Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Гарифуллин, А. Б. Шабат, О структуре полиномиальных законов сохранения, *ТМФ*, 2009, том 161, номер 3, 318–326

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6443>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:51:47

© 2009 г.

Р. Н. Гарифуллин*, А. Б. Шабат†

О СТРУКТУРЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Рассмотрены периодические замыкания интегрируемых цепочек. Установлена компактная формула для производящей функции законов сохранения, общая для классических интегрируемых цепочек, связанных с различными спектральными задачами второго порядка. Исследованы вопросы стабилизации формы законов сохранения при стремлении периода замыкания цепочки к бесконечности.

Ключевые слова: дискретные уравнения, законы сохранения, цепочки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Принимая в качестве общей дискретной модели для спектральных задач второго порядка “разностное” уравнение

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + \beta_n x_{n-2}, \quad (1)$$

мы рассматриваем в этом разделе упорядоченное произведение соответствующих матриц C_k :

$$P_n = C_n C_{n-1} \dots C_1, \quad C_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix} = C_k \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_{k-2} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

ЛЕММА 1. При любом $n \geq 1$ справедлива следующая явная формула для упорядоченного произведения матриц C_k :

$$P_n = C_n C_{n-1} \dots C_1 = \begin{bmatrix} Q_n & R_n \\ Q_{n-1} & R_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где многочлены Q_n , R_n от переменных α_i и β_i удовлетворяют уравнению (1) и записываются в виде

$$Q_n = \prod_{i=2}^n (1 + \beta_i \partial_{i-1} \partial_i) \prod_{i=1}^n \alpha_i, \quad R_n = \beta_1 \partial_1 Q_n, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}. \quad (4)$$

*Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, г. Уфа, Россия.
E-mail: rustem@matem.anrb.ru

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, г. Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: shabat@itp.ac.ru

Доказательство леммы проводится методом индукции по числу сомножителей.

При $n = 1$ имеем

$$Q_1 = \alpha_1, \quad R_0 = \beta_1 \partial_0 Q_1 = 0, \quad Q_0 = 1, \quad R_1 = \beta_1 \partial_1 Q_1 = \beta_1,$$

что согласуется с формулами (4). При $n > 1$ имеем

$$P_{n+1} = \begin{bmatrix} Q_{n+1} & R_{n+1} \\ Q_n & R_n \end{bmatrix} = C_{n+1} P_n = \begin{bmatrix} \alpha_{n+1} Q_n + \beta_{n+1} Q_{n-1} & \alpha_{n+1} R_n + \beta_{n+1} R_{n-1} \\ Q_n & R_n \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, применив индукцию к формуле (4), получаем

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= (1 + \beta_{n+1} \partial_n \partial_{n+1})(\alpha_{n+1} Q_n) = \alpha_{n+1} Q_n + \beta_{n+1} \partial_n Q_n = \\ &= \alpha_{n+1} Q_n + \beta_{n+1} \partial_n (\alpha_n Q_{n-1} + \beta_n Q_{n-2}) = \alpha_{n+1} Q_n + \beta_{n+1} Q_{n-1}. \end{aligned}$$

Формула для Q_n тем самым доказана. Аналогично выводится формула для R_n :

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \beta_1 \partial_1 Q_{n+1} = \beta_1 \partial_1 (\alpha_{n+1} Q_n + \beta_{n+1} Q_{n-1}) = \\ &= \alpha_{n+1} \beta_1 \partial_1 Q_n + \beta_{n+1} \beta_1 \partial_1 Q_{n-1} = \alpha_{n+1} R_n + \beta_{n+1} R_{n-1}. \end{aligned}$$

Отметим в дополнение к лемме 1, что линейная комбинация $x_n = aQ_n + bR_n$ с постоянными коэффициентами a и b дает при $\beta_i \neq 0$ общее решение уравнения (1) и что

$$Q_n R_{n-1} - R_n Q_{n-1} = (-1)^{n-1} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n, \quad n \geq 1.$$

Аналогично лемме 1 доказывается справедливость следующего представления:

$$B_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B_n B_{n-1} \dots B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_n & R_n \\ Q_{n-1} & R_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где

$$Q_n = \prod_{i=2}^n (1 + b_i c_{i-1} \partial_{i-1} \partial_i) \prod_{i=1}^n a_i, \quad R_n = b_1 \partial_1 Q_n. \quad (6)$$

Другими словами, этот случай сводится к случаю, рассмотренному в лемме 1, если обозначить $a_i = \alpha_i$ и $b_i c_{i-1} = \beta_i$.

При выводе основной формулы для законов сохранения N -периодических замыканий цепочек, связанных с произведениями вида (6), мы полагаем, что матрицы B_i гладко зависят от параметра t и удовлетворяют уравнению

$$\dot{B}_i + U_{i+1} B_i = B_i U_i, \quad U_j = \begin{pmatrix} d_j & e_j \\ r_j & v_j \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В этом случае верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\beta_j = b_j c_{j-1}$, $j > 1$, и $\beta_1 = b_1 c_n$. Тогда:

1) след произведения матриц (5) при любом $n \geq 1$ выражается формулой

$$\text{tr}(B_n B_{n-1} \dots B_1) = \left[\prod_{k=1}^n (1 + \beta_k \partial_k \partial_{k-1}) \right] \prod_{i=1}^n a_i, \quad (8)$$

где $\partial_k = \partial / \partial a_k$, $k \geq 1$, и $\partial_0 \stackrel{\text{def}}{=} \partial_n$;

2) при выполнении условий N -периодического замыкания $U_{i+N} = U_i$ имеем

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tr}(B_N B_{N-1} \dots B_1) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (8) является следствием формулы (6), так как верны следующие равенства:

$$Q_n + c_n R_{n-1} = Q_n + c_n b_1 \partial_1 Q_{n-1} = Q_n + \beta_1 \partial_1 \partial_n Q_n = (1 + \beta_1 \partial_1 \partial_n) Q_n.$$

Найдем уравнение, которому удовлетворяет произведение $W_N = B_N B_{N-1} \dots B_1$ матриц B_i :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_N &= \sum_{i=1}^N B_N \dots B_{i+1} \frac{d}{dt} B_i B_{i-1} \dots B_1 = \\ &= \sum_{i=1}^N B_N \dots B_{i+1} (B_i U_i - U_{i+1} B_i) B_{i-1} \dots B_1 = \\ &= W_N U_1 - U_{N+1} W_N = W_N U_1 - U_1 W_N. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{tr} W_N = \operatorname{tr}(W_N U_1) - \operatorname{tr}(U_1 W_N) = 0.$$

Теорема доказана.

2. ЦЕПОЧКИ С ЛОКАЛЬНЫМИ ЗАКОНАМИ СОХРАНЕНИЯ

В качестве первого примера применения теоремы 1 переформулируем известное коммутационное представление цепочки Тоды (см. ниже (18)) в следующем виде [1].

Пусть α_n и β_n удовлетворяют цепочке уравнений

$$\dot{\alpha}_n = \beta_n - \beta_{n+1}, \quad \dot{\beta}_n = \beta_n(\alpha_n - \alpha_{n-1}). \quad (9)$$

Тогда выполняются матричные уравнения

$$\dot{B}_n + V_{n+1} B_n = B_n V_n, \quad B_n = \begin{bmatrix} \lambda + \alpha_n & b_n \\ c_n & 0 \end{bmatrix}, \quad V_n = \begin{bmatrix} \lambda & b_n \\ c_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

если $\beta_n = b_n c_{n-1}$.

ТЕОРЕМА 2. Производящей функцией законов сохранения N -периодического замыкания цепочки (9) с $n \in \mathbb{Z}_N$ является

$$I = \prod_{i=1}^N \left(1 + \beta_i \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{i-1} \partial \alpha_i} \right) \prod_{i=1}^N (\alpha_i + \lambda). \quad (11)$$

Доказательство следует из теоремы 1, примененной к матрицам B_i вида (10).

Разлагая (11) по степеням λ , получаем различные законы сохранения:

$$\begin{aligned}
 \lambda^{N-1} : \quad I_1 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i, \\
 \lambda^{N-2} : \quad I_2 &= \sum_{j>i} \alpha_j \alpha_i + \sum_{i=1}^N \beta_i, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \lambda^0 : \quad I_N &= \prod_{i=1}^N \alpha_i + \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{\substack{i_{l-1}+1 < i_l, \\ l=2, \dots, k}} \prod_{l=1}^k \beta_{i_l} \prod_{j \neq i_l, j \neq i_l+1} \alpha_j.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Будем говорить, что закон сохранения является *локальным*, если его можно записать в виде суммы по периоду от выражения, не зависящего от периода:

$$\dot{\rho}(n) = \sigma_{n+1} - \sigma_n.$$

Подобные выражения мы называем *плотностью локального закона сохранения*. Полученные законы сохранения (12) можно переписать в виде локальных. Для этого нужно учесть, что первая сумма в них представляет собой симметрический полином степени n по α_i , который с помощью симметрических полиномов меньшей степени нужно привести к сумме α_i^n , например:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i, \quad \frac{I_1^2}{2} - I_2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha_i^2}{2} - \beta_i \right), \\
 I_3 - I_1 I_2 + \frac{I_3^3}{3} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha_i^3}{3} - \alpha_i(\beta_{i+1} + \beta_i) \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, для цепочки (9) плотности имеют вид

$$\rho_1(i) = \alpha_i, \quad \rho_2(i) = \frac{\alpha_i^2}{2} - \beta_i, \quad \rho_3(i) = \frac{\alpha_i^3}{3} - \alpha_i(\beta_{i+1} + \beta_i).$$

В качестве второго примера рассмотрим цепочку Вольтерра [2]

$$\dot{p}_n = p_n(p_{n+1} - p_{n-1}). \tag{13}$$

ЛЕММА 2. Матричное уравнение, эквивалентное цепочке (13), имеет вид

$$\dot{B}_n = B_n V_n - V_{n+1} B_n, \quad B_n = \begin{bmatrix} \lambda & p_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_n = \begin{bmatrix} \lambda^2 - p_n & \lambda p_n \\ \lambda & -p_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Доказательство леммы проводится прямой подстановкой.

ТЕОРЕМА 3. Производящей функцией законов сохранения N -периодического замыкания цепочки Вольтерра (13) с $n \in \mathbb{Z}_N$ является

$$I = \prod_{i=1}^N \left(1 + p_i \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{i-1} \partial \lambda_i} \right) \prod_{i=1}^N \lambda_i \Big|_{\lambda_i = \lambda}. \tag{15}$$

Доказательство следует из теоремы 1, примененной к матрицам B_i вида (14).

Разлагая выражение (15) по степеням λ , получаем различные законы сохранения:

$$\begin{aligned}
 \lambda^{N-2} : \quad & I_1 = \sum_{i=1}^N p_i, \\
 \lambda^{N-4} : \quad & I_2 = \sum_{j>i} p_j p_i - \sum_{i=1}^N p_i p_{i-1}, \\
 \lambda^{N-6} : \quad & I_3 = \sum_{k>j>i} p_k p_j p_i - \sum_{k>j>i, k=j+1 \text{ или } j=i+1} p_k p_j p_i, \\
 & \dots\dots\dots \\
 \lambda^{N-2[N/2]} : \quad & I_{[N/2]} = \sum_{\substack{i_{l-1}+1 < i_l, \\ l=2, \dots, [N/2]}} \prod_{l=1}^{[N/2]} p_{i_l}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Аналогично предыдущему случаю эти законы сохранения можно переписать в виде локальных, например:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sum_{i=1}^N p_i, \quad \frac{I_1^2}{2} - I_2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2} + p_i p_{i+1} \right), \\
 I_3 - I_1 I_2 + \frac{I_3^3}{3} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^3}{3} + p_i^2 (p_{i-1} + p_{i+1}) + p_{i-1} p_i p_{i+1} \right).
 \end{aligned}$$

Заметим, что законы сохранения для цепочки Тоды с закрепленными концами следуют из найденных с помощью редукции $\beta_N = 0$ (для сравнения см. монографию [3]).

3. ОДЕВАЮЩАЯ ЦЕПОЧКА

Рассматриваемые нами цепочки описывают динамику лагранжевых систем с взаимодействием ближайших соседей и соответствуют функционалу действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt, \quad L = \sum_n L_n, \quad L_n = M(\dot{q}_n, q_{n+1}, q_n). \tag{17}$$

В частности, цепочка Тоды, которая получается из редукции $\beta_n = e^{q_n}$, $\alpha_n = \dot{q}_n$ цепочки (9),

$$\ddot{q}_n = e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n-q_{n-1}}, \tag{18}$$

соответствует лагранжиану

$$L_n = \frac{\dot{q}_n^2}{2} - e^{q_n-q_{n-1}}.$$

Вырожденные, линейные по $\dot{q}_n$ лагранжианы играют важную роль в теории преобразования Беклунда [4].

Лагранжева форма одевающей цепочки

$$(q_n + q_{n+1})_x = (q_n - q_{n+1})^2 + \lambda_n \quad (19)$$

соответствует $L_n = \dot{q}_n A(q_{n+1}, q_n) + B(q_{n+1}, q_n)$.

С другой стороны, матричные уравнения

$$B'_n + U_{n+1}B_n = B_nU_n, \quad B_n = \begin{pmatrix} g_n & \lambda_n - \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_j = \begin{pmatrix} f_j & \lambda_j - \lambda \\ 1 & -f_j \end{pmatrix} \quad (20)$$

при $g_n = f_n + f_{n+1}$ и $\alpha_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$ приводят нас к уравнениям одевающей цепочки в виде

$$f_{n,x} + f_{n+1,x} = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (21)$$

Действительно, уравнение (20) для матрицы $B_n = (b_{ij})$ сводится для элемента b_{11} к уравнению, эквивалентному (21):

$$g'_n = g_n(f_n - f_{n+1}) + \lambda_n - \lambda_{n+1}.$$

Уравнения для остальных трех элементов матрицы B_n выполняются тождественно.

Для одевающей цепочки также возможно другое матричное представление [5]:

$$F'_n + F_n V_{n+1} = V_n F_n, \quad F_n = \begin{pmatrix} f_n & 1 \\ f_n^2 + \lambda_n - \lambda & f_n \end{pmatrix}, \quad V_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_n + \lambda_n - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \\ u_n = f_n^2 + \dot{f}_n + \lambda_n.$$

Это демонстрирует неединственность матричного представления для цепочек. Однако можно проверить, что элементы с номерами 1, 2 упорядоченных произведений матриц $F_2 F_3 \dots F_n F_{n+1}$ и $B_n \dots B_2 B_1$ удовлетворяют одинаковому рекуррентному соотношению вида (1)

$$A_n = g_n A_{n-1} - (\lambda - \lambda_n) A_{n-2}$$

и отличаются начальными данными $A_0 = 0$, $A_1 = \lambda_1 - \lambda$ для произведений матриц B_i и $A_0 = 0$, $A_1 = 1$ для произведений матриц F_i , следовательно, они отличаются множителем $\lambda_1 - \lambda$.

Параметры α_n , стоящие в правой части уравнений (21), считаются, вообще говоря, произвольными. Можно, например, положить их все равными нулю или единице. Однако если одевающая цепочка (21) получена из формулы (19), то выполняются условия

$$\sum \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N = 0, \quad \sum f_n = 0, \quad (22)$$

позволяющие найти β_j и q_j по α_n и g_n соответственно. Условие (22) является необходимым для разрешимости линейной алгебраической системы при определении β_i по α_i :

$$\beta_i - \beta_{i+1} = \alpha_i, \quad i \in \mathbb{Z}_N; \quad (23)$$

при его выполнении эта система уравнений разрешима и ее решение единственно с точностью до аддитивного параметра. Этот произвольный параметр мы отождествим с λ .

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнено условие (22). Тогда производящей функцией законов сохранения N -периодического замыкания одевающей цепочки (21) с $n \in \mathbb{Z}_N$ является

$$I(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \prod_{i=1}^N \left[1 + (\lambda_i - \lambda) \frac{\partial^2}{\partial g_{i-1} \partial g_i} \right] \prod_{i=1}^N g_i. \quad (24)$$

Доказательство следует из теоремы 1, примененной к матрицам B_i вида (20).

Разлагая функцию (24) по степеням λ , получаем различные законы сохранения. Выпишем их при нечетном N в случае $\lambda_i \equiv 0$ для всех i в переменных f_i и g_i :

$$\begin{aligned} \lambda^{[N/2]} : \quad I_1 &= \sum_{i=1}^N g_i = 2 \sum_{i=1}^N f_i, \\ \lambda^{[N/2]-1} : \quad I_2 &= \sum_{\substack{k-j=2l+1 \\ j-i=2h+1}} g_k g_j g_i = \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^N f_i \right)^3 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N f_i^3, \\ \lambda^{[N/2]-2} : \quad I_3 &= \sum_{\substack{i_m - i_{m-1} = 2j_m + 1, \\ m=1, \dots, 5}} \prod_{m=1}^5 (f_{i_m} + f_{i_{m+1}}), \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda^1 : \quad I_{[N/2]} &= \sum_{i=1}^N \prod_{\substack{j \neq i, j \neq i-1 \\ N}} g_j, \\ \lambda^0 : \quad I_{[N/2]+1} &= \prod_{j=1}^N g_j. \end{aligned} \quad (25)$$

Существенным отличием является более сложная структура законов сохранения для одевающей цепочки. По-видимому, требуется обобщение понятия локальных законов сохранения, учитывающее дополнительные симметрии одевающей цепочки, указанные в работе [6]. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Для одевающей цепочки не существует полиномиальных локальных законов сохранения степени 3 в переменных g и степени 5 в переменных f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что

$$I_2(g) + aI_1^3(g) = \sum_{\substack{k-j=2l+1, \\ j-i=2h+1}} g_k g_j g_i - a \left(\sum_{i=1}^N g_i \right)^3$$

является локальным законом сохранения, где a – некоторая константа. Тогда в нем должно быть kN мономов. Но, с другой стороны, в $I_2(g)$ всего $N(N-1)(N+1)/24$ мономов, а в $I_1^3(g)$ – $N(N+2)(N+1)/6$ мономов. Следовательно, в сумме $J_2(g) + aJ_1^3(g)$ не менее

$$\frac{N(N+2)(N+1)}{6} - \frac{N(N-1)(N+1)}{24} = \frac{N(N+3)(N+1)}{8}$$

мономов. Получается противоречие.

Аналогично показывается, что и сумма $I_3(f) + aI_1^5(f) + bI_2I_1^2(f)$ не является локальным законом сохранения ни при каких константах a, b . Здесь слагаемые имеют следующее количество мономов:

$$M_1 = \frac{N(N^2 - 4N + 3)(N^2 + 14N - 2)}{120},$$

$$M_2 = \frac{N(N^2 + 3N + 2)(N + 3)(N + 4)}{120}, \quad M_3 = \frac{N^3 + N}{2}.$$

Следовательно, в их произвольной комбинации мономов не менее

$$||M_1 - M_2| - M_3| = \frac{N(N - 1)^2}{4}.$$

В заключение покажем, что законы сохранения из теоремы 1 являются локальными функциями потенциала.

Во-первых, элементы b_{12} и f_{12} матриц $B_n B_{n-1} \dots B_2 B_1$ и $F_1 F_2 \dots F_n$ являются локальными функциями потенциала u и его производных и удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} -2b_{12}''b_{12} + (b_{12}')^2 + 4(u_2 - \lambda)b_{12}^2 &= (\lambda_1 - \lambda)^2(I^2(\lambda) - 4\Delta(\lambda)), \\ -2f_{12}''f_{12} + (f_{12}')^2 + 4(u_1 - \lambda)f_{12}^2 &= (I^2(\lambda) - 4\Delta(\lambda)), \end{aligned}$$

где $I(\lambda) = b_{11} + b_{22}$, $\Delta(\lambda) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = \prod_{i=1}^N(\lambda - \lambda_i)$.

Из формул для следа и определителя матрицы B последовательно находим

$$b_{22} = I - b_{11}, \quad b_{21} = \frac{b_{11}(I - b_{11}) - \Delta}{b_{12}}. \quad (26)$$

Для b_{11} , b_{12} имеем

$$\begin{aligned} b_{11}' &= b_{12} - b_{21}(\lambda_1 - \lambda), \\ b_{12}' + 2f_{12}b_{12} &= (\lambda_1 - \lambda)(b_{11} - b_{22}). \end{aligned} \quad (27)$$

Подставим b_{22} во второе из этих уравнений и выразим из него b_{11} :

$$b_{11} = \frac{b_{12}' + 2f_{12}b_{12}}{2(\lambda_1 - \lambda)} + I. \quad (28)$$

Подставив найденные выражения в первое из уравнений (27), получаем требуемое соотношение.

Уравнение для f_{12} строится аналогично.

В результате дифференцирования этих уравнений получается линейное однородное уравнение третьего порядка

$$-Y''' + 4(u - \lambda)Y' + 2u'Y = 0.$$

Во-вторых, по потенциалу u и b_{12} или f_{12} однозначно определяются остальные элементы матриц по формулам (26), (27). Следовательно, и $I(\lambda)$ можно записать в виде локальной функции потенциала u и ее производных.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вопросы локальности законов сохранения и симметрий играют важную роль в теории классических интегрируемых цепочек. С помощью этих законов удалось полностью решить ряд классификационных задач, связанных с обобщениями цепочек Тоды.

Наряду с обобщенными цепочками Тоды большую роль в теории интегрируемых систем играют цепочки другой природы, соответствующие вырожденным лагранжианам. Для этих цепочек вопросы локальности законов сохранения требуют дополнительного исследования. Одним из результатов настоящей работы является доказательство нелокальности полиномиальных законов сохранения одевающей цепочки, описывающей различные композиции преобразований Дарбу для линейного уравнения Шредингера.

Благодарности. Настоящая работа выполнена в рамках Программы РАН, Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3472.2008.2) и Программы поддержки молодых ученых (грант МК-581.2009.1), а также при поддержке РФФИ (гранты № 09-01-90793-моб_ст, 09-01-92431-КЭ-а, 08-01-453-а, 08-01-00440а, 09-01-92436-КЭ-ф).

Список литературы

- [1] М. Тода, *Теория нелинейных решеток*, Мир, М., 1984.
- [2] Р. И. Ямилов, *УМН*, **38**:6(234) (1983), 155–156.
- [3] Ю. Мозер, *Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория*, РХД, Ижевск, 1999.
- [4] В. Э. Адлер, В. Г. Марихин, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **129**:2 (2001), 163–183.
- [5] А. П. Веселов, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:2 (1993), 1–21.
- [6] В. Э. Адлер, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:2 (1993), 79–82.

Поступила в редакцию 30.04.2009