=1}^{2g-1} \frac{1}{x - u_i} \right] f_x = \sum_{i=1}^{2g-1} \left(\frac{\beta_i}{x - u_i} + \frac{\alpha_i}{x - t_i} \right) \frac{f}{x(x-1)}, \quad (7)$$

где $I = \{0, 2g\} \cup \{1, 3, \dots, 2g-1\}$. В исследовании системы Гарнье мы ограничиваемся выводом (и свойствами) аналогов соотношений (3), (4).

ТЕОРЕМА. *Функции (5) ($t_0 = 0, t_{2g} = 1$) удовлетворяют уравнению*

$$\sum_{i=1}^{2g-1} \frac{t_i(t_i-1)}{x(x-1)(x-t_i)} f_{t_i} = f_{xx} + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^g \frac{1}{x - t_{2i}} - \sum_{i=1}^g \frac{1}{x - t_{2i-1}} \right] f_x. \quad (8)$$

Доказательство теоремы дано в приложении А.

Обсудим возможности использования линейной суперпозиции решений уравнения (8) для построения решений уравнений фуксова типа (7). Усреднение семейства (5) по параметрам q дает

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\Theta[0, q](z; B)}{\Theta(z; B)} e^{-2\pi i \langle n, q \rangle} dq = \frac{e^{\pi i \langle n, B + 2z \rangle}}{\Theta(z; B)}. \quad (9)$$

Функции семейства (9) с целыми n являются ветвями функции $\Theta^{-1}(z; B)$, получаемыми после того, как x обойдет $n_1, \dots, n_g$ раз по циклам $b_1, \dots, b_g$ соответственно.

Функция Римана $\Theta(z; B)$, $z = v(x) - v(0) - v(1)$ может считаться порождающей семейств (9), (5) и уравнений (7) с группой монодромии, коммутант которой абелев (преобразования f, f^- с $2g$ параметрами p, q даны выше). Все остальные случаи уравнения (7), в том числе и вызывающие интерес из-за связи с униформизацией гиперэллиптических кривых, по всей видимости, не охватываются линейными комбинациями функций (9) с комплексными n по причинам, изложенным в приложении Б.

Предположительно, “некоммутативное” семейство функций, состоящее из тех решений уравнения (8), которые удовлетворяют уравнению (7) с произвольной группой монодромии (число параметров $4g-2$), порождает путем линейной суперпозиции все решения уравнения (8). Возможно, что для этого достаточно группы монодромии со специальной связью порождающих: $M_{2i-1} = M_{2i-2}^{-1}$, $i = \overline{1, g}$, $M_\infty = M_{2g}^{-1}$ (здесь в задаче Римана–Гильберта на объединении непересекающихся интервалов число

параметров $2g - 1$), по аналогии с тем, как при построении (9) из семейства (5) использовалась только часть характеристик $[0, q]$ вместо всех $[p, q]$.

Проблема построения “некоммутативных” аналогов для семейства (9) и $\Theta^{-1}(z; B)$ предположительно связана с конструкцией “конформных блоков” в теории [3]. Отметим родственность τ -функций системы Шлезингера и “конформных блоков” F минимальной модели с центральным зарядом $c = 1$:

$$\tau = \frac{\Theta[p, q](0; B)}{r(t)\Theta(0; B)}, \quad F = \frac{e^{\pi i \langle n, nB \rangle}}{r(t)\Theta(0; B)},$$

где $r(t)$ – алгебраический множитель. Конструкция функции τ дана в работе [16]. Выражение для F в эллиптическом случае $g = 1$ вычислено в работе [26] с помощью интеграла от бесконечного числа переменных, в работах [27], [28] рассмотрен гиперэллиптический случай.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

А.1. Эллиптический случай (7) многократно исследовался в связи с уравнением Пенлеве-VI в случаях Пикара и Хитчина (см., например, [16], [23]).

Здесь мы обсудим решения (5) и (9) уравнения (8) при $g = 1$. Оказывается, им соответствуют фундаментальные решения $\theta[p, q](z, \tau)$ и $e^{\pi i(n^2\tau + 2nz)}$ уравнения теплопроводности. Обозначение аргумента τ стандартное, оно заменяет здесь B из формулы (5), и его не нужно путать с τ -функцией. Далее нормированные эллиптические интегралы даны в форме

$$z = \frac{1}{2K} \int_{\infty}^x \frac{d\gamma}{2\sqrt{R(\gamma)}}, \quad \tau = \frac{1}{K} \int_{\infty}^0 \frac{d\gamma}{2\sqrt{R(\gamma)}}, \quad K = \int_{\infty}^1 \frac{d\gamma}{2\sqrt{R(\gamma)}},$$

$R(x) = x(x-1)(x-t)$. Используются обозначения Якоби: у функций θ ставятся индексы 1, 2, 3, 4, соответствующие характеристикам $[1/2, 1/2]$, $[1/2, 0]$, $[0, 0]$, $[0, 1/2]$; тета-константы $\theta_i(0, \tau)$ пишутся в виде θ_i .

Уточняя утверждение теоремы, покажем, что замена $f = \theta_1^{-1}(z, \tau)\psi$ преобразует уравнение

$$\frac{t(t-1)}{x(x-1)(x-t)} f_t = f_{xx} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-t} \right) f_x \quad (10)$$

в уравнение теплопроводности $4\pi i \psi_{\tau} = \psi_{zz}$.

Воспользуемся определениями z, τ и равенствами

$$4\pi i \frac{\partial \theta_1(z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_1(z, \tau)}{\partial z^2}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{i\pi}{4K^2 t(t-1)}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4K \sqrt{R(x)}}.$$

Проверим тождественность равенства, получаемого в результате подстановки в уравнение (10) в качестве f функции $\theta_1^{-1}(z, \tau)$ и последующих упрощений:

$$\frac{\partial \ln \theta_1(z, \tau)}{\partial z} = \int_1^x \frac{-K(\gamma-t) + 2t(t-1)K_t}{\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma-t)}} d\gamma.$$

Дифференцирование его по z дает соотношение

$$\frac{\partial^2 \ln \theta_1(z, \tau)}{\partial z^2} = -4K^2x + 4K^2t + 8t(t-1)KK_t,$$

которое преобразуется в тождество двух выражений для эллиптической функции, если представить правую часть в переменных z, τ с помощью формул обращения [29]–[31]

$$x = \frac{\theta_2^2 \theta_4^2(z, \tau)}{\theta_3^2 \theta_1^2(z, \tau)}, \quad t = \frac{\theta_2^4}{\theta_3^4}, \quad K = \frac{\pi}{2} \theta_3^2.$$

Заметим, что после перехода от переменной z к x получится уравнение для функции $f = \theta_1^{-1}(z, \tau)$:

$$\frac{f_{xx}}{f} - \frac{f_x^2}{f^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t} \right) \frac{f_x}{f} = \frac{x-t-2t(t-1)K_tK^{-1}}{4x(x-1)(x-t)},$$

совместность которого с уравнением (10) проверяется напрямую. Завершить рассуждения можно, полностью проделав замену переменных, но удобнее применить следующее соображение. После n -кратного обхода x по циклу b (вокруг пары точек $0, \infty$ или $1, t$) функция $\theta_1^{-1}(z, \tau)$ домножается на $\psi_n = e^{\pi i(n^2\tau + 2nz)}$. Поскольку коэффициенты уравнения (10) рациональны по x, t , то функции $\theta_1^{-1}(z, \tau)\psi_n$ являются его решениями. Следовательно, после замены переменных $f = \theta_1^{-1}(z, \tau)\psi$ уравнение (10) преобразуется в уравнение, которому удовлетворяет семейство ψ_n с целыми n .

А.2. Теорему из раздела 2 докажем исходя из аналога уравнения теплопроводности

$$4\pi i \frac{\partial \psi}{\partial B_{jj}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_j^2}, \quad 2\pi i \frac{\partial \psi}{\partial B_{jk}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_j \partial z_k}, \quad j, k = \overline{1, g}. \quad (11)$$

Леммы, данные ниже, основаны на следующих утверждениях из теории гиперэллиптических кривых. Первое утверждение эквивалентно лемме 4.1 из работы [16]:

$$\sum_{i=0}^{2g} \frac{1}{x-t_i} \frac{\partial B_{jk}}{\partial t_i} = 4\pi i \frac{\partial v_j}{\partial x} \frac{\partial v_k}{\partial x} \quad j, k = \overline{1, g}. \quad (12)$$

Согласно второму утверждению нормированные интегралы первого рода $v_j(x)$, определенные в разделе 2, выражаются через периоды интеграла третьего рода I_γ^x :

$$\int_{x,-}^{x,+} dv_j = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{b_j} dI_\gamma^x - \sum_{k=1}^g B_{jk} \oint_{a_k} dI_\gamma^x \right), \quad dI_\gamma^x = \frac{\sqrt{R(x)}}{\gamma - x} \frac{d\gamma}{\sqrt{R(\gamma)}}. \quad (13)$$

Данное тождество можно проверить, сравнив обе части и интеграл по границе разрезанной по всем циклам римановой поверхности [19], [32]

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Gamma'} v_j(\gamma) dI_\gamma^x$$

или используя билинейные соотношения между периодами из работ Абеля [33]. Еще один вариант вычислений изложен в разделе о гиперэллиптическом векторе римановых констант (метод Кристоффеля) книги [20].

ЛЕММА 1. Вектор $z = v(x) - v(t_0) - v(t_{2g})$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=0}^{2g} \frac{1}{x-t_i} \frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - F \frac{\partial z}{\partial x}, \quad F = \frac{R'(x)}{2R(x)} + \sum_{k=1}^g \frac{\partial v_k}{\partial x} \left[\oint_{a_k} dI_\gamma^x + 4\pi i \mu_k \right],$$

где числа μ_k – коэффициенты разложения по периодам следующего полупериода:

$$v_j(t_0) + v_j(t_{2g}) = \sum_k \mu_k B_{kj} + \nu_j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производные от интегралов v_j найдем из (13), учитывая соотношения, верные для любого цикла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_i} \oint dI_\gamma^x &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(x)}}{x-t_i} \oint \frac{d\gamma}{(\gamma-t_i)\sqrt{R(\gamma)}}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \oint dI_\gamma^x &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2g} \frac{\sqrt{R(x)}}{x-t_i} \oint \frac{d\gamma}{(\gamma-t_i)\sqrt{R(\gamma)}}. \end{aligned}$$

После подстановки производных от v_j в проверяемое уравнение и применения тождеств (12) приходим к окончательной формулировке утверждения.

ЛЕММА 2. Пусть z и F те же, что и в лемме 1. Тогда все решения $\psi(z, B)$ системы (11) являются решениями уравнения

$$\sum_{i=0}^{2g} \frac{1}{x-t_i} \psi_{t_i} = \psi_{xx} - F \psi_x. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое уравнение следует из выражений для производных ψ_{t_i} , ψ_x , ψ_{xx} через производные ψ по B_{jk} и z_j с учетом формул (12), (11) и леммы 1.

ЛЕММА 3. Функции (5), (9) удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=0}^{2g} \frac{1}{x-t_i} f_{t_i} = f_{xx} + \frac{1}{2} \left[\sum_{i \in J} \frac{1}{x-t_i} - \sum_{i \in I} \frac{1}{x-t_i} \right] f_x,$$

где I, J – те же множества, что и в уравнении (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2 уравнению (14) удовлетворяют функции

$$\psi = \Theta[p, q](z; B), \quad \psi = e^{\pi i \langle n, nB + 2z \rangle}.$$

Подставив в уравнение (14) $\psi = f \cdot \Theta(z; B)$ и учитывая, что решение $\psi = \Theta(z; B)$ соответствует $f = 1$, получаем для f уравнение вида

$$\sum_{i=0}^{2g} \frac{1}{x-t_i} f_{t_i} = f_{xx} - F_1 f_x.$$

Для нахождения функции F_1 используем выражение через x , t_i некоторых непостоянных решений f семейства (5), следующее из решения задачи обращения Якоби. Нужные формулы приведены в работе [22] (теорема 5.3(3) главы IIIа; см. также [19]–[21]):

$$\frac{\prod_{i \in J} \sqrt{t_i - t_k}}{\prod_{i \in I}^{i \neq k} \sqrt{t_i - t_k}} (x - t_k) = \frac{\Theta^2[\eta_k](z; B)}{\Theta^2(z; B)}, \quad k \in I,$$

$z = v(x) - v(t_0) - v(t_{2g})$, характеристика η_k соответствует полупериоду $v(t_k)$.

Из леммы 3 непосредственно следует теорема, сформулированная в разделе 2, поскольку по определению функции (5) однородны:

$$\sum_{i=0}^{2g} (x - t_i) f_{t_i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{2g} f_{t_i} + f_x = 0.$$

Системы уравнений, которым удовлетворяют тета-функции с аргументом, равным сумме интегралов первого рода, могут быть связаны с уравнением (3). В приложении В даны соответствующие утверждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Рассмотрим уравнения (7), (8) в случае $g = 2$. Положим $t_0 = 0$ и $t_{2g} = 1$, заменим $t_1 \rightarrow \epsilon t_1$, $t_2 \rightarrow t_2 \epsilon^{-1}$, $t_3 \rightarrow 1 - \epsilon t_3$ и перейдем к пределу $\epsilon \rightarrow 0$ в (7), (8):

$$f_{xx} + \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{x-u_i} \right] f_x = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i}{x-u_i} + k_1 + \frac{k_2 x + k_3}{x(x-1)} \right) \frac{f}{x(x-1)}, \quad (15)$$

$$\frac{-t_1 f_{t_1}}{x^2(x-1)} - \frac{t_2 f_{t_2}}{x(x-1)} + \frac{t_3 f_{t_3}}{x(x-1)^2} = f_{xx}. \quad (16)$$

Уравнение (15) интегрируемо в гипергеометрических функциях, соответствующая система изомонодромной деформации интегрируема по Лиувиллю. Любое решение уравнения (15) является линейной комбинацией четырех решений уравнения (16) вида

$$f_{n,m,l} = t_1^{n^2-n} t_3^{m^2-m} t_2^{-l^2+l} P(n, m, l; x),$$

где $P(n, m, l; x)$ удовлетворяет соотношению

$$P_{xx} = \left(\frac{-n(n-1)}{x^2(x-1)} + \frac{l(l-1)}{x(x-1)} + \frac{m(m-1)}{x(x-1)^2} \right) P.$$

Функции (5) в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ дают частные решения уравнения (16). Например, вычисление предела $\epsilon \rightarrow 0$ функций (5) (предварительно умноженных на подходящую величину, зависящую от ϵ) с полуцелыми $[p, q]$ дает решения

$$0, 1, (t_1^{-1} t_2)^{1/4} x^{1/2}, (t_3^{-1} t_2)^{1/4} (x-1)^{1/2}, (t_1 t_3)^{-1/4} [x(x-1)]^{1/2}, x, x-1.$$

Ясно, что для произвольных $[p, q]$ найти предел $\epsilon \rightarrow 0$ функций (6) нелегко (много расходящихся величин), получится выражение вида

$$\ln f = \frac{1}{2} \int \left[\frac{\pm U_1(U_1-1) + x(x-1)}{x(x-1)(x-U_1)} + \frac{\pm U_2(U_2-1) + x(x-1)}{x(x-1)(x-U_2)} + \frac{V_2 x + V_1}{x(x-1)} \right] dx,$$

т.е. в зависимости от знака с точностью до умножения на функцию от t

$$f = x^n(x-1)^m, \quad f = x^n(x-1)^m(x-U), \quad f = x^n(x-1)^m(x-U_1)(x-U_2),$$

где $U = U_1$ или $U = U_2$. Предположительно пределы $\epsilon \rightarrow 0$ функций (5) представляют собой линейную комбинацию трех решений уравнения (16) вида

$$f_{n,m} = t_1^{n^2-n} t_3^{m^2-m} t_2^{-(n+m)^2+n+m} x^n (x-1)^m.$$

Функции семейства $f_{n,m}$ удовлетворяют уравнению

$$\left\{ ac \partial_x + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \partial_x \right) \frac{(a+b+c)^2}{4} - \frac{a+b+c}{2} \left(\frac{a}{x} + \frac{c}{x-1} \right) \right\} f = 0, \quad (17)$$

где $a = t_1 \partial_{t_1}$, $b = t_2 \partial_{t_2}$, $c = t_3 \partial_{t_3}$, поэтому замыкание линейной оболочки семейства $f_{n,m}$ содержит не все решения уравнения (16).

Допущение того, что при $g = 2$ замыкание линейной оболочки семейства (9) содержит все решения уравнения (8) или решения уравнения (7) с группой монодромии, коммутант которой неабелев, противоречит очевидному: соответствующие функции $f_{n,m,l}$ и решения уравнения (15) не удовлетворяют (17).

Существование уравнения (17) для предельной формы функций (5) предположительно означает, что функции (5) удовлетворяют линейному уравнению третьего или четвертого порядка с независимыми от p, q коэффициентами, которое не следует из (8). Для вывода этого линейного уравнения требуется заменить переменные в системе (11):

$$4\pi i \frac{\partial \psi}{\partial B_{11}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_1^2}, \quad 2\pi i \frac{\partial \psi}{\partial B_{12}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_1 \partial z_2}, \quad 4\pi i \frac{\partial \psi}{\partial B_{22}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_2^2}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

В.1. Из системы (2) выводятся уравнения для матрицы $M = \tau \Psi^{-1}(y) \Psi(x)$:

$$\begin{aligned} \sum_i M_{t_i} + M_x + M_y &= 0, & \sum_i t_i M_{t_i} + x M_x + y M_y &= \left(\Delta_\infty - \sum_i \Delta_i \right) M, \\ \sum_i \left(\frac{1}{x-t_i} + \frac{1}{y-x} \right) M_{t_i} &= M_{xx} - \sum_i \frac{\Delta_i}{(x-t_i)^2} M, \\ \sum_i \left(\frac{1}{y-t_i} + \frac{1}{x-y} \right) M_{t_i} &= M_{yy} - \sum_i \frac{\Delta_i}{(y-t_i)^2} M. \end{aligned}$$

В.2. В случае трех переменных t_i в уравнениях для M избавимся от t_1, t_2 . Положим $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = t$. Тогда функция $Y = (x-y)^{-1} M$ будет решением уравнений

$$\begin{aligned} \frac{t(t-1)Y_t}{x(x-1)(x-t)} + \frac{y(y-1)Y_y}{x(x-1)(x-y)} &= Y_{xx} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-y} \right) Y_x - \\ &- \left(\frac{\Delta_0}{x^2} + \frac{\Delta_1}{(x-1)^2} + \frac{\Delta_3}{(x-t)^2} + \frac{\Delta_\infty - 1 - \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3}{x(x-1)} \right) Y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [x(x-1)(x-t)Y_x]_x - \left((\Delta_\infty - 1)x + \Delta_1 \frac{t}{x} + \Delta_2 \frac{1-t}{x-1} + \Delta_3 \frac{t(t-1)}{x-t} \right) Y = \\ & = [y(y-1)(y-t)Y_y]_y - \left((\Delta_\infty - 1)y + \Delta_1 \frac{t}{y} + \Delta_2 \frac{1-t}{y-1} + \Delta_3 \frac{t(t-1)}{y-t} \right) Y. \end{aligned}$$

В последнем уравнении переменные разделены. Известна также замена

$$z = \frac{xy}{t}, \quad v = \frac{(x-t)(y-t)}{t(x-1)(y-1)}, \quad Y = \frac{L}{z-1},$$

тоже разделяющая переменные в том же уравнении и исключаящая t :

$$(z-1)^2 \left[(zL_z)_z - \frac{\Delta_\infty z - \Delta_1}{z(z-1)} L \right] = (v-1)^2 \left[(vL_v)_v - \frac{\Delta_2 v - \Delta_3}{v(v-1)} L \right].$$

Появление здесь гипергеометрических функций в связи с уравнениями Ламе и Гойна обсуждается в работах [30] (раздел 15.5.3), [34], [35].

В.3. Уравнение Пенлеве-I $u'' = 6u^2 + t$ следует из системы

$$\Psi_x = \begin{pmatrix} u' & 2(x-u) \\ 2(x^2 + ux + u^2) + t & -u' \end{pmatrix} \Psi, \quad \Psi_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x + 2u & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

В результате перехода к компонентам $\tau\Psi = (\psi, \psi_1)^T$, где τ -функция определена стандартным образом: $(\ln \tau)' = u'^2/2 - 2u^3 - tu$, получаем уравнение [11]

$$2\psi_t = \psi_{xx} - (4x^3 + 2tx)\psi.$$

Функция $Y = (x-y)^{-1}\tau\Psi(y)^{-1}\Psi(x)$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} 4Y_t &= Y_{xx} + Y_{yy} + 2(x-y)^{-1}(Y_x - Y_y) - (4x^3 + 2tx + 4y^3 + 2ty)Y, \\ Y_{xx} - Y_{yy} &= [4(x^3 - y^3) + 2t(x-y)]Y. \end{aligned}$$

После перехода к переменным $v = x + y$, $z = (x-y)^2 + 2t$ из второго уравнения исключается t :

$$2Y_t = Y_{vv} + 4(z-2t)Y_{zz} + 2Y_z - (v^2 + 3z - 4t)\frac{vY}{2}, \quad 8Y_{zv} = (3v^2 + z)Y.$$

Применив преобразование Лапласа

$$f = \int e^{-kz} Y dz,$$

приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} f_k &= -8kf_v + 3v^2 f, \\ 2f_t &= f_{vv} + (32k^3 - 12kv)f_v + (4v^3 + 2tv - 8k^2t - 12k^2v^2 - 6k)f. \end{aligned}$$

Первое уравнение точно решается:

$$f = F(\zeta)e^{128k^5/5 - 16vk^3 + 3v^2k}, \quad \zeta = 4k^2 - v,$$

а из второго следует уравнение $2F_t = F_{\zeta\zeta} - (4\zeta^3 + 2t\zeta)F$, встречавшееся выше.

В.4. Производные $f_{x_i x_j}$ функции $f = \Theta^{-1}(v(x_1) + \dots + v(x_g) + K; B)$, где вектор римановых констант с началом в ∞ равен сумме интегралов до точек t_{2i} :

$$K = -v(t_0) - v(t_2) - \dots - v(t_{2g}),$$

выражаются линейно через $f_{x_1}, \dots, f_{x_g}$ и f_{t_i} с алгебраическими коэффициентами. Часть этих уравнений образует систему Белавина–Полякова–Замолодчикова [10] с центральным зарядом $c = 1$:

$$\sum_{i=0}^{2g} \frac{1}{x_j - t_i} f_{t_i} = f_{x_j x_j} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2g} \frac{1}{x_j - t_i} f_{x_j} + \sum_{k \neq j} \frac{f_{x_j} - f_{x_k}}{x_j - x_k}, \quad j = \overline{1, g},$$

что следует из лемм, аналогичных приведенным в приложении А, и решения задачи обращения Якоби, выражаемого формулами [19]–[22]

$$\sqrt{\frac{(-1)^{i+1}}{R'(t_i)}} \prod_{j=1}^g (x_j - t_i) = \frac{\Theta^2[\eta_i](z; B)}{\Theta^2(z; B)}, \quad i = \overline{0, 2g}.$$

Благодарности. Автору приятно отметить поддержку многих людей на математическом факультете ОмГУ и в научно-исследовательской части ОмГТУ. Часть результатов докладывалась на конференции “Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений”, посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева, прошедшей 6–12 октября 2008 г. в Институте математики СО РАН.

Список литературы

- [1] L. Schlesinger, *J. für Math.*, **141** (1912), 96–145.
- [2] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **15**:1 (1979), 201–278.
- [3] А. А. Белавин, А. М. Поляков, А. Б. Замолодчиков, “Бесконечная конформная симметрия в двумерной квантовой теории поля”, *Инстантоны, струны и конформная теория поля*, ред. А. А. Белавин, Физматлит, М., 2002, 224–271.
- [4] А. Б. Замолодчиков, В. А. Фатеев, *ЯФ*, **43**:4 (1986), 1031–1044.
- [5] N. Reshetikhin, *Lett. Math. Phys.*, **26**:3 (1992), 167–177; N. Reshetikhin, A. Varchenko, “Quasiclassical Asymptotics of Solutions of the KZ Equations”, *Geometry, Topology, and Physics*, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, ed. S.-T. Yau, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, 293–322; [arXiv: hep-th/9402126](#).
- [6] J. Harnad, “Quantum isomonodromic deformations and the Knizhnik–Zamolodchikov equations”, *Symmetries and Integrability of Difference Equations* (Estrel, PQ, 1994), CRM Proc. Lecture Notes, **9**, eds. D. Levi, L. Vinet, P. Winternitz, Providence, RI, 1996, 155–161; [arXiv: hep-th/9406078](#).
- [7] D. Korotkin, H. Samtleben, *Comm. Math. Phys.*, **190**:2 (1997), 411–457; [arXiv: hep-th/9607095](#).
- [8] V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **247**:1 (1984), 83–103; “Алгебра токов и двумерная модель Весса–Зумино”, *Инстантоны, струны и конформная теория поля*, ред. А. А. Белавин, Физматлит, М., 2002, 311–331.
- [9] Е. К. Склянин, “Разделение переменных в системе Годена”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. IX*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **164**, ред. Л. Д. Фаддеев, Наука, Л., 1987, 151–169.

- [10] A. Stoyanovsky, *A relation between the Knizhnik–Zamolodchikov and Belavin–Polyakov–Zamolodchikov systems of partial differential equations*, [arXiv: math-ph/0012013v2](#).
- [11] Б. И. Сулейманов, “Тамильтонова структура уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций”, *Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений*, ред. А. М. Ильин, Ин-т математики, Уфа, 1988, 93–102; *Дифференц. уравнения*, **30**:5 (1994), 791–795.
- [12] С. П. Баландин, Б. И. Сулейманов, *Дифференц. уравнения*, **30**:12 (1994), 2175–2176.
- [13] Б. И. Сулейманов, *ТМФ*, **156**:3 (2008), 364–377.
- [14] R. Fuchs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **141** (1905), 555–558.
- [15] Д. П. Новиков, *ТМФ*, **146**:3 (2006), 355–364.
- [16] A. V. Kitaev, D. A. Korotkin, *Internat. Math. Res. Notices*, **1998**:17 (1998), 877–905; [arXiv: math-ph/9810007](#).
- [17] А. Я. Казаков, С. Ю. Славянов, *ТМФ*, **155**:2 (2008), 252–264.
- [18] A. V. Kitaev, *Алгебра и анализ*, **17**:1 (2005), 224–275; [arXiv: nlin.SI/0309078](#).
- [19] Б. Риман, “Теория абелевых функций I”, *Сочинения*, ред. В. Л. Гончаров, ОГИЗ, М., 1948, 88–138; “Об обращении в нуль θ -функций III”, 139–150.
- [20] A. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen*, Teubner, Leipzig, 1903.
- [21] H. F. Baker, *Abel’s Theorem and the Allied Theory Including the Theory of the Theta Functions*, Univ. Press, Cambridge, 1897.
- [22] Д. Мамфорд, *Лекции о тета-функциях*, Мир, М., 1988.
- [23] P. Deift, A. Its, A. Караев, X. Zhou, *A note on the algebro-geometric integration of the Schlesinger equations and on the elliptic solutions of the Painlevé VI equation*, Preprint PDMI 20/1997.
- [24] R. Garnier, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*(3), **29** (1912), 1–126.
- [25] B. Dubrovin, M. Mazzocco, *Comm. Math. Phys.*, **271**:2 (2007), 289–373; [arXiv: math.DG/0311261](#).
- [26] Ал. Б. Замолодчиков, *ЖЭТФ*, **90**:5 (1986), 1808–1818.
- [27] Al. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **285**:3 (1987), 481–503.
- [28] А. Б. Замолодчиков, Ал. Б. Замолодчиков, *Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах*, ИТЭФ, ЦНИИатоминформ, М., 1989–1990.
- [29] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.
- [30] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Маттье*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1967.
- [31] Yu. V. Brezhnev, *On functions of Jacobi–Weierstrass (I) and equation of Painleve*, [arXiv: 0808.3486](#).
- [32] Б. А. Дубровин, *УМН*, **36**:2(218) (1981), 11–80.
- [33] N. H. Abel, *Œuvres complètes*. Т. I, Complete Works. Vol. I, eds. L. Sylow and S. Lie, Editions Jacques Gabay, Sceaux, 1992, 40–60; *Œuvres complètes*. Т. II, 145–211.
- [34] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Ч. 2, Физматлит, М., 1963.
- [35] В. Лай, А. Я. Казаков, С. Ю. Славянов, *Алгебра и анализ*, **8**:2 (1996), 129–141; С. Славянов, В. Лай, *Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей*, Невский Диалект, С-Пб., 2002.

Поступила в редакцию 2.12.2008