Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Гордевский, Винтовые потоки с ускорением и уплотнением для модели твердых сфер, *ТМФ*, 2009, том 161, номер 2, 278–286

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6438>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 06:54:39

© 2009 г.

В. Д. Гордевский*

ВИНТОВЫЕ ПОТОКИ С УСКОРЕНИЕМ И УПЛОТНЕНИЕМ ДЛЯ МОДЕЛИ ТВЕРДЫХ СФЕР

Построена модель взаимодействия между двумя потоками в газе из твердых сфер, каждый из которых имеет структуру ускоряющегося и уплотняющегося винтового потока. Получены некоторые условия, достаточные для произвольной малости равномерно-интегральной, или “смешанной”, нормы разности между левой и правой частями уравнения Больцмана.

Ключевые слова: твердая сфера, уравнение Больцмана, “смешанная” невязка, винтовой поток, ускорение-уплотнение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В случае модели твердых сфер уравнение Больцмана имеет вид [1], [2]

$$D(f) = Q(f, f), \quad (1)$$

где

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2)$$

$$Q(f, f) = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v_1 - v, \alpha)| \times \quad (3)$$

$$\times [f(t, v'_1, x)f(t, v', x) - f(t, v_1, x)f(t, v, x)].$$

Здесь f – искомая функция распределения молекул газа, $\partial f / \partial x$ (или f') – градиент по переменной x ; $t \in \mathbb{R}^1$ – время; $x = (x^1; x^2; x^3) \in \mathbb{R}^3$ и $v = (v^1; v^2; v^3) \in \mathbb{R}^3$ – координата и скорость молекулы; d – ее диаметр; $\alpha \in \Sigma$, где $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ – сфера радиуса 1 с центром в нуле (здесь и далее $(a, b) = ab$ – скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^3$, $(a, a) = a^2$ – скалярный квадрат вектора $a \in \mathbb{R}^3$). Связь между скоростями двух молекул до и после столкновения такова:

$$v'_1 = v_1 + \alpha(v - v_1, \alpha), \quad v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha). \quad (4)$$

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина.
E-mail: gordevskyy2006@yandex.ru

Для рассматриваемой модели взаимодействия между молекулами газа единственным точным решением уравнения (1), найденным в явном виде, до сих пор остается максвелловское распределение (максвеллиан)

$$M = \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta(v-\tilde{v})^2}. \quad (5)$$

Входящие в данное выражение гидродинамические параметры суть плотность газа ρ , его “обратная температура” $\beta = 1/2T$ (T – абсолютная температура; константа Больцмана для простоты полагается равной единице), $\tilde{v}$ – средняя, или массовая скорость молекул, которая может определенным образом зависеть от t и x . Простейшие случаи, когда эти параметры постоянны (глобальный максвеллиан) либо зависят только от x (стационарный неоднородный локальный максвеллиан, или винт в терминологии работы [3]) были известны еще Максвеллу и Больцману [1], [2], [4]–[6]. Наиболее общий (нестационарный) случай локальных максвеллианов был исследован в [2], [4], [5]; их описание можно найти также в [1], [6]. В статье [7] проведена детальная классификация таких решений и выяснены некоторые физические и геометрические особенности каждого из выделенных в этой работе типов локально-максвелловских распределений. Одно из описанных в работе [7] нестационарных, неоднородных точных решений уравнения Больцмана получило название ускоряющегося и уплотняющегося винта, ибо соответствующий ему поток газа не только вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью, но также имеет растущие со временем плотность и линейную скорость вдоль указанной оси.

В работах [8]–[10] предложен подход, позволяющий искать явные приближенные решения уравнения Больцмана в виде бимодального распределения

$$f = \sum_{i=1}^2 \varphi_i M_i, \quad (6)$$

где глобальные максвелловские моды M_i имеют вид (5) с различными параметрами $\rho_i > 0$, $\beta_i > 0$, $\tilde{v}_i \in \mathbb{R}^3$, а коэффициентные функции φ_i зависят от t , x и предполагаются неотрицательными и гладкими, $i = 1, 2$. В качестве величины, характеризующей различие между левой и правой частями уравнения (1), используется равномерно-интегральная (“смешанная”) невязка

$$\Delta = \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} dv |D(f) - Q(f, f)|. \quad (7)$$

Аналогичная задача для случая стационарных винтовых потоков решена в работе [3], а для нестационарных вихрей (при этом M_i , $i = 1, 2$, представляют собой некие “квазимаксвеллианы”, являющиеся лишь приближенными решениями уравнения Больцмана) – в работе [11]. Использование в статьях [12], [13] иной, “чисто интегральной”, невязки Δ_1 приводит к совершенно другому виду приближенных бимодальных решений, т.е. функций φ_i , $i = 1, 2$, в (6). В работе [14] в качестве

максвелловских мод M_i , $i = 1, 2$, использованы новые точные нестационарные решения, которые соответствуют не вращающимся, но ускоряющимся и уплотняющимся потокам газа.

Целью настоящей работы является поиск таких распределений вида (6), где максвеллианы M_i , $i = 1, 2$, описывают винтовые потоки с ускорением и уплотнением, которые были бы приближенными решениями уравнения (1)–(4), т.е. позволяли бы сделать невязку (7) сколь угодно малой.

Постановка задачи такова. Пусть моды в (6) имеют вид [7]

$$M_i = M_i(t, v, x) = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta_i (v - \bar{v}_i)^2}, \quad (8)$$

где

$$\bar{v}_i = \bar{v}_i(t, x) = \bar{v}_i + [\bar{\omega}_i \times x] - \bar{u}_i t, \quad (9)$$

$$\rho_i = \rho_i(t, x) = \bar{\rho}_i e^{\beta_i (\bar{v}_i^2 + 2\bar{u}_i x)} \quad (10)$$

($[a \times b]$ – векторное произведение в $\mathbb{R}^3$); здесь $\bar{v}_i$, $\bar{\omega}_i$ и $\bar{u}_i \in \mathbb{R}^3$; β_i , $\bar{\rho}_i > 0$ – некие векторные и скалярные константы, причем

$$\bar{u}_i \parallel \bar{\omega}_i, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Требуется найти такие функции $\varphi_i \geq 0$, принадлежащие пространству $C^1(\mathbb{R}^4)$, чтобы при подходящем поведении имеющихся параметров невязка Δ , определенная в (7), стремилась к нулю.

Следующий раздел содержит основные результаты решения указанной задачи.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Прежде чем формулировать первое утверждение, проанализируем выражения (8)–(10) с учетом условия (11), для чего несколько преобразуем их и введем удобные обозначения.

Очевидно, что в силу (11) справедливо тождество

$$\bar{v}_i^2 = \bar{\omega}_i^2 r_i^2 + \left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i^2} (\bar{\omega}_i, \bar{v}_i) - \bar{u}_i t \right)^2, \quad (12)$$

где

$$r_i^2 = \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} [\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})]^2, \quad x_{0i} = \frac{[\bar{\omega}_i \times \bar{v}_i]}{\bar{\omega}_i^2}, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

т.е. равенство (10) приобретает вид

$$\rho_i = \bar{\rho}_i(t, x) e^{\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2}, \quad (14)$$

где введено обозначение

$$\bar{\rho}_i(t, x) = \bar{\rho}_i \exp \left[\beta_i \left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i^2} (\bar{\omega}_i, \bar{v}_i) - \bar{u}_i t \right)^2 + 2\beta_i \bar{u}_i x \right]. \quad (15)$$

Следовательно, выражение (8) можно записать так:

$$M_i = \bar{\rho}_i(t, x) e^{\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2} \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta_i (v - \bar{v}_i)^2}, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Теперь легко видеть, что такая функция M_i описывает вращение газа как целого с угловой скоростью $\bar{\omega}_i$ вокруг неподвижной оси, проходящей через точку x_{0i} (величина r_i^2 есть квадрат расстояния от точки $x \in \mathbb{R}^3$ до этой оси), а $\bar{\rho}_i(t, x)$ задает распределение плотности (причем $\bar{u}_i x$ – ее минимальное по всем $r \in [0, +\infty)$ значение при фиксированном t) вдоль оси вращения. Очевидно также, что функции (9), (15) возрастают по t и x , причем (9) линейна по t , а (15) линейна по x именно вдоль оси, задаваемой вектором $\bar{\omega}_i$ (в силу (11)), что оправдывает название “винтовые потоки”, вынесенное в заголовок настоящей статьи (вектор $-\bar{u}_i$ играет роль “массового ускорения”, а $\bar{v}_i$ – массовой скорости вдоль оси при $t = 0$).

ТЕОРЕМА 1. Пусть распределение f задается формулами (6), (8)–(11), а функции $\varphi_i = \varphi_i(t, x)$, $i = 1, 2$, таковы:

$$\varphi_i = \frac{D_i}{(1+t^2)^{\kappa_i}} C_i \left(x + \bar{\omega}_i t^2 \frac{\bar{u}_i^2}{2\bar{u}_i \bar{\omega}_i} \right), \quad (17)$$

где $D_i > 0$, $\kappa_i \geq 1/2$ – произвольные постоянные, а $C_i \geq 0$ – произвольные гладкие финитные или быстроубывающие функции указанных векторных аргументов. Кроме того, предположим, что

$$\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_{0i} \beta_i^{-m_i}, \quad \bar{u}_i = \bar{u}_{0i} \beta_i^{-n_i}, \quad (18)$$

$$\bar{v}_i = 0, \quad (19)$$

где $\bar{\omega}_{0i}$, $\bar{u}_{0i} \in \mathbb{R}^3$ – произвольные фиксированные векторы, а числа m_i , n_i удовлетворяют условиям

$$m_i \geq \frac{1}{2}, \quad n_i \geq 1. \quad (20)$$

Тогда определена такая величина Δ' , что $\Delta \leq \Delta'$, причем существует

$$\lim_{\beta_{1,2} \rightarrow +\infty} \Delta' = \sum_{i=1}^2 \bar{\rho}_i D_i K_i(\kappa_i) \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (C_i(x) \mu_i(x)), \quad (21)$$

где

$$K_i(\kappa_i) = 2\kappa_i \sup_{t \in \mathbb{R}^1} \frac{|t|}{(1+t^2)^{\kappa_i+1}}, \quad (22)$$

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & m_i > 1/2, \quad n_i > 1, \\ e^{2\bar{u}_{0i}x}, & m_i > 1/2, \quad n_i = 1, \\ e^{[\bar{\omega}_{0i} \times x]^2}, & m_i = 1/2, \quad n_i > 1, \\ e^{[\bar{\omega}_{0i} \times x]^2 + 2\bar{u}_{0i}x}, & m_i = 1/2, \quad n_i = 1. \end{cases} \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать для максвеллианов M_i , $i = 1, 2$, входящих в (6), форму (16), учитывая, что предположение (19) приводит к существенным упрощениям в (9) и (13)–(15): мы имеем для $i = 1, 2$

$$\tilde{v}_i = [\bar{\omega}_i \times x] - \bar{u}_i t, \quad r_i^2 = \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} [\bar{\omega}_i \times x]^2, \quad x_{0i} = 0, \quad (24)$$

$$e^{\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2} = e^{\beta_i [\bar{\omega}_i \times x]^2}, \quad \bar{\rho}_i(t, x) = \bar{\rho}_i e^{\beta_i [\bar{u}_i^2 t^2 + 2\bar{u}_i x]}. \quad (25)$$

Подставим формулы (6), (16), (24), (25) в (2), (3), а затем полученные выражения – в (7), учтем, что максвеллианы удовлетворяют уравнению Больцмана [1],

$$D(M_i) = Q(M_i, M_i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (26)$$

и применим технику, развитую в работе [3]. Получим такую оценку сверху величины Δ :

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^2 \left[\int_{\mathbb{R}^3} du \left| \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \tilde{v}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) e^{\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2} + \right. \right. \\ & + \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \bar{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \bar{\omega}_2^2 r_2^2} \bar{\rho}_j(t, x) \frac{d^2}{\pi^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dw F_{ij}(u, t, x, w) e^{-w^2} \left| \bar{\rho}_i(t, x) \frac{e^{-u^2}}{\pi^{3/2}} + \right. \\ & \left. \left. + \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \bar{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \bar{\omega}_2^2 r_2^2} \bar{\rho}_1(t, x) \bar{\rho}_2(t, x) \frac{d^2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^6} dw du e^{-w^2 - u^2} F_{ij}(u, t, x, w) \right] \right], \quad (27) \end{aligned}$$

где

$$F_{ij}(u, t, x, w) = \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \tilde{v}_i - \tilde{v}_j - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right|, \quad i \neq j. \quad (28)$$

Оценку (27), очевидно, можно продолжить, опираясь на первое равенство в (24), соотношения (25) и известные свойства модулей, скалярных произведений, интегралов и точных верхних граней. В результате получаем оценку $\Delta \leq \Delta'$ при

$$\begin{aligned} \Delta' = & \sum_{i=1}^2 \bar{\rho}_i \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left\{ \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right| e^{\beta_i ([\bar{\omega}_i \times x]^2 + \bar{u}_i^2 t^2 + 2\bar{u}_i x)} \right\} + \\ & + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^2 \left[\int_{\mathbb{R}^3} du \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left\{ \left(\frac{|u|}{\sqrt{\beta_i}} + |[\bar{\omega}_i \times x] - \bar{u}_i t| \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \right) \bar{\rho}_i(t, x) e^{\beta_i [\bar{\omega}_i \times x]^2} \right\} \times \right. \\ & \times \frac{e^{-u^2}}{\pi^{3/2}} + 2 \frac{d^2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^6} dw du e^{-w^2 - u^2} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left\{ \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 [\bar{\omega}_1 \times x]^2 + \beta_2 [\bar{\omega}_2 \times x]^2} \times \right. \\ & \left. \left. \times \bar{\rho}_1(t, x) \bar{\rho}_2(t, x) F_{ij}(u, t, x, w) \right\} \right] \quad (29) \end{aligned}$$

(здесь в первой, “выделенной”, сумме интегрирование по u уже произведено). Прежде всего, проверим, что выражение Δ' действительно корректно определено. Для этого, как видно из (27), достаточно доказать, что если φ_i имеют вид (17), то произведения величин

$$\varphi_i, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}, \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right|, \quad \varphi_i |[\bar{\omega}_i \times x] - \bar{u}_i t|, \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| |[\bar{\omega}_i \times x] - \bar{u}_i t| \quad (30)$$

на множители ρ_i , заданные формулой (14) с учетом (25), ограничены по t, x на $\mathbb{R}^4$ (сходимость всех интегралов очевидна ввиду равенства (28) и присутствия в интегралах убывающих экспонент). Первое из указанных произведений после введения новой переменной

$$y = x + \bar{\omega}_i t^2 \frac{\bar{u}_i^2}{2\bar{u}_i\bar{\omega}_i} \in \mathbb{R}^3 \quad (31)$$

приобретает вид

$$\frac{D_i}{(1+t^2)^{\kappa_i}} C_i(y) \bar{\rho}_i e^{\beta_i(2\bar{u}_i y + [\bar{\omega}_i \times y]^2)}. \quad (32)$$

Следовательно, в силу свойств функций C_i , $i = 1, 2$, указанных в условии теоремы, это произведение ограничено по $y \in \mathbb{R}^3$, а ограниченность по t вытекает из условия $\kappa_i \geq 1/2$. По этим же причинам ограничено четвертое произведение, после замены (31) допускающее оценку сверху величиной

$$\frac{D_i}{(1+t^2)^{\kappa_i}} C_i(y) \bar{\rho}_i e^{\beta_i(2\bar{u}_i y + [\bar{\omega}_i \times y]^2)} (|\bar{\omega}_i \times y| + |t||\bar{u}_i|). \quad (33)$$

Аналогичные соображения показывают ограниченность и остальных трех произведений, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} &= \frac{D_i}{(1+t^2)^{\kappa_i}} C'_i \left(x + \bar{\omega}_i t^2 \frac{\bar{u}_i^2}{2\bar{u}_i\bar{\omega}_i} \right), \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} &= - \frac{2t\kappa_i D_i}{(1+t^2)^{\kappa_i+1}} C_i \left(x + \bar{\omega}_i t^2 \frac{\bar{u}_i^2}{2\bar{u}_i\bar{\omega}_i} \right) + \\ &\quad + \frac{D_i t}{(1+t^2)^{\kappa_i}} \left(C'_i \left(x + \bar{\omega}_i t^2 \frac{\bar{u}_i^2}{2\bar{u}_i\bar{\omega}_i} \right), \bar{\omega}_i \right) \frac{\bar{u}_i^2}{\bar{u}_i\bar{\omega}_i}. \end{aligned} \quad (34)$$

Найдем теперь предел суммы (29) при $\beta_{1,2} \rightarrow +\infty$. Для этого еще раз перепишем ее, используя (18), (19), выражение для $\tilde{v}_i$ в (24), формулы (28), (31), (34) и вводя новые обозначения $\gamma_i = 1/\beta_i$, $i = 1, 2$. После этой замены надо искать предел при $\gamma_{1,2} \rightarrow 0$ выражения

$$\begin{aligned} \Delta' &= \sum_{i=1}^2 \bar{\rho}_i D_i \sup_{(t,y) \in \mathbb{R}^4} \left\{ \frac{|t|}{(1+t^2)^{\kappa_i}} C_i(y) e^{2\bar{u}_{0i} y \gamma_i^{n_i-1} + [\bar{\omega}_{0i} \times y]^2 \gamma_i^{2m_i-1}} \times \right. \\ &\quad \times \left. \left| \frac{2\kappa_i}{1+t^2} + (C'_i(y), \bar{\omega}_{0i}) \frac{\bar{u}_{0i}^2}{\bar{u}_{0i}\bar{\omega}_{0i}} \gamma_i^{n_i} \right| \right\} + \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^2 \left[\int_{\mathbb{R}^3} du \sup_{(t,y) \in \mathbb{R}^4} \left\{ \left(|u| \sqrt{\gamma_i} + |\gamma_i^{m_i} [\bar{\omega}_{0i} \times y] - \gamma_i^{n_i} \bar{u}_{0i} t \right| \times \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \frac{D_i}{(1+t^2)^{\kappa_i}} C'_i(y) \right) \bar{\rho}_i e^{2\bar{u}_{0i} y \gamma_i^{n_i-1} + [\bar{\omega}_{0i} \times y]^2 \gamma_i^{2m_i-1}} \right\} \frac{e^{-u^2}}{\pi^{3/2}} + \\ &\quad + 2 \frac{d^2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^6} dw du e^{-w^2 - u^2} \sup_{(t,y) \in \mathbb{R}^4} \left\{ \frac{D_1 D_2}{(1+t^2)^{\kappa_1+\kappa_2}} C_1(y) C_2(y) \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left(2y(\bar{u}_{01}\gamma_1^{n_1-1} + \bar{u}_{02}\gamma_2^{n_2-1}) + \sum_{i=1}^2 [\bar{\omega}_{0i} \times y]^2 \gamma_i^{2m_i-1} \right) \times \\ & \times \left| u\sqrt{\gamma_i} + [\bar{\omega}_{0i} \times y]\gamma_i^{m_i} - \bar{u}_{0i}t\gamma_i^{n_i} - [\bar{\omega}_{0j} \times y]\gamma_j^{m_j} + \bar{u}_{0j}t\gamma_j^{n_j} - w\sqrt{\gamma_j} \right|. \end{aligned} \quad (35)$$

Легко видеть, что в данной сумме все слагаемые, кроме первого, представляют собой произведения тех или иных положительных (в силу неравенств (20)) степеней величин γ_i , $i = 1, 2$, на конечные величины (существование конечных точных верхних граней и интегралов обосновано выше), и поэтому стремятся к нулю. Что касается оставшегося первого слагаемого, то входящая в него точная верхняя грань по t и y , очевидно, распадается на произведение отдельных точных верхних граней по каждой из переменных, что с использованием обозначения (22) дает

$$\sum_{i=1}^2 \bar{\rho}_i D_i K(\kappa_i) \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \left\{ C_i(y) e^{2\bar{u}_{0i}y\gamma_i^{n_i-1} + [\bar{\omega}_{0i} \times y]^2 \gamma_i^{2m_i-1}} \right\}. \quad (36)$$

К последней точной верхней грани может быть применена лемма 1 из [3], условия которой легко проверяются на основании условий нашей теоремы. Это обеспечивает непрерывность точной верхней грани как функции от $\gamma_{1,2}$ в достаточно малой окрестности нуля. Таким образом, в (36) можно перейти к пределу при $\gamma_{1,2} \rightarrow 0$ под знаком $\sup$, в результате чего получим четыре возможных предельных значения в зависимости от величин m_i , n_i , $i = 1, 2$, ограниченных условиями (20). Итак, мы с точностью до обозначений приходим к соотношениям (21)–(23), что и требовалось. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. При выполнении условий теоремы 1 справедливо следующее утверждение: для произвольного положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что при всех D_1, D_2 , меньших δ , и достаточно больших значениях β_1, β_2 выполнено неравенство $\Delta < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно в силу соотношения (21), ибо входящие в него константы $\bar{\rho}_i$, $K_i(\kappa_i)$ и точные верхние грани конечны (благодаря свойствам функций C_i , $i = 1, 2$) и не зависят от D_1, D_2 , а предельный переход по $\beta_{1,2} \rightarrow +\infty$ уже осуществлен.

Следующий результат содержит дополнительное предположение о структуре коэффициентов функций φ_i , $i = 1, 2$, сходное с использованным ранее в [3], [11], [14].

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициенты φ_i , $i = 1, 2$, в (6) имеют вид

$$\varphi_i(t, x) = \psi_i(t, x) \bar{\rho}_i [\bar{\rho}_i(t, x)]^{-1} e^{-\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2}, \quad (37)$$

где r_i^2 и $\bar{\rho}_i(t, x)$ заданы в (13), (15). Пусть при

$$m_i > \frac{1}{2}, \quad n_i > 1 \quad (38)$$

вновь выполнены предположения (18). Тогда, если множители ψ_i , $i = 1, 2$, имеют вид

$$\psi_i(t, x) = D_i C_i(t) E_i(x), \quad (39)$$

где $C_i, E_i \geq 0$ – некие гладкие финитные или быстроубывающие функции, то справедливо неравенство $\Delta < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова используем представление (16), однако ввиду отсутствия теперь предположения (19) следует вычислять входящие в (16) величины по исходным формулам (9), (13), (15), а не по (24), (25). Поэтому выкладки, аналогичные проделанным выше при доказательстве теоремы 1, вновь приводят (в силу (11), (26) и т.п.) к соотношениям (27), (28), однако с другими значениями для $\bar{\rho}_i(t, x)$, $\bar{v}_i$, $\bar{r}_i^2$, $i = 1, 2$. Далее, подставим в (27) выражения (36) вместо (17) и учтем формулы (15) и тот факт, что теперь производные (34) выглядят совершенно иначе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \psi_i (\bar{u}_i + [\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})] \times \bar{\omega}_i) \right) \varphi_i \psi_i^{-1}, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left(\frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i^2} (\bar{\omega}_i, \bar{v}_i) - \bar{u}_i t \right) \bar{u}_i \right) \varphi_i \psi_i^{-1}. \end{aligned} \quad (40)$$

В результате получим следующее выражение для величины Δ' в оценке $\Delta \leq \Delta'$:

$$\begin{aligned} \Delta' &= \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^2 \left[\bar{\rho}_i \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} du e^{-u^2} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left(\frac{(\bar{\omega}_i, \bar{u}_i)}{\bar{\omega}_i^2} (\bar{\omega}_i, \bar{v}_i) - t \bar{u}_i^2 \right) \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \psi_i (\bar{u}_i + [\bar{\omega}_i \times (x - x_{0i})] \times \bar{\omega}_i) \right) \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v}_i \right) + \right. \\ &\quad \left. + \psi_1 \psi_2 \bar{\rho}_j \frac{d^2}{\pi^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dw F_{ij} e^{-w^2} \right| e^{-u^2} du + \\ &\quad \left. + \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 \frac{d^2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} dw du e^{-w^2 - u^2} \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} (\psi_1 \psi_2 F_{ij}) \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь F_{ij} также задаются формулой (28), однако $\bar{v}_i$ имеют вид (9). Конечность величины (41) обеспечивается тем, что если выполнено (39), то все функции (30) (с заменой φ_i на ψ_i , $i = 1, 2$), очевидно, ограничены на $\mathbb{R}^4$. Предельный переход в (41) по $\beta_{1,2} \rightarrow +\infty$ с использованием (18) при условии (38) дает (возможность предельного перехода обосновывается точно так же, как при доказательстве теоремы 1)

$$\begin{aligned} \lim_{\beta_{1,2} \rightarrow +\infty} \Delta' &= \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^2 \bar{\rho}_i \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \bar{\rho}_j \pi d^2 \psi_1 \psi_2 |\bar{v}_i - \bar{v}_j| \right| + \\ &\quad + 2\pi d^2 \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 |\bar{v}_1 - \bar{v}_2| \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} (\psi_1 \psi_2), \end{aligned} \quad (42)$$

ибо теперь F_{ij} , $i \neq j$, вместо нулевого предела имеют

$$\lim_{\beta_{1,2} \rightarrow +\infty} F_{ij} = |\bar{v}_1 - \bar{v}_2|. \quad (43)$$

Наконец, подставим (39) в (41), получим

$$\begin{aligned} \lim_{\beta_{1,2} \rightarrow +\infty} \Delta' = & \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^2 D_i \bar{\rho}_i \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} |C'_i(t) E_i(x) + C_i(t) \bar{v}_i E'_i(x) + \\ & + D_j \bar{\rho}_j \pi d^2 C_i(t) C_j(t) E_i(x) E_j(x) | \bar{v}_i - \bar{v}_j | | + \\ & + 2\pi d^2 D_1 D_2 \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 | \bar{v}_1 - \bar{v}_2 | \sup_{t \in \mathbb{R}^1} (C_1 C_2) \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (E_1 E_2), \end{aligned} \quad (44)$$

откуда с учетом $\Delta \leq \Delta'$ немедленно следует $\Delta < \varepsilon$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 2 скорости $\bar{v}_i$ произвольны, в отличие от теоремы 1, где предполагалось (19), зато на коэффициентные функции φ_i и векторы $\bar{\omega}_i$, $\bar{u}_i$ налагаются более жесткие ограничения (37)–(39), чем (17), (20).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Представляется возможным увеличить количество ситуаций, рассматривая в теореме 2, помимо случая (38), и другие сочетания условий на m_i , n_i , $i = 1, 2$, возникающие в (20), подобно тому, как это сделано в (23). Более того, условия (20) можно было бы ослабить (см., например, [3]). Это привело бы к некоторому усложнению правой части в (42) и самого доказательства, но не дало ничего принципиально нового по сравнению с окончательным неравенством $\Delta < \varepsilon$.

Таким образом, в настоящей работе нам удалось построить в явном виде некоторые новые приближенные решения уравнения Больцмана в случае модели твердых сфер. Они найдены в виде бимодальных распределений, т.е. линейных комбинаций локально максвелловских решений, соответствующих винтовым потокам с ускорением и уплотнением, имеющих вид (8)–(11). Выбор коэффициентных функций этих распределений в специальной форме (17) либо (37), (39) позволяет при некоторых дополнительных условиях на поведение угловых и линейных скоростей потоков, а также их температур и других параметров сделать “смешанную” невязку между частями этого уравнения сколь угодно малой.

Список литературы

- [1] К. Черчиньяни, *Теория и приложения уравнения Больцмана*, Мир, М., 1978.
- [2] Т. Карлеман, *Математические задачи кинетической теории газов*, ИЛ, М., 1960.
- [3] В. Д. Гордецкий, *ТМФ*, **126**:2 (2001), 283–300.
- [4] H. Grad, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **2**:4 (1949), 331–407.
- [5] О. Г. Фридлендер, *Прикл. матем. и мех.*, **29**:5 (1965), 973.
- [6] М. Н. Коган, *Динамика разреженного газа. Кинетическая теория*, Наука, М., 1967.
- [7] V. D. Gordevsky, *Math. Methods Appl. Sci.*, **27**:2 (2004), 231–247.
- [8] В. Д. Гордецкий, *Матем. физ., анализ, геом.*, **2**:2 (1995), 168–176.
- [9] В. Д. Гордецкий, *Матем. физ., анализ, геом.*, **4**:1–2 (1997), 46–58.
- [10] В. Д. Гордецкий, *ТМФ*, **114**:1 (1998), 126–136.
- [11] V. D. Gordevsky, *Nonlinear Anal.*, **53**:3–4 (2003), 481–494.
- [12] V. D. Gordevsky, *Math. Methods Appl. Sci.*, **21**:16 (1998), 1479–1494.
- [13] В. Д. Гордецкий, *ТМФ*, **135**:2 (2003), 303–314.
- [14] В. Д. Гордецкий, Н. В. Андрияшева, *Матем. физ., анализ, геом.*, **5**:1 (2009), 38–53.

Поступила в редакцию 24.02.2009,
после доработки 10.04.2009