Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Григорьев, А. М. Семихатов, Кэлерова структура триплектической геометрии, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 3, 355–372

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf644>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:17:40

© 2000 г.

М. А. Григорьев*, А. М. Семихатов*

КЭЛЕРОВА СТРУКТУРА ТРИПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Изучается геометрия триплектического квантования калибровочных теорий. Показано, что триплектическая геометрия определяется геометрией кэлерова многообразия $\mathcal{N}$, снабженного парой трансверсальных поляризаций. Антискобки могут быть приведены к каноническому виду тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}$ допускает плоскую симметричную связность, согласованную с комплексной структурой и поляризациями.

1. ВВЕДЕНИЕ

$Sp(2)$ -симметричное лагранжево квантование калибровочных теорий [1, 2] является обобщением формализма Баталина–Вилковыского (БВ) [3], включающим гостовские и антигостовские переменные симметричным образом. Триплектическое квантование [4–6] было сформулировано как соответствующий аналог *ковариантной* (в отношении пространства полей) формулировки схемы БВ [7–11]. Существенным аспектом ковариантной формулировки является возможность (локального) приведения антискобок к каноническому виду, поскольку только для канонических антискобок доказана эквивалентность гамильтонову квантованию.

Вопрос о существовании канонических координат для общих триплектических антискобок был поставлен в [12]. В отличие от стандартного формализма БВ в ковариантной формулировке, где деление на поля и антиполя не является инвариантным, в триплектической схеме антискобки вырождены, что позволяет выделить характеристические функции антискобок. Оказывается, что они и отвечают антиполям, и в этом смысле антиполя исходно выделены в триплектическом квантовании.

В данной работе исследуются геометрические структуры, ответственные за существование канонических координат для определенных в [12] триплектических антискобок. Отличие от стандартного формализма БВ состоит в том, что триплектическая геометрия сконцентрирована на “многообразии антиполей,” которое оказывается *комплексным* многообразием $\mathcal{N}$. Комплексная структура на $\mathcal{N}$ возникает из e -структуры,

*Отделение теоретической физики им. И. Е. Тамма, Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

определяющей слабоканонические антискобки [12], и заодно дает геометрическую интерпретацию этой структуры. Пара антискобок индуцирует на $\mathcal{N}$ пару трансверсальных поляризаций, а симметризованное тождество Якоби приводит к тому, что связанный с поляризациями тензор кручения Нийенхейса обращается в нуль. Условие приведения антискобок к каноническому виду переформулируется как условие существования на $\mathcal{N}$ симметричной связности, согласованной с комплексной структурой и поляризациями. Наконец, 1-форма $\mathcal{F}$, входящая в триплектические данные [6, 12] (“потенциал” для нечетных векторных полей), индуцирует *симплектическую* структуру на $\mathcal{N}$, которая вместе с комплексной структурой определяет кэлерову структуру.

В разделе 2 дается краткое описание триплектического формализма, а в разделе 3 его основные структуры [12] переформулируются на языке кэлеровой геометрии. Как показано в разделе 4, эти геометрические структуры способны различать триплектические структуры с точностью до локальной эквивалентности. Геометрическая формулировка позволяет вывести условия существования канонических координат для антискобок (п. 4.2). В разделе 5 кратко обсуждается действие группы $Sp(2)$, а в разделе 6 описываются геометрические ограничения, возникающие на многообразии *полей* теории.

2. ГЕОМЕТРИЯ ТРИПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

2.1. Основные определения. С геометрической точки зрения в основе триплектического квантования лежит $(2N + 2k | 4N - 2k)$ -мерное супермногообразие $\mathcal{M}$, снабженное парой согласованных антискобок и четной 1-формой $\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$ – алгебра гладких функций на $\mathcal{M}$. Антискобка $(\cdot, \cdot)$ – это билинейное отображение $\mathcal{C}_{\mathcal{M}} \times \mathcal{C}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{M}}$, несущее единичную грассманову четность:

$$\epsilon((F, G)) = \epsilon(F) + \epsilon(G) + 1,$$

и удовлетворяющее свойству симметрии, правилу Лейбница и тождеству Якоби:

$$\begin{aligned} (F, G) &= -(-1)^{(\epsilon(F)+1)(\epsilon(G)+1)}(G, F), \\ (F, GH) &= (F, G)H + (-1)^{(\epsilon(F)+1)\epsilon(G)}G(F, H), \\ (F, (G, H)) &= ((F, G), H) + (-1)^{(\epsilon(F)+1)(\epsilon(G)+1)}(G, (F, H)), \end{aligned}$$

для любых $F, G, H \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}$. Триплектические антискобки $(\cdot, \cdot)^1$ и $(\cdot, \cdot)^2$ согласованы в следующем смысле:

$$(-1)^{(\epsilon(F)+1)(\epsilon(H)+1)}((F, G)^{\{a}, H)^{\{b\}} + \text{cycle}(F, G, H)) = 0, \quad F, G, H \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}, \quad (2.1)$$

где фигурные скобки означают симметризацию индексов. Это условие часто называют симметризованным тождеством Якоби [1]. Антискобки можно задать парой бивекторных полей $\mathcal{E}^a: \Omega_{\mathcal{M}} \times \Omega_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{M}}$ таких, что $\mathcal{E}^a(dF, dG) = (F, G)^a$, где d – дифференциал де Рама на $\mathcal{M}$, а $\Omega_{\mathcal{M}}$ – пространство 1-форм на $\mathcal{M}$. Тогда условие (2.1) переписывается как

$$[[\mathcal{E}^a, \mathcal{E}^b]] = 0, \quad (2.2)$$

где $[[\cdot, \cdot]]$ обозначает суперобобщение скобки Схоутена–Нийенхейса поливекторных полей [13]. Тем самым всякой 1-форме ϕ сопоставляется пара векторных полей $X^a = \mathcal{E}^a \phi$ таких, что $(\mathcal{E}^a \phi)G = \mathcal{E}^a(\phi, dG)$, $G \in \mathcal{C}\mathcal{M}$. В частности, четной 1-форме $\mathcal{F}$ соответствует пара нечетных векторных полей $V^a = \mathcal{E}^a \mathcal{F}$. Они предполагаются согласованными с антискобками посредством соотношений

$$V^{\{a}(F, G)^{b\}} - (V^{\{a}F, G)^{b\}} - (-1)^{\epsilon(F)+1}(F, V^{\{a}G)^{b\}} = 0, \quad F, G \in \mathcal{C}\mathcal{M}, \quad (2.3)$$

или эквивалентным образом

$$\Psi(\mathcal{E}^{\{a}\phi_1, \mathcal{E}^{b\}\phi_2) = 0, \quad \Psi = d\mathcal{F}, \quad (2.4)$$

для всех 1-форм ϕ_1 и ϕ_2 (здесь $\mathcal{E}^a \phi_1$ и $\mathcal{E}^b \phi_2$ – векторные поля, на которых вычислена 2-форма Ψ , по поводу обозначений см. приложение). В локальных координатах z^A , $A = 1, \dots, 6N$ на $\mathcal{M}$, имеем

$$\mathcal{F}_A = \mathcal{F}\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial z^A}\right), \quad \Psi_{AB} = \Psi\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial z^A}, \frac{\vec{\partial}}{\partial z^B}\right). \quad (2.5)$$

Полагая также $\mathcal{E}^{aAB} = \mathcal{E}^a(dz^A, dz^B) = (z^A, z^B)^a$, перепишем уравнение (2.4) в виде [6]

$$\mathcal{E}^{\{aAC}\Psi_{CD}\mathcal{E}^{b\}DB} = 0, \quad \Psi_{AB} = \frac{1}{2}(\partial_A \mathcal{F}_B - (-1)^{\epsilon(A)\epsilon(B)}\partial_B \mathcal{F}_A)(-1)^{\epsilon(B)+1}. \quad (2.6)$$

Дополнительные условия на триплектические объекты [12] формулируются в терминах характеристических функций (функций Казимира) антискобок. Функция $\varphi \in \mathcal{C}\mathcal{M}$ называется характеристической функцией антискобки $(\cdot, \cdot)$, если $(F, \varphi) = 0$ для всякой функции $F \in \mathcal{C}\mathcal{M}$. Две согласованные антискобки $(\cdot, \cdot)^a$, $a = 1, 2$, называются *взаимно коммутативными*¹⁾, если всякие характеристические функции ϕ и ψ первой антискобки $(\cdot, \cdot)^1$ коммутируют относительно второй антискобки, $(\phi, \psi)^2 = 0$, и, наоборот, характеристические функции второй антискобки коммутируют относительно первой. Пара антискобок называется *совместно невырожденной*, если антискобки не имеют общих характеристических функций (т.е. бивекторы $\mathcal{E}^1$ и $\mathcal{E}^2$ не имеют общих нулевых векторов).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. $(2N + 2k|4N - 2k)$ -мерное супермногообразие $\mathcal{M}$, снабженное парой согласованных антискобок и четной 1-формой $\mathcal{F}$, называется триплектическим, если:

- 1) антискобки совместно не вырождены и взаимно коммутативны;
- 2) ранг каждой из антискобок постоянен и равен $4N$;

¹⁾В работе [12] такие антискобки назывались взаимно плоскими, однако мы предпочли изменить название, поскольку в развиваемом в данной работе геометрическом подходе действительно встретится другое условие плоскости. С другой стороны, условие в тексте имеет смысл *коммутативности* некоторых векторных полей.

3) 2-форма $\Psi = d\mathcal{F}$ согласована с антискобками (т.е. удовлетворяет (2.4)) и ее ранг равен $4N$.

Под рангами антискобок и формы Ψ понимаются ранги соответствующих суперматриц $\mathcal{E}^{aAB}$, $a = 1, 2$, и Ψ_{AB} . Таким образом, триплектическое многообразие является нечетным пуассоновым многообразием. Однако на триплектическом многообразии заданы две согласованные пуассоновы структуры. Поскольку ранги бивекторов $\mathcal{E}^a$ постоянны на $\mathcal{M}$, это многообразие является *регулярным* пуассоновым многообразием [14]. В частности, $\mathcal{M}$ допускает пару симплектических слоений, слоями которых являются симплектические листья антискобок.

2.2. Геометрические объекты на триплектическом многообразии. Пусть $\mathcal{M}$ – триплектическое многообразие. В некоторой окрестности U точки $\mathcal{M}$ можно выбрать функции $\xi_{1i}, \xi_{2\alpha}$, $i, \alpha = 1, \dots, 2N$, такие, что ξ_{1i} ($\xi_{2\alpha}$) есть минимальный набор, порождающий алгебру характеристических функций *второй* (соответственно *первой*) антискобки на U . Локально существуют такие функции x^i , что $(\xi_{1i}, \xi_{2\alpha}, x^i)$ задают на U локальные координаты, в которых антискобки принимают вид

$$\begin{aligned}(F, G)^1 &= F \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{1i}} G - (-1)^{(\epsilon(F)+1)(\epsilon(G)+1)} (F \leftrightarrow G), \\ (F, G)^2 &= F \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^i}} e_\alpha^i \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{2i}} G - (-1)^{(\epsilon(F)+1)(\epsilon(G)+1)} (F \leftrightarrow G),\end{aligned}\tag{2.7}$$

где e_α^i зависит только от характеристических функций ξ_{1i} и $\xi_{2\alpha}$ [12]. В работе [12] скобки такого вида были названы слабоканоническими. Симметризованное тождество Якоби (2.1) записывается теперь в виде

$$\begin{aligned}\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{1i}} e_\alpha^j - (-1)^{(\epsilon(i)+1)(\epsilon(j)+1)} \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{1j}} e_\alpha^i &= 0, \\ e_\alpha^i \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{2\alpha}} e_\beta^j - (-1)^{(\epsilon(i)+1)(\epsilon(j)+1)} e_\alpha^j \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{2\alpha}} e_\beta^i &= 0,\end{aligned}\tag{2.8}$$

где грассмановы четности равны $\epsilon(x^i) = \epsilon(i)$, $\epsilon(\xi_{1i}) = \epsilon(i) + 1$ и $\epsilon(\xi_{2\alpha}) = \epsilon(\alpha) + 1$. Из условий на ранги антискобок следует, что матрица e_α^i обратима. Мы будем называть *слабоканоническими* координаты, в которых антискобки принимают слабоканонический вид (2.7).

Поскольку $\mathcal{M}$ – регулярное нечетное пуассоново многообразие, каждая нечетная пуассонова структура (антискобка) определяет слоение i_a многообразия $\mathcal{M}$ на симплектические листья соответствующей антискобки. В данной работе нас в первую очередь интересует локальная структура триплектического многообразия, и мы поэтому или будем предполагать, что слоения i_a тривиальны, т.е. являются расслоениями, или ограничимся достаточно малой окрестностью U в $\mathcal{M}$. В последнем случае симплектические

листы рассматриваются как подмногообразия в U^2).

В слабोकанонических координатах $(\xi_{1i}, \xi_{2\alpha}, x^i)$ в окрестности на U всякий симплектический лист первой (второй) антискобки (рассматриваемый как подмногообразие в U) задается уравнениями $\xi_{2\alpha} = \text{const}_\alpha$ (соответственно $\xi_{1j} = \text{const}_j$). Пусть также i – слоение, слои которого задаются уравнениями $\xi_{1j} = \text{const}_j$, $\xi_{2\alpha} = \text{const}_\alpha$. В дальнейшем слои i_a и i , проходящие через заданную точку $p \in U$, будут обозначаться $U_{\mathcal{M}_a}$ и $U_{\mathcal{L}}$ соответственно.

Слабоканонические координаты позволяют также упростить вид 2-формы $\Psi = d\mathcal{F}$. Условие согласованности (2.4) означает, что Ψ обращается в нуль на паре касательных векторов к листу слоения i_1 или i_2 . Оно также означает, что касательные к i векторы являются нулевыми векторами формы Ψ . Таким образом, единственные ненулевые коэффициенты Ψ – это

$$\Psi^{i\alpha} = (-1)^{\epsilon(i)\epsilon(\alpha)} \Psi^{\alpha i} = \Psi \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{1i}}, \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{2\alpha}} \right),$$

и, следовательно,

$$\Psi = 2d\xi_{1i} \wedge d\xi_{2\alpha} \Psi^{i\alpha}. \quad (2.9)$$

Поскольку 2-форма Ψ точна, коэффициенты $\Psi^{i\alpha}$ не зависят от x^i . Кроме того, условие на ранг означает, что матрица $\Psi^{i\alpha}$ обратима. Наконец, подставляя (2.9) в (2.4), получаем условие

$$e_\alpha^i(\xi_1, \xi_2) \Psi^{\alpha j} + (-1)^{\epsilon(i)\epsilon(j)} e_\alpha^j(\xi_1, \xi_2) \Psi^{\alpha i} = 0. \quad (2.10)$$

Особенностью триплектической геометрии является то, что триплектические объекты определяют скобку Пуассона на всем многообразии $\mathcal{M}$. Она порождается бивекторным полем [6]

$$\omega(\phi_1, \phi_2) = -\frac{1}{2} \epsilon_{ab} \Psi(\mathcal{E}^a \phi_1, \mathcal{E}^b \phi_2), \quad (2.11)$$

которое определяет скобку Пуассона на $\mathcal{M}$ как (подробности приведены в [12])

$$\{F, G\} = \omega(dF, dG) = F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} \omega^{AB} \frac{\vec{\partial}}{\partial z^B} G, \quad (2.12)$$

где $\omega^{AB} = \omega(dz^A, dz^B)$. В слабोकанонических координатах единственные ненулевые коэффициенты ω суть $\omega^{ij} = \omega(dx^i, dx^j)$, и, таким образом, скобка (2.12) записывается как

$$\{F, G\} = F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i} \omega^{ij} \frac{\vec{\partial}}{\partial x^j} G, \quad \omega^{ij} = e_\alpha^i \Psi^{\alpha j}, \quad (2.13)$$

где матрица ω^{ij} обратима и, кроме того, не зависит от координат x^i . Заметим, что слоение многообразия $\mathcal{M}$ на листы скобки Пуассона (2.13), очевидно, совпадает со слоением i . В частности, всякий лист $\mathcal{L}$ слоения i является симплектическим многообразием.

²⁾ Понятие слоения (см., например, [15]) и пуассонова слоения, в частности, непосредственным образом переносится на случай супермногообразий. Отметим только, что в случае, когда, к примеру, $\xi_{2\alpha}$ – нечетная координата, уравнение $\xi_{2\alpha} = \text{const}$ означает, что $\xi_{2\alpha} = 0$ (нечетная константа есть нуль, см. [16]).

2.3. $\mathcal{I}$ -структура. Приведенные выше условия на многообразии $\mathcal{M}$ порождают некоторую структуру на этом многообразии, которую мы опишем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *На триплектическом многообразии $\mathcal{M}$ существует тензорное поле $\mathcal{I}: \text{Vect}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathcal{M}}$ (и соответствующее транспонированное отображение $\mathcal{I}^T: \Omega_{\mathcal{M}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}$) со свойствами*

$$\mathcal{I}^2 = 1, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{E}^1(\mathcal{I}^T \phi_1, \mathcal{I}^T \phi_2) = \mathcal{E}^2(\phi_1, \phi_2) \quad (2.15)$$

для любых 1-форм ϕ_1, ϕ_2 и

$$\mathcal{I}X = X \quad (2.16)$$

для всякого векторного поля $X \in \text{Vect}_{\mathcal{M}}$, касательного к листам слоения i . $\mathcal{I}^T$ действует на $d\xi_{1i}$ и $d\xi_{2\alpha}$ как

$$\mathcal{I}^T d\xi_{2\alpha} = d\xi_{1i} e^i_{\alpha}, \quad \mathcal{I}^T d\xi_{1i} = d\xi_{2\alpha} \tilde{e}^{\alpha}_i, \quad (2.17)$$

где $\tilde{e}^{\alpha}_i$ – обратная матрица к e^i_{α} ($e^i_{\alpha} \tilde{e}^{\alpha}_j = \delta^i_j$).

Для тензорного поля $\mathcal{I}: \text{Vect}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathcal{M}}$ мы определяем транспонированное отображение $\mathcal{I}^T: \Omega_{\mathcal{M}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}$ как

$$\langle X, \mathcal{I}^T \phi \rangle = \langle \mathcal{I}X, \phi \rangle, \quad (2.18)$$

где $\langle X, \phi \rangle = \mathbf{i}_X \phi$ – спаривание векторного поля X и 1-формы ϕ . В локальных координатах z^A имеем

$$\mathcal{I} \frac{\partial}{\partial z^A} = \mathcal{I}^B_A \frac{\partial}{\partial z^B}, \quad \mathcal{I}^T dz^A = dz^B \mathcal{I}^A_B;$$

тогда условия (2.14) и (2.15) записываются в виде

$$\mathcal{I}^C_B \mathcal{I}^A_C = \delta^A_B, \quad (-1)^{\epsilon(A)+\epsilon(C)} \mathcal{I}^A_C \mathcal{E}^{1CD} \mathcal{I}^B_D = \mathcal{E}^{2AB}. \quad (2.19)$$

С помощью явного вида (2.7) антискобок в слабोकанонических координатах легко установить существование линейного отображения, удовлетворяющего условиям (2.14) и (2.15). Такое отображение не единственно, однако *всякое $\mathcal{I}$, удовлетворяющее условиям (2.14) и (2.15), однозначно определяет отображение касательных к листам слоения i векторных полей.* Действительно, всякое касательное к i векторное поле $X \in \text{Vect}_{\mathcal{M}}$, очевидно, касательно как к i_1 , так и к i_2 , а значит, допускает представление

$$X = \mathcal{E}^1 \phi = \mathcal{E}^2 \psi \quad (2.20)$$

для некоторых $\phi, \psi \in \Omega_{\mathcal{M}}$. С одной стороны, $\mathcal{I}X = \mathcal{I}(\mathcal{E}^1 \phi) = \mathcal{E}^2(\mathcal{I}^T \phi)$ и, следовательно, касательно к i_1 ; с другой стороны, $\mathcal{I}X = \mathcal{I}(\mathcal{E}^2 \psi) = \mathcal{E}^1(\mathcal{I}^T \psi)$ и, следовательно, касательно к i_2 , откуда следует, что $\mathcal{I}X$ касательно к i .

Последнее обстоятельство позволяет наложить условие (2.16). Даже это ограничение не фиксирует полностью произвол в $\mathcal{I}$. Тем не менее однозначно определено действие $\mathcal{I}$ (точнее, $\mathcal{I}^T$) на 1-формы с нулевым ограничением на листы слоения i . Действительно, действие $\mathcal{I}^T$ на дифференциалы $d\xi_{1i}$ и $d\xi_{2\alpha}$ определено корректно. Для определения его явного вида рассмотрим векторные поля

$$X_i^1 = (\xi_{1i}, \cdot)^1 = \mathcal{E}^1 d\xi_{1i}, \quad X_\alpha^2 = (\xi_{2\alpha}, \cdot)^2 = \mathcal{E}^2 d\xi_{2\alpha}. \quad (2.21)$$

По построению X_i^1 и X_α^2 касательны к i , и, кроме того, [12] имеем

$$X_\alpha^2 = (-1)^{(\epsilon(i)+1)\epsilon(\alpha)} e_\alpha^i X_i^1, \quad (2.22)$$

что можно переписать в виде

$$\mathcal{I}\mathcal{E}^1(\mathcal{I}^T d\xi_{2\alpha}) = (-1)^{(\epsilon(i)+1)\epsilon(\alpha)} e_\alpha^i \mathcal{E}^1 d\xi_{1i}. \quad (2.23)$$

Заметим, что $\mathcal{I}\mathcal{E}^2\mathcal{I}^T d\xi_{2\alpha} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}^2\mathcal{I}^T d\xi_{2\alpha} = 0 \Rightarrow \mathcal{I}^T d\xi_{2\alpha} = d\xi_{1i} A_\alpha^i$ для некоторых A_α^i , а следовательно, $\mathcal{E}^1(\mathcal{I}^T d\xi_{2\alpha})$ касательно к i , это, в свою очередь, означает, что

$$\mathcal{E}^1(\mathcal{I}^T d\xi_{2\alpha}) = \mathcal{E}^1(d\xi_{1i} e_\alpha^i).$$

Таким образом, $x \equiv \mathcal{I}^T d\xi_{2\alpha} - d\xi_{1i} e_\alpha^i$ является нулевым вектором для $\mathcal{E}^1$. Аналогично $\mathcal{E}^2 x = 0$, откуда $x = 0$ вследствие наложенного на антискобки условия совместной невырожденности.

3. ОТ ТРИПЛЕКТИЧЕСКОЙ К КЭЛЕРОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Как было показано выше, триплектическая структура определяет слоение i триплектического многообразия $\mathcal{M}$ (со слоями, одновременно являющимися симплектическими листами скобки Пуассона (2.13)).

В соответствующем образе выбранной окрестности U слоение i является расслоением с базой $U_{\mathcal{N}}$ и проекцией $\pi: U \rightarrow U_{\mathcal{N}}$. Отождествим алгебру гладких функций $\mathcal{C}_{U_{\mathcal{N}}}$ на $U_{\mathcal{N}}$ с функциями на U , постоянными вдоль слоев π , которые, в свою очередь, отождествляются с функциями, порожденными характеристическими функциями антискобок. Слабоканонические координаты определяют диффеоморфизм $\psi: U \rightarrow U_{\mathcal{N}} \times U_{\mathcal{L}}$, отождествляющий U с окрестностью в произведении линейных (супер)пространств $U_{\mathcal{N}} \times U_{\mathcal{L}}$ (таким образом, что первая компонента ψ есть π , т.е. $\psi = (\pi, \rho): U \rightarrow U_{\mathcal{N}} \times U_{\mathcal{L}}$).

В случае, если $\mathcal{M}$ есть расслоение $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ с некоторой базой $\mathcal{N}$, $U_{\mathcal{N}}$ отождествляется с некоторой окрестностью в $\mathcal{N}$.

В этом разделе для упрощения обозначений будем считать, что $\mathcal{N}$ и проекция $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ определены глобально. Таким образом, гладкие функции на $\mathcal{N}$ отождествляются с постоянными вдоль слоев функциями на $\mathcal{M}$, т.е. с функциями, порожденными характеристическими функциями антискобок на $\mathcal{M}$. В частности, на $\mathcal{N}$ можно выбрать такую координатную систему $\hat{\xi}_{1i}, \hat{\xi}_{2\alpha}$, что координаты $\xi_{1i} = \pi^* \hat{\xi}_{1i}$ (соответственно

$\xi_{2\alpha} = \pi^* \hat{\xi}_{2\alpha}$) порождают алгебру характеристических функций второй (соответственно первой) антискобки. В дальнейшем мы будем ставить крышку над координатами на $\mathcal{N}$, пользуясь взаимно однозначным соответствием между $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ и постоянными вдоль слоев i функциями на $\mathcal{M}$.

Поскольку функции e_{α}^i постоянны вдоль i , 1-формы $d\xi_{1i} e_{\alpha}^i$ и $d\xi_{2\alpha} \tilde{e}_j^{\alpha}$ являются подъемом некоторых 1-форм на $\mathcal{N}$ (то же, очевидно, справедливо и для 1-форм $d\xi_{1i}$ и $d\xi_{2\alpha}$). Таким образом, в соответствии с предложением 2.2 отображение $\mathcal{I}^T: \Omega_{\mathcal{M}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}$ определяет отображение $\hat{\mathcal{I}}^T: \Omega_{\mathcal{N}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{N}}$. В локальных координатах $\xi_{1i}, \xi_{2\alpha}$ на $\mathcal{N}$ имеем

$$\hat{\mathcal{I}} \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{1i}} = e_{\alpha}^i \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{2\alpha}}, \quad \hat{\mathcal{I}} \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{2\alpha}} = \tilde{e}_i^{\alpha} \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{1i}}. \quad (3.1)$$

Далее, из (2.9) следует, что существует 2-форма $\hat{\Psi}$ на $\mathcal{N}$, подъем которой совпадает с $\Psi = d\mathcal{F}$ из (2.4). Предположения о рангах означают, что $\hat{\Psi}$ не вырождена, и, таким образом, $\mathcal{N}$ является симплектическим многообразием³⁾. Как можно заметить, в силу уравнений (2.9) и (2.10) введенные на $\mathcal{N}$ структуры согласованы в том смысле, что

$$\hat{\Psi}(\hat{\mathcal{I}}Y_1, \hat{\mathcal{I}}Y_2) = -\hat{\Psi}(Y_1, Y_2) \quad (3.2)$$

для произвольных векторных полей Y_1, Y_2 на $\mathcal{N}$. Для векторных полей при этом справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Всякое векторное поле $X: \mathcal{C}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{M}}$, сохраняющее пространство функций, постоянных вдоль слоев i , однозначно определяет векторное поле $\hat{X}$ на $\mathcal{N}$.*

Покажем, что симплектическое многообразие $\mathcal{N}$ снабжено парой трансверсальных вещественных поляризаций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{N}$ – симплектическое многообразие.

1. Интегрируемое распределение $P: \mathcal{N} \rightarrow T\mathcal{N}$ называется *вещественной поляризацией* на $\mathcal{N}$, если образ $P_x \subset T_x\mathcal{N}$ является лагранжевым подпространством в $T_x\mathcal{N}$ в любой точке $x \in \mathcal{N}$.

2. Две поляризации P^1 и P^2 называются трансверсальными, если $T_x\mathcal{N} = P_x^1 \oplus P_x^2$.

Заметим, что векторные поля, аннулирующие характеристические функции первой (второй) антискобки, рассматриваемые как функции на $\mathcal{N}$, определяют слоение $\mathcal{N}$ и, таким образом, интегрируемое распределение $P^1: \mathcal{N} \rightarrow T\mathcal{N}$ (соответственно $P^2: \mathcal{N} \rightarrow T\mathcal{N}$). В координатной системе $\xi_{1i}, \xi_{2\alpha}$ на $\mathcal{N}$ распределение P^1 (соответственно P^2) порождается векторными полями $\vec{\partial}/\partial \xi_{1i}$ (соответственно $\vec{\partial}/\partial \xi_{2\alpha}$). Из явного вида P^1 и P^2 следует, что $T_x\mathcal{N} = P_x^1 \oplus P_x^2$ в любой точке $x \in \mathcal{N}$. Легко также видеть, что симплектическая форма $\hat{\Psi}$ обращается в нуль как на P_x^1 , так и на P_x^2 . Таким образом, P^1 и P^2 являются парой трансверсальных поляризаций.

³⁾Заметим, что, в отличие от $\Psi = d\mathcal{F}$, 2-форма $\hat{\Psi}$ в общем случае замкнута, но не точна.

Очевидно, что всякое векторное поле X на $\mathcal{N}$ можно представить в виде суммы $X = X^1 + X^2$, где $X^1 \in P^1$ и $X^2 \in P^2$. Такое представление позволяет определить отображение $\mathcal{K}: \text{Vect}_{\mathcal{N}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathcal{N}}$ как

$$\mathcal{K}X = X_1 - X_2. \quad (3.3)$$

При этом выполнено

$$\mathcal{K}^2 = \mathcal{K}\mathcal{K} = \mathbb{1}, \quad \mathcal{K}\widehat{\mathcal{I}} + \widehat{\mathcal{I}}\mathcal{K} = 0, \quad \widehat{\Psi}(\mathcal{K}Y_1, \mathcal{K}Y_2) = -\widehat{\Psi}(Y_1, Y_2), \quad Y_1, Y_2 \in \text{Vect}_{\mathcal{N}}. \quad (3.4)$$

Если заданы отображения $\widehat{\mathcal{I}}$ и $\mathcal{K}$ на $\mathcal{N}$, то можно рассмотреть произведение $\mathcal{J} = \widehat{\mathcal{I}}\mathcal{K}$. Из (3.2) и (3.4) следует, что $\mathcal{J}$ удовлетворяет равенствам

$$\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}\mathcal{J} = -\mathbb{1}, \quad \widehat{\Psi}(\mathcal{J}Y_1, \mathcal{J}Y_2) = \widehat{\Psi}(Y_1, Y_2) \quad (3.5)$$

и, таким образом, является согласованной с симплектической формой почти комплексной структурой. В локальных координатах ξ_{1i} , $\xi_{2\alpha}$ имеем

$$\mathcal{J} \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{1i}} = e^i_{\alpha} \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{2\alpha}}, \quad \mathcal{J} \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{2\alpha}} = -\tilde{e}^{\alpha}_i \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{1i}}. \quad (3.6)$$

Покажем, что эта почти комплексная структура интегрируема. Для интегрируемости $\mathcal{J}$ достаточно, чтобы тензор Нийенхейса $N_{\mathcal{J}, \mathcal{J}}$ обращался в нуль. Этот тензор является отображением $N_{\mathcal{J}, \mathcal{J}}: \text{Vect}_{\mathcal{N}} \times \text{Vect}_{\mathcal{N}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathcal{N}}$, определяемым как

$$N_{\mathcal{J}, \mathcal{J}}(X, Y) = [\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y] + \mathcal{J}\mathcal{J}[X, Y] - \mathcal{J}[X, \mathcal{J}Y] - \mathcal{J}[\mathcal{J}X, Y], \quad X, Y \in \text{Vect}_{\mathcal{N}}. \quad (3.7)$$

С помощью явного вида $\mathcal{J}$ из (3.6) легко видеть, что $N_{\mathcal{J}, \mathcal{J}} = 0$ вследствие уравнения (2.8). Таким образом, $\mathcal{N}$ — комплексное многообразие.

В итоге получаем теорему.

ТЕОРЕМА 3.3. *Многообразие $\mathcal{N}$ кэлерово, а соответствующая фундаментальная 2-форма есть $\widehat{\Psi}$.*

Явным образом кэлерова метрика определяется как

$$h(X, Y) = \widehat{\Psi}(\mathcal{J}X, Y)(-1)^{\epsilon(X)\epsilon(Y)}, \quad X, Y \in \text{Vect}_{\mathcal{N}}.$$

Из сказанного выше следует, что h не вырождена и удовлетворяет условиям

$$h(X, Y) = (-1)^{\epsilon(X)\epsilon(Y)} h(Y, X), \quad h(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) = h(X, Y), \quad X, Y \in \text{Vect}_{\mathcal{N}}. \quad (3.8)$$

Заметим, однако, что в общем случае $\mathcal{N}$ является супермногообразием, т.е. супераналогом кэлерова многообразия.

4. ЛОКАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ТРИПЛЕКТИЧЕСКИХ СТРУКТУР

В п. 4.1 мы покажем, что индуцируемые на $U_{\mathcal{N}}$ геометрические структуры (см. начало раздела 3) различают триплектические структуры с точностью до локальной эквивалентности. В частности, условие существования канонических координат для антискобок также переформулируется в терминах некоторых объектов на $U_{\mathcal{N}}$, как это устанавливается в п. 4.2.

4.1. Теорема эквивалентности. В достаточно малой окрестности $U \subset \mathcal{M}$ триплектические данные задают проекцию $\pi: U \rightarrow U_{\mathcal{N}}$ вдоль слоев слоения i . Триплектические антискобки индуцируют комплексную структуру и пару трансверсальных поляризаций на $U_{\mathcal{N}}$, а 2-форма $\Psi = d\mathcal{F}$ определяет фундаментальную форму на $U_{\mathcal{N}}$.

Будем говорить, что две пары триплектических антискобок⁴⁾ $(\cdot, \cdot)^a$ и $\overline{(\cdot, \cdot)}^a$ локально-эквивалентны, если для всякой достаточно малой окрестности $U \subset \mathcal{M}$ существует диффеоморфизм $\phi: U \rightarrow U$ такой, что

$$\overline{(F, G)}^a = (\phi^{-1})^*(\phi^*F, \phi^*G)^a. \quad (4.1)$$

Пусть $(\cdot, \cdot)^a$ и $\overline{(\cdot, \cdot)}^a$ – две триплектические структуры на $\mathcal{M}$. Покажем, что неэквивалентные триплектические структуры различаются в терминах геометрии на $U_{\mathcal{N}}$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Следующие условия эквивалентны:*

1. Триплектические структуры $(\cdot, \cdot)^a$ и $\overline{(\cdot, \cdot)}^a$ локально-эквивалентны.
2. Для всякой достаточно малой окрестности $U \subset \mathcal{M}$ существует такой диффеоморфизм $\phi_0: U_{\mathcal{N}} \rightarrow \overline{U}_{\mathcal{N}}$, что

$$\phi_0^*(\overline{\mathcal{K}}\psi) = \mathcal{K}(\phi_0^*\psi), \quad \phi_0^*(\overline{\mathcal{J}}\psi) = \mathcal{J}(\phi_0^*\psi) \quad (4.2)$$

для произвольной 1-формы ψ на $\overline{U}_{\mathcal{N}}$, где $\pi: U \rightarrow U_{\mathcal{N}}$ и $\bar{\pi}: U \rightarrow \overline{U}_{\mathcal{N}}$ – проекции, задаваемые соответствующими триплектическими структурами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\phi: U \rightarrow U$ – диффеоморфизм, удовлетворяющий (4.1). Пусть также $\xi_{1i}(\theta_{1i})$ – характеристические функции скобки $(\cdot, \cdot)^2$ (соответственно $\overline{(\cdot, \cdot)}^2$) и $\xi_{2\alpha}(\theta_{2\alpha})$ – характеристические функции скобки $(\cdot, \cdot)^1$ (соответственно $\overline{(\cdot, \cdot)}^1$). Из (4.1) следует, что $\phi^*\theta_{1i}$ и $\phi^*\theta_{2\alpha}$ – характеристические функции скобки $(\cdot, \cdot)^2$ и соответственно $(\cdot, \cdot)^1$. Следовательно, $\phi^*\theta_{1i}$ являются функциями от ξ_{1i} , т.е. $\phi^*\theta_{1i} = \bar{\xi}_{1i}(\xi_1)$ и аналогично $\phi^*\theta_{2\alpha} = \bar{\xi}_{2\alpha}(\xi_2)$. Таким образом, диффеоморфизм ϕ индуцирует отображение

⁴⁾ Для краткости мы рассматриваем только антискобки, оставляя без внимания нечетные нильпотентные векторные поля (т.е. 1-форму $\mathcal{F}$). Однако доказанное ниже утверждение, очевидно, распространяется на форму $\mathcal{F}$. Точнее, утверждение об эквивалентности относится к 2-форме $\Psi = d\mathcal{F}$, которая (локально) определяет $\mathcal{F}$ с точностью до прибавления d -точного члена; такое переопределение отвечает как раз естественному произволу в выборе $\mathcal{F}$ [6, 12]. Таким образом, локальная эквивалентность полных триплектических структур понимается по модулю указанного произвола в выборе $\mathcal{F}$.

характеристических функций антискобки $\overline{(\cdot, \cdot)}^a$ в характеристические функции антискобки $(\cdot, \cdot)^a$. Рассмотрим генерируемые характеристическими функциями векторные поля

$$\begin{aligned} (\xi_{2\alpha}, \cdot)^2 &= -(-1)^{(\epsilon(i)+1)\epsilon(\alpha)} e_\alpha^i (\xi_{1i}, \cdot)^1, \\ \overline{(\theta_{2\alpha}, \cdot)}^2 &= -(-1)^{(\epsilon(i)+1)\epsilon(\alpha)} \bar{e}_\alpha^i \overline{(\theta_{1i}, \cdot)}^1, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где e и $\bar{e}$ обозначают соответствующие e -структуры. Согласно (4.1) имеем

$$(\phi^* \theta_{2\alpha}, \cdot)^2 = -(-1)^{(\epsilon(i)+1)\epsilon(\alpha)} (\phi^* \bar{e}_\alpha^i) (\phi^* \theta_{1i}, \cdot)^1. \quad (4.4)$$

Как мы уже видели, $\phi^* \theta_{1i} = \bar{\xi}_{1i}(\xi_1)$ и $\phi^* \theta_{2\alpha} = \bar{\xi}_{2\alpha}(\xi_2)$, следовательно,

$$e_\alpha^i = \frac{\vec{\partial} \bar{\xi}_{1j}}{\partial \xi_{1i}} (\phi^* \bar{e}_\beta^j) \frac{\vec{\partial} \xi_{2\alpha}}{\partial \xi_{2\beta}}. \quad (4.5)$$

Выбирая характеристические функции ξ_1, ξ_2 в качестве координат на $U_{\mathcal{N}}$ и аналогично θ_1, θ_2 в качестве координат на $\overline{U}_{\mathcal{N}}$, видим, что ϕ ограничивается до диффеоморфизма $\phi_0: U_{\mathcal{N}} \rightarrow \overline{U}_{\mathcal{N}}$. Вспоминая, что ϕ^* отображает характеристические функции в характеристические функции, и используя (4.5), получаем, что ϕ_0 удовлетворяет условиям теоремы.

Обратно, пусть $U_{\mathcal{N}}$ и $\overline{U}_{\mathcal{N}}$ связаны диффеоморфизмом ϕ_0 , который удовлетворяет (4.2). Выберем координатную систему $\xi_{1i}, \xi_{2\alpha}$ ($\theta_{1i}, \theta_{2\alpha}$) на $U_{\mathcal{N}}$ (соответственно на $\overline{U}_{\mathcal{N}}$) так, что $\mathcal{K}$ и $\mathcal{J}$ (соответственно $\bar{\mathcal{K}}$ и $\bar{\mathcal{J}}$) действуют на базисные 1-формы как $\mathcal{K}^T d\xi_{1i} = d\xi_{1i}$, $\mathcal{K}^T d\xi_{2\alpha} = -d\xi_{2\alpha}$ и $\mathcal{J}^T d\xi_{1i} = -\bar{e}_i^\alpha d\xi_{2\alpha}$, $\mathcal{J}^T d\xi_{2\alpha} = e_\alpha^i d\xi_{1i}$ (соответственно $\bar{\mathcal{K}}^T d\theta_{1i} = d\theta_{1i}$, $\bar{\mathcal{K}}^T d\theta_{2\alpha} = -d\theta_{2\alpha}$ и $\bar{\mathcal{J}}^T d\theta_{1i} = -\bar{e}_i^\alpha d\theta_{2\alpha}$, $\bar{\mathcal{J}}^T d\theta_{2\alpha} = \bar{e}_\alpha^i d\theta_{1i}$). Тогда уравнение (4.2) означает, что $\phi_0^* d\theta_{1i} = A_i^j d\xi_{1j}$. Таким образом, функции $\phi_0^* \theta_{1i}$ зависят только от ξ_1 . Аналогично $\phi_0^* \theta_{2\alpha}$ зависят только от ξ_2 . Это позволяет выбрать такие координаты $\bar{\theta}_{1i}, \bar{\theta}_{2\alpha}$ на $\overline{U}_{\mathcal{N}}$, что $\phi_0^* \bar{\theta}_{1i} = \xi_{1i}$ и $\phi_0^* \bar{\theta}_{2\alpha} = \xi_{2\alpha}$. Тогда второе уравнение в (4.2) приводит к равенству

$$e_\alpha^i = \phi_0^*(\bar{e}_\alpha^i), \quad (4.6)$$

где для каждого i и α мы рассматриваем $\bar{e}_\alpha^i$ как функции на $\overline{U}_{\mathcal{N}}$. Далее, рассмотрим $\xi_{1i}, \xi_{2\alpha}$ и $\bar{\theta}_{1i}, \bar{\theta}_{2\alpha}$ как функции на $U \subset \mathcal{M}$, где они являются характеристическими функциями соответствующих антискобок. Выбирая функции x^i и y^i на $U \subset \mathcal{M}$ такими, что $x^i, \xi_{1i}, \xi_{2\alpha}$ (соответственно $y^i, \bar{\theta}_{1i}, \bar{\theta}_{2\alpha}$) – слабоканонические координаты для антискобок $(\cdot, \cdot)^a$ (соответственно $\overline{(\cdot, \cdot)}^a$), рассмотрим диффеоморфизм $\phi: U \rightarrow U$, для которого

$$\phi^* y^i = x^i, \quad \phi^* \bar{\theta}_{1i} = \xi_{1i}, \quad \phi^* \bar{\theta}_{2\alpha} = \xi_{2\alpha}. \quad (4.7)$$

Легко проверить, что ϕ удовлетворяет (4.1) и, таким образом, две триплектические структуры локально-эквивалентны, что завершает доказательство.

4.2. Нахождение канонических координат. Вопрос о локальном приведении антискобок к каноническому виду может быть решен в терминах геометрических структур на $U_{\mathcal{N}}$. Напомним, что выбрав базисные наборы характеристических функций антискобок, можно определить структуру $e_{\alpha}^i(\xi_1, \xi_2)$, которая в общем случае является препятствием к существованию канонических координат для триплектических антискобок. Из уравнения (2.22) следует, что при переходе к новому базису характеристических функций $\xi'_{1i} = \xi'_{1i}(\xi_1)$ и $\xi'_{2\alpha} = \xi'_{2\alpha}(\xi_2)$ матрица e преобразуется как

$$e'^i_{\alpha} = \frac{\vec{\partial}\xi_{1j}}{\partial\xi'_{1i}} e^j_{\beta} \frac{\vec{\partial}\xi'_{2\alpha}}{\partial\xi_{2\beta}}, \quad (\xi'_{2\alpha}, \cdot)^2 = (-1)^{(\epsilon(i)+1)\epsilon(\alpha)} e'^i_{\alpha} (\xi'_{1i}, \cdot)^1. \quad (4.8)$$

Структура e называется *приводимой*, если существует такой базис характеристических функций $\xi'_{1i} = \xi'_{1i}(\xi_1)$ и $\xi'_{2\alpha} = \xi'_{2\alpha}(\xi_2)$, что $e'^i_{\alpha} = \delta^i_{\alpha}$. Если e приводима, то существует координатная система, в которой антискобки принимают канонический вид (вид “Дарбу”).

Переформулируем вопрос о приводимости в терминах развитой в предыдущем разделе дифференциальной геометрии $U_{\mathcal{N}}$. Доказательство следующего утверждения немедленно следует из явного вида $\mathcal{I}$, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{J}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть U – (достаточно малая) окрестность в $\mathcal{M}$, а $\pi: U \rightarrow U_{\mathcal{N}}$ – ассоциированная с триплектической структурой проекция. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Ассоциированная с антискобками e -структура приводима.
2. Существует координатная система на $U_{\mathcal{N}}$, в которой компоненты тензорных полей $\mathcal{I}$, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{J} = \mathcal{IK}$ постоянны.
3. Существует плоская симметричная связность ∇ на $U_{\mathcal{N}}$ такая, что тензорные поля $\mathcal{I}$, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{J}$ ковариантно постоянны:

$$\nabla\mathcal{K} = 0, \quad \nabla\mathcal{I} = 0, \quad \nabla\mathcal{J} = 0. \quad (4.9)$$

В п. 2 и 3 достаточно, чтобы условия выполнялись для любых двух тензорных полей из $\mathcal{I}$, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{J}$. Здесь ∇ рассматривается как отображение $\nabla: \text{Vect}_{U_{\mathcal{N}}} \times \text{Vect}_{U_{\mathcal{N}}} \rightarrow \text{Vect}_{U_{\mathcal{N}}}$ со свойствами

$$\begin{aligned} \nabla_{FX}Y &= F\nabla_XY, \quad \nabla_X(FY) = (XF)\nabla_X(Y) + (-1)^{\epsilon(X)\epsilon(F)}F\nabla_XY, \\ F &\in \mathcal{C}_{U_{\mathcal{N}}}, \quad X, Y \in \text{Vect}_{U_{\mathcal{N}}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Действие ∇ на тензорном поле $I: \text{Vect}_{U_{\mathcal{N}}} \rightarrow \text{Vect}_{U_{\mathcal{N}}}$ определяется как

$$(\nabla_X I)Y = \nabla_X(IY) - I(\nabla_X Y), \quad X, Y \in \text{Vect}_{U_{\mathcal{N}}}. \quad (4.11)$$

Симметричность ∇ означает обращение в нуль кручения

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - (-1)^{\epsilon(X)\epsilon(Y)}\nabla_Y X - [X, Y].$$

Определяя символы Кристоффеля в локальных координатах z^A на $U_{\mathcal{N}}$ как

$$\Gamma_{AB}^C = \left(\nabla_A \frac{\vec{\partial}}{\partial z^B} \right) z^C,$$

имеем

$$(\nabla_A I)_B^C = \partial_A I_B^C - \Gamma_{AB}^D I_D^C + (-1)^{(\epsilon(D)+\epsilon(B))\epsilon(A)} I_B^D \Gamma_{AD}^C, \quad (4.12)$$

где коэффициенты I определены как

$$I \frac{\vec{\partial}}{\partial z^A} = I_A^B \frac{\vec{\partial}}{\partial z^B}.$$

Заметим, что определенная в п. 3 предложения 4.2 связность *единственна*. Действительно, из первого уравнения в (4.9) и определения (3.3) структуры $\mathcal{K}$ следует, что в координатах ξ_{1i} , $\xi_{2\alpha}$ единственные ненулевые коэффициенты связности суть Γ_k^{ij} и $\Gamma_\gamma^{\alpha\beta}$. Используя уравнение $\nabla \mathcal{I} = 0$ (и явный вид (3.1) коэффициентов $\mathcal{I}$), получаем

$$\Gamma_k^{ij} = \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{1i}} e_\alpha^j \right) \tilde{e}_k^\alpha, \quad \Gamma_\gamma^{\alpha\beta} = \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{2\alpha}} \tilde{e}_j^\beta \right) e_\gamma^j. \quad (4.13)$$

Таким образом, симметричная связность ∇ , удовлетворяющая условиям $\nabla \mathcal{I} = \nabla \mathcal{J} = \nabla \mathcal{K} = 0$, существует и единственна.

Поскольку единственными ненулевыми компонентами кривизны являются $[\nabla^{1i}, \nabla^{2\alpha}]$, условие нулевой кривизны переписывается как

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{1i}} \left(\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{2\alpha}} \tilde{e}_j^\beta \right) e_\gamma^j \right) = 0, \quad \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{2\alpha}} \left(\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{1i}} e_\beta^j \right) \tilde{e}_k^\beta \right) = 0. \quad (4.14)$$

Вспоминая еще, что обращение в нуль кривизны на $U_{\mathcal{N}}$ означает приводимость e_α^i на $\mathcal{M}$, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.3. *Соответствующая триплектическим антискобкам структура e_α^i приводима тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям (4.14). Таким образом, пара триплектических антискобок (т.е. пара согласованных, совместно невырожденных и взаимно коммутативных антискобок ранга $4N$) допускает канонические координаты, если и только если соответствующая e -структура удовлетворяет равенствам (4.14).*

5. ДЕЙСТВИЕ $Sp(2)$ НА $\mathcal{N}$

Чтобы упростить изложение, мы предполагаем в данном разделе, что база $\mathcal{N}$ существует глобально, т.е. мы возвращаемся к предположениям раздела 3.

Важной чертой квантования, включающего гостовские и антигостовские переменные симметричным образом, является $Sp(2)$ -симметрия [1]. В ковариантной формулировке это условие означает, что на $\mathcal{M}$ определено действие группы $Sp(2)$ [12], т.е. для всякого $G \in Sp(2)$ существует отображение $\phi_G: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ такое, что $\phi_{G_1} \phi_{G_2} = \phi_{G_1 G_2}$.

Пара антискобок и 1-форма $\mathcal{F}$ называются $Sp(2)$ -ковариантными, если существует такое действие ϕ группы $Sp(2)$ на $\mathcal{M}$, что

$$\phi_G^*((f, g)^a) = G_b^a (\phi_G^*(f), \phi_G^*(g))^b, \quad \phi_G^* \mathcal{F} = \mathcal{F}, \quad G \in Sp(2), \quad f, g \in C_{\mathcal{M}}, \quad (5.1)$$

где $G_b^a - (2 \times 2)$ -матрица, представляющая элемент $G \in Sp(2)$. Инфинитезимально условие переформулируется как гомоморфизм алгебры Ли $sp(2)$ в $\text{Vect}_{\mathcal{M}}$ такой, что

$$L_Y \mathcal{E}^a = g_b^a \mathcal{E}^b, \quad (5.2)$$

$$L_Y \mathcal{F} = 0, \quad (5.3)$$

где Y обозначает векторное поле, соответствующее элементу $g \in sp(2)$ (а L обозначает производную Ли). Важным следствием условия $Sp(2)$ -ковариантности является $sp(2)$ -инвариантность пуассоновой структуры (2.11)

$$L_Y \omega = 0. \quad (5.4)$$

Заметим теперь, что $Sp(2)$ -действие сохраняет пространство функций, порожденных характеристическими функциями $(\xi_{1i}, \xi_{2\alpha})$ триплектических антискобок. В этом легко убедиться, приняв во внимание, что набор характеристических функций $(\xi_a) = (\xi_{1i}, \xi_{2\alpha})$ является полным набором характеристических функций скобки Пуассона (т.е. $\{F, \xi_a\} = 0$ для всякой функции F). Применяя $Sp(2)$ -преобразование, получаем

$$0 = \phi_G^*(\{F, \xi\}) = \{\phi_G^*(F), \phi_G^*(\xi)\}, \quad (5.5)$$

т.е. $\phi_G^*(\xi)$ — снова характеристическая функция скобки Пуассона, а это означает, что представляющие $sp(2)$ -действие на $\mathcal{M}$ векторные поля проецируются на $\mathcal{N}$. Мы сохраним обозначение Y для проекции Y на $\mathcal{N}$ (напомним, что мы предположили глобальное существование $\mathcal{N}$). Поскольку $L_Y \mathcal{F} = 0$ и, следовательно, $L_Y \Psi = 0$, имеем⁵⁾

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *На многообразии $\mathcal{N}$ задано действие группы $Sp(2)$, сохраняющее симплектическую структуру на $\mathcal{N}$.*

Таким образом, векторное поле Y локально гамильтоново на $\mathcal{N}$.

Пусть $Y^\pm$ и Y^0 соответствуют стандартному базису в $sp(2)$:

$$[J^+, J^-] = -2J^0, \quad [J^+, J^0] = -J^+, \quad [J^-, J^0] = J^-. \quad (5.6)$$

Тогда легко видеть, что структуры $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$ образуют трехмерное представление $sp(2)$:

$$\begin{aligned} L_{Y^+} \mathcal{I} &= \mathcal{K}, & L_{Y^-} \mathcal{I} &= -\mathcal{K}, & L_{Y^0} \mathcal{I} &= \mathcal{J}, \\ L_{Y^+} \mathcal{J} &= -\mathcal{K}, & L_{Y^-} \mathcal{J} &= -\mathcal{K}, & L_{Y^0} \mathcal{J} &= \mathcal{I}, \\ L_{Y^+} \mathcal{K} &= -\mathcal{I} - \mathcal{J}, & L_{Y^-} \mathcal{K} &= \mathcal{I} - \mathcal{J}, & L_{Y^0} \mathcal{K} &= 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

В отличие от *глобальных* свойств действия группы на многообразии, локально вопрос о $Sp(2)$ -ковариантности триплектических антискобок для всего класса эквивалентных антискобок сводится к вопросу существования на $\mathcal{N}$ действия $Sp(2)$, удовлетворяющего (5.7).

⁵⁾ Хотя кратчайший путь показать справедливость этого утверждения основывается на использовании скобки Пуассона, легко представить и прямое доказательство.

6. ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЯ ПОЛЕЙ $\mathcal{L}$

В данном разделе мы покажем, что согласованные антискобки индуцируют некоторую дополнительную структуру на каждом листе слоения i (пересечении соответствующих симплектических листов антискобок). Условия, налагаемые на триплектические объекты (см. определение 2.1), влекут за собой существование плоской связности на каждом листе $\mathcal{L}$ слоения i .

ТЕОРЕМА 6.1. *Пара триплектических антискобок индуцирует плоскую симметричную связность на каждом листе слоения i .*

Для фиксированного листа $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ пусть $\{U_n\}$ – такой атлас на $\mathcal{M}$, что в каждой окрестности U_n существуют слабоканонические координаты $x^i, \xi_{1i}, \xi_{2\alpha}$. Пусть U_1 и U_2 – окрестности на $\mathcal{M}$, для которых $\bar{U}_1 = U_1 \cap \mathcal{L}$ и $\bar{U}_2 = U_2 \cap \mathcal{L}$, а $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$ непусто; пусть также $x^i, \xi_{1i}, \xi_{2\alpha}$ и $y^i, \theta_{1i}, \theta_{2\alpha}$ – слабоканонические координаты соответственно на U_1 и U_2 . Тогда функции $\bar{x}^i = x^i|_{\mathcal{L}}$ (соответственно $\bar{y}^j = y^j|_{\mathcal{L}}$) являются локальными координатами на $\bar{U}_1$ (соответственно на $\bar{U}_2$). Как мы видели, для векторных полей

$$X_i = (\xi_{1i}, \cdot)^1 = \frac{\vec{\partial}}{\partial x^i}, \quad Y_j = (\theta_{1j}, \cdot)^1 = \frac{\vec{\partial}}{\partial y^j} \quad (6.1)$$

выполнено $[X_i, X_j] = 0$ в U_1 , $[Y_i, Y_j] = 0$ в U_2 и $[X_i, Y_j] = 0$ в $U_1 \cap U_2$. Эти векторные поля касательны к $\mathcal{L}$ и поэтому определяют коммутирующие векторные поля $\bar{X}_i = \vec{\partial}/\partial \bar{x}^i$ и $\bar{Y}_i = \vec{\partial}/\partial \bar{y}^i$ на $\bar{U}_1$ и $\bar{U}_2$ соответственно. В пересечении $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$ мы имеем

$$0 = [\bar{X}_i, \bar{Y}_j] = \frac{\vec{\partial}}{\partial \bar{x}^i} \bar{Y}_j^k \frac{\vec{\partial}}{\partial \bar{x}^k}, \quad (6.2)$$

где

$$\bar{Y}_j^k = \bar{Y}_j \bar{x}^k = \frac{\vec{\partial}}{\partial \bar{y}^j} \bar{x}^k$$

– коэффициенты векторного поля $\bar{Y}_j$ в координатах $\bar{x}^i$. Это означает, что $\bar{Y}_j^k$ – якобиева матрица замены координат $\bar{x} \rightarrow \bar{y}$ – постоянная матрица. Поэтому существует такой атлас на $\mathcal{L}$, что все якобиевы матрицы в нем постоянны, что эквивалентно утверждению теоремы.

В силу этого возникает вопрос о геометрической структуре многообразия $\mathcal{L}$, порождающей пару согласованных антискобок на векторном расслоении над $\mathcal{L}$. Напомним, что в $Sp(2)$ -симметричном квантовании многообразии $\mathcal{L}$ включает исходные поля квантуемой теории, духи и антидухи, а также вспомогательные поля $Sp(2)$ -симметричного квантования [1], в число которых в триплектическом случае входят также “симплектические” партнеры [4–6]. К этому “добавляются” антиполя, и, таким образом, возникает триплектическое многообразие $\mathcal{M}$. В случае, если $\mathcal{L}$ является линейным (супер)пространством, известная конструкция [1, 4, 5] состоит в соотнесении каждому полю ϕ^A (координате на $\mathcal{L}$) пары антиполей ϕ_{aA}^* . Тогда ненулевые антискобки имеют

вид $(\phi^A, \phi_{Bb}^*)^a = \delta_b^a \delta_B^A$; такие антискобки, очевидно, ковариантны при линейных преобразованиях на $\mathcal{L}$, совершаемых вместе с индуцированными преобразованиями антиполей ϕ_{aA}^* . Если $\mathcal{L}$ не является линейным (супер)пространством, мы видим, что оно не может быть произвольным: оно должно допускать *плоскую* связность. Как только такая связность задана, можно рассмотреть “удвоенное” кокасательное расслоение $\mathcal{M} = \Pi T^* \mathcal{L} \oplus \Pi T^* \mathcal{L}$ над $\mathcal{L}$ с обращенной четностью слоев. Пусть x^i – локальная координатная система на $\mathcal{L}$, для которой $\nabla_i = \vec{\partial}/\partial x^i$, т.е. символы Кристоффеля равны нулю. В некоторой координатной окрестности на $\mathcal{L}$ координаты на слоях $\Pi T^* \mathcal{L} \oplus \Pi T^* \mathcal{L}$ суть ξ_{ai} , $a = 1, 2$, причем $\epsilon(\xi_{ai}) = \epsilon(x^i) + 1$. При заменах координат на $\mathcal{L}$ координаты ξ_{ai} преобразуются как $\vec{\partial}/\partial x^i$. Построим теперь антискобки в виде

$$(x^i, \xi_{bj})^a = \delta_b^a \delta_j^i, \quad (\xi_{ai}, \xi_{bj})^c = \delta_b^c \Gamma_{ij}^m \xi_{am} - \delta_a^c \Gamma_{ij}^m \xi_{bm}, \quad (6.3)$$

где Γ_{ij}^m – коэффициенты Кристоффеля связности ∇ в координатах x на $\mathcal{L}$. Вводя

$$\overleftarrow{\nabla} = \frac{\vec{\partial}}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^m \xi_{bm} \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_{bj}},$$

мы можем переписать (6.3) в виде

$$(F, G)^a = -G \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_{ai}} \overleftarrow{\nabla}_i F + (-1)^{(\epsilon(F)+1)(\epsilon(G)+1)} F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_{ai}} \overleftarrow{\nabla}_i G. \quad (6.4)$$

Симметризованные тождества Якоби для этой пары антискобок выполнены, поскольку кривизна и кручение связности ∇ равны нулю.

Таким образом, многообразие полей ϕ^A в триплектическом квантовании должно допускать плоскую симметричную связность. Это контрастирует со стандартной схемой БВ, где нет никаких априорных геометрических условий на многообразии *полей*. Такую ситуацию можно рассматривать как ограничение на применимость ковариантного $Sp(2)$ -квантования.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы обнаружили геометрические структуры, лежащие в основе триплектического квантования калибровочных теорий. Наиболее важной из них является (супер)кэлерово многообразие с дополнительными поляризациями (в определенном смысле аналог гиперкэлерова многообразия, но с “неправильной” сигнатурой двух комплексных структур).

Мы видели, однако, что требования на характеристические функции из [12], в конце концов приводящие к теореме, подобной теореме Дарбу, ограничивают пригодные для триплектического квантования пространства практически до плоских пространств. Это можно рассматривать как ограничение на весь подход $Sp(2)$ -симметричного квантования. Или же такое положение следует отнести на счет введенных в [12] аксиом. В этом случае представляет интерес рассмотреть геометрию, отвечающую антискобкам,

не удовлетворяющим условию взаимной коммутативности; можно ожидать, что тем не менее получатся некие интересные геометрические структуры. Ключевым же вопросом тогда будет являться сам по себе смысл соответствующей процедуры квантования (рассматриваемой, например, в рамках континуального интеграла)²⁾.

Одна из мотивировок публикации нашей работы состояла в том, что после появления препринта [17] данной статьи авторам стала известна работа [18], посвященная локальной геометрии бигамильтоновых структур. Там, в частности, показывается, что существование канонических координат для широкого класса пар согласованных скобок Пуассона определяется геометрией пространства, отвечающего характеристическим функциям (т.е. аналога нашего многообразия $\mathcal{M}$). Возможно, эти результаты могут быть обобщены и на случай нечетных скобок Пуассона (антискобок).

В качестве заключительного замечания отметим, что обнаруженные нами в триплектическом квантовании структуры (симплектическая и комплексная структуры и трансверсальные поляризации) являются основными объектами в геометрическом квантовании симплектических многообразий (см., например, [19]), что, возможно, указывает на некоторую взаимосвязь этих подходов к квантованию.

Благодарности. Мы хотим поблагодарить И. А. Баталина и И. В. Тютина за плодотворные обсуждения. Работа частично поддержана грантом РФФИ (№ 98-01-01155) и грантом Президента Российской Федерации (№ 99-15-96037).

ПРИЛОЖЕНИЕ

В данной работе мы используем ряд соглашений о дифференциально-геометрических объектах на супермногообразии $\mathcal{M}$. Основным объектом является суперкоммутативная ассоциативная алгебра $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$ (глобально определенных) гладких функций на $\mathcal{M}$. Векторное поле X на $\mathcal{M}$ является дифференцированием алгебры $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$, т.е.

$$X(FG) = (XF)G - (-1)^{\epsilon(X)\epsilon(F)}F(XG), \quad (\text{П.1})$$

где $\epsilon(F)$ – грасманова четность функции F . Грасманова четность $\epsilon(X)$ векторного поля X определяется как $\epsilon(X) = \epsilon(XF) + \epsilon(F)$, $F \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}$. Векторные поля на $\mathcal{M}$ образуют левый модуль над $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$. Для всякой $F \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}$ и всякого векторного поля X определим поле (FX) через его действие на произвольную функцию $G \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}$ как $(FX)G = F(XG)$.

N -форма Φ определяется как мультилинейное отображение $\Phi: \text{Vect}_{\mathcal{M}} \times \dots \times \text{Vect}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{M}}$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} \Phi(X_1, \dots, X_N) &= (-1)^{(\epsilon(X_j)+1)(\epsilon(X_{j+1})+1)} \times \\ &\quad \times \Phi(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, X_j, X_{j+2}, \dots, X_N), \\ \Phi(FX_1, \dots, X_N) &= F\Phi(X_1, \dots, X_N), \quad X_1, \dots, X_N \in \text{Vect}_{\mathcal{M}}, \quad F \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Грасманова четность $\epsilon(\Phi)$ N -формы Φ определяется как

$$\epsilon(\Phi) = \epsilon(\Phi(X_1, \dots, X_N)) + \epsilon(X_1) + \dots + \epsilon(X_N). \quad (\text{П.3})$$

²⁾Мы благодарим И. Баталина за обсуждение этого вопроса.

Дифференциальные формы являются правым модулем над $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$. Для всяких $F \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}$ и N -формы Φ имеем

$$(\Phi F)(X_1, \dots, X_N) = \Phi(X_1, \dots, X_N)F. \quad (\text{П.4})$$

Свертка векторного поля X и N -формы Φ имеет вид

$$(\mathbf{i}_X \Phi)(X_1, \dots, X_{N-1}) = p(\Phi)\Phi(X_1, \dots, X_{N-1}, X), \quad (\text{П.5})$$

где $p(\Phi)$ – степень формы Φ . Полезно определить внешнее произведение форм $\wedge$ так, чтобы $\mathbf{i}_X$ было дифференцированием внешнего произведения

$$\mathbf{i}_X(\Phi \wedge \Psi) = (\mathbf{i}_X \Phi) \wedge \Psi + (-1)^{(\epsilon(X)+1)(p(\Phi)+\epsilon(\Phi))} \Phi \wedge (\mathbf{i}_X \Psi). \quad (\text{П.6})$$

Тогда дифференциал де Рама d является нильпотентным линейным оператором таким, что

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_X dF &= \langle X, dF \rangle = XF, \quad X \in \text{Vect}_{\mathcal{M}}, \quad F \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}, \\ d(\Phi \wedge \Psi) &= (d\Phi) \wedge \Psi + (-1)^{p(\Phi)+\epsilon(\Phi)} \Phi \wedge (d\Psi). \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

В частности, для 1-формы Φ имеем

$$\begin{aligned} (d\Phi)(X_1, X_2) &= \frac{1}{2} (X_1 \Phi(X_2) - (-1)^{\epsilon(X_1)\epsilon(X_2)} X_2 \Phi(X_1) - \\ &\quad - \Phi([X_1, X_2])) (-1)^{\epsilon(X_2)+1}, \quad X_1, X_2 \in \text{Vect}_{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin. J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 1487; 1991. V. 32. P. 532; P. 2513.
- [2] C. M. Hull. Mod. Phys. Lett. A. 1990. V. 5. P. 1871.
- [3] I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky. Phys. Lett. B. 1981. V. 102. P. 27; Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 2567.
- [4] I. A. Batalin, R. Marnelius. Phys. Lett. B. 1995. V. 446. P. 44.
- [5] I. A. Batalin, R. Marnelius, A. M. Semikhatov. Nucl. Phys. B. 1995. V. 446. P. 249.
- [6] I. A. Batalin, R. Marnelius. Nucl. Phys. B. 1996. V. 465. P. 521.
- [7] I. A. Batalin, I. V. Tyutin. Int. J. Mod. Phys. A. 1993. V. 8. P. 2333; Mod. Phys. Lett. A. 1993. V. 8. P. 3673; 1994. V. 9. P. 1707.
- [8] A. Schwarz. Commun. Math. Phys. 1993. V. 155. P. 249.
- [9] H. Hata, B. Zwiebach. Ann. Phys. 1994. V. 229. P. 177.
- [10] A. Sen, B. Zwiebach. Commun. Math. Phys. 1996. V. 177. P. 305.
- [11] A. Schwarz. Commun. Math. Phys. 1993. V. 158. P. 373.
- [12] M. A. Grigoriev, A. M. Semikhatov. Phys. Lett. B. 1998. V. 417. P. 259.
- [13] A. Nijenhuis. Indag. Math. 1955. V. 17. P. 390.
- [14] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer. Ann. Phys. 1978. V. 111. P. 61.
- [15] Д. Б. Фукс. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984.
- [16] Д. А. Лейтес. УМН. 1980. Т. 35. № 1. С. 3.
- [17] M. A. Grigoriev, A. M. Semikhatov. A Kaehler Structure of the Triplectic Geometry. hep-th/9807023.
- [18] I. M. Gelfand, I. Zakharevich. Webs, Lenard schemes, and the local geometry of bihamiltonian Toda and Lax structures. math.DG/9903080.
- [19] V. Guillemin, S. Sternberg. Geometric Asymptotics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977.

Поступила в редакцию 31.I.2000 г.