Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Марихин, Метод одевания и разделение переменных. Двумерный случай, *ТМФ*, 2009, том 161, номер 3, 327–331

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6444>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:34:26

© 2009 г.

В. Г. Марихин*

МЕТОД ОДЕВАНИЯ И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Разделение переменных очень удобно для получения решений линейных дифференциальных уравнений в явном виде. Для того чтобы расширить класс таких уравнений, использован метод одевания. В качестве примера метод одевания применен к линейному двумерному дифференциальному оператору, в том числе к оператору с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: разделение переменных, метод одевания, оператор Шредингера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод одевания, использующий преобразования Дарбу [1], эффективен для построения решений интегрируемых уравнений, в том числе нелинейных. В двумерном случае эти преобразования рассматривались, например, в работе [2] в применении к гиперболической системе.

Обычно процедура одевания выглядит следующим образом. Пусть H – некоторый оператор, а ψ – его собственная функция, $H\psi = \lambda\psi$. Применяя одевающий оператор S к функции ψ , получаем собственную функцию $\hat{\psi} = S\psi$ одетого оператора $\hat{H}\hat{\psi} = \lambda\hat{\psi}$, который удовлетворяет следующему уравнению:

$$\hat{H}S = SH. \quad (1)$$

В одномерном случае оператор Дарбу выглядит следующим образом:

$$S = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\psi_x(\mu, x)}{\psi(\mu, x)},$$

где $\psi(\mu, x)$ – собственная функция оператора H с некоторым собственным значением μ : $H\psi(\mu, x) = \mu\psi(\mu, x)$ (здесь и далее мы используем обозначения $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_x F = F_x$, $\partial_y F = F_y$). Что касается двумерного случая, то выбор оператора Дарбу здесь неоднозначен. Например, в работе [3] в качестве преобразования Дарбу выбирается преобразование Лапласа; в работе [4] – преобразование Мутара.

*Институт теоретический физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: mvq@itp.ac.ru

В настоящей работе мы рассмотрим случай, когда одевающий оператор является двумерным линейным дифференциальным оператором

$$S = A(x, y)\partial_x + B(x, y)\partial_y + C(x, y),$$

а $H, \hat{H}$ – дифференциальные операторы второго порядка. Такой выбор обусловлен следующим обстоятельством: в работе [5] было показано, что частным решением уравнения

$$\hat{H}\hat{\Psi}(x, y) = 0, \quad \hat{H} = \frac{(x - y)^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1 - x^2}{(x - y)^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y^2 - 1}{(x - y)^2} \frac{\partial}{\partial y} \right] + \gamma^2(x - y),$$

является волновая функция $\hat{\Psi}(x, y) = (\partial_x - \partial_y)a(x)b(y)$, где a и b – некоторые функции (подробнее см. ниже). Мы покажем, как этот результат может быть получен в рамках нашего подхода, а также рассмотрим общий случай.

Основная цель настоящей работы – рассмотреть оператор H , который можно представить в форме с разделяющимися переменными:

$$H = H^x + H^y, \\ H^x = f_1(x)\partial_x^2 + g_1(x)\partial_x + h_1(x), \quad H^y = f_2(y)\partial_y^2 + g_2(y)\partial_y + h_2(y).$$

Тогда частный случай собственной функции оператора H имеет вид $\psi(x, y) = a(x)b(y)$, где $a(x)$ и $b(y)$ – собственные функции операторов H^x и H^y соответственно. Отметим, что функции $g_1(x)$, $g_2(y)$ могут быть обращены в нуль с помощью преобразования оператора H , однако мы не делаем этого, чтобы выбрать более простой вид оператора S . В частном случае собственного значения $\lambda = 0$ можно взять оператор H в более общей форме $H = e^{\phi(x, y)}(H^x + H^y)$.

Из уравнения (1) получаем, что $\hat{H} = e^{\phi(x, y)}(H_1\partial_x^2 + H_2\partial_y^2 + H_3\partial_x + H_4\partial_y + H_5)$, где

$$\begin{aligned} H_1 &= f_1(x), \quad H_2 = f_2(y), \\ H_3 &= g_1(x) + f_1'(x) + \phi_x(x, y)f_1(x) + \phi_y(x, y)f_1(x) \frac{B(x, y)}{A(x, y)} - 2f_1(x) \frac{A_x(x, y)}{A(x, y)}, \\ H_4 &= g_2(y) + f_2'(y) + \phi_y(x, y)f_2(y) + \phi_x(x, y)f_2(y) \frac{A(x, y)}{B(x, y)} - 2f_2(y) \frac{B_y(x, y)}{B(x, y)}, \\ H_5 &= h_1(x) + h_2(y) + g_1'(x) + \phi_x(x, y)g_1(x) - 2f_1(x) \frac{C_x(x, y)}{A(x, y)} - \\ &\quad - f_1'(x) \frac{C(x, y)}{A(x, y)} + 2f_1(x) \frac{A_x(x, y)C(x, y)}{A^2(x, y)} - \phi_x(x, y)f_1(x) \frac{C(x, y)}{A(x, y)} - \\ &\quad - \phi_y(x, y)f_1(x) \frac{B(x, y)C(x, y)}{A^2(x, y)} + \phi_y(x, y)g_1(x) \frac{B(x, y)}{A(x, y)} - g_1(x) \frac{A_x(x, y)}{A(x, y)} - \\ &\quad - g_2(y) \frac{A_y(x, y)}{A(x, y)} - f_1'(x) \frac{A_x(x, y)}{A(x, y)} - \phi_y(x, y)f_1(x) \frac{A_x(x, y)B(x, y)}{A^2(x, y)} - \\ &\quad - f_1(x) \frac{A_{xx}(x, y)}{A(x, y)} - \phi_x(x, y)f_1(x) \frac{A_x(x, y)}{A(x, y)} + 2f_1(x) \frac{A_x^2(x, y)}{A^2(x, y)} + \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& + 2f_2(y) \frac{A_y(x, y)B_y(x, y)}{A(x, y)B(x, y)} - f_2(y) \frac{A_{yy}(x, y)}{A(x, y)} - \phi_x(x, y)f_2(y) \frac{A_y(x, y)}{B(x, y)} - \\
& - \phi_y(x, y)f_2(y) \frac{A_y(x, y)}{A(x, y)} - f'_2(y) \frac{A_y(x, y)}{A(x, y)}.
\end{aligned}$$

Мы также имеем три уравнения для функций $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $\phi(x, y)$, но не выписываем эти уравнения ввиду их громоздкости.

В следующем разделе мы рассмотрим случай оператора $S = \partial_x - \partial_y$, важный для физических приложений.

2. СЛУЧАЙ $S = \partial_x - \partial_y$

При $S = \partial_x - \partial_y$ три упомянутых уравнения можно проинтегрировать, получая следующие функциональные уравнения:

$$e^{\phi(x, y)} = \frac{F_1(x + y)}{f_1(x) + f_2(y)} = \frac{F_2(x + y)}{g_1(x) + g_2(y)} = \frac{F_3(x + y)}{h_1(x) + h_2(y)}. \quad (3)$$

Для решения этих функциональных уравнений рассмотрим, например, второе равенство в (3), из которого следует, что

$$g_1(x) + g_2(y) = F(x + y)(f_1(x) + f_2(y)).$$

Продифференцируем это уравнение по x и по y , в результате имеем

$$F''(x + y)(f_1(x) + f_2(y)) + 2F'(x + y)(f'_1(x) + f'_2(y)) = 0$$

или

$$s(x + y)(f_1(x) + f_2(y)) + 2(f'_1(x) + f'_2(y)) = 0, \quad s(t) = \frac{F''(t)}{F'(t)}.$$

Дифференцируя это уравнение по x и y , получаем

$$s''(x + y)(f_1(x) + f_2(y)) + 2s'(x + y)(f'_1(x) + f'_2(y)) = 0,$$

следовательно, $s'' = s's$, $s' = (s^2 + \beta^2)/2$, откуда $s(t) = \beta(1 + Ce^{\beta t})(1 - Ce^{\beta t})^{-1}$. Имеем два случая.

1. Случай $\beta \neq 0$. При этом решение функциональных уравнений (3) есть

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= a_1 e^{\beta t} + d_1, & f_2(t) &= a_2 e^{-\beta t} - d_1, \\
g_1(t) &= b_1 e^{\beta t} + e_1, & g_2(t) &= b_2 e^{-\beta t} - e_1, \\
h_1(t) &= c_1 e^{\beta t} + k_1, & h_2(t) &= c_2 e^{-\beta t} - k_1.
\end{aligned}$$

2. Случай $\beta = 0$. При этом решение функциональных уравнений (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= -f_2(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, & g_1(t) &= -g_2(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2, \\
h_1(t) &= -h_2(t) = a_3 t^2 + b_3 t + c_3.
\end{aligned}$$

Положив $f_1(t) = (1 - t^2)/2$, $g_1(t) = 0$, $h_1(t) = \gamma^2 t$, получаем гамильтониан из работы [5]. Используя метод нашей работы, легко получить волновую функцию основного состояния [5]: $\Psi_0 = (\partial_x - \partial_y)a(x)b(y)$, где a и b – решения уравнений

$$(1 - x^2)a''(x) + 2\gamma^2 a(x)(x + \nu) = 0, \quad (1 - y^2)b''(y) + 2\gamma^2 b(y)(y + \nu) = 0.$$

В работе [5] $\nu = 1$, при этом решения могут быть выражены через функции Бесселя:

$$a(x) = C_1(x - 1)^{1/2}I(1, 2^{1/2}2\gamma(x - 1)^{1/2}) + C_2(x - 1)^{1/2}K(1, 2^{1/2}2\gamma(x - 1)^{1/2}),$$

аналогичная формула справедлива и для $b(y)$.

3. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА–ДАРБУ

Уравнение Эйлера–Дарбу [6] имеет вид

$$u_{xy} + \frac{\alpha u_x - \beta u_y}{x - y} = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим следующую параметризацию квантового спинового оператора:

$$\begin{aligned} S^1 &= -\frac{1}{2}(x^2 - 1)\partial_x - \frac{1}{2}(y^2 - 1)\partial_y + \frac{1}{2}(\beta x + \alpha y), \\ S^2 &= -\frac{i}{2}(x^2 + 1)\partial_x - \frac{i}{2}(y^2 + 1)\partial_y + \frac{i}{2}(\beta x + \alpha y), \\ S^3 &= -x\partial_x - y\partial_y + \frac{1}{2}(\alpha + \beta); \quad [S^l, S^j] = i\epsilon^{ljk}S^k, \end{aligned}$$

а также оператор Эйлера–Дарбу

$$L = \partial_x \partial_y + \frac{\alpha}{x - y} \partial_x - \frac{\beta}{x - y} \partial_y.$$

Тогда

$$\begin{aligned} [S^1, L] &= (x + y)L, \quad [S^2, L] = i(x + y)L, \quad [S^3, L] = 2L, \\ S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + (x - y)^2 L &= s(s + 1), \quad s = \frac{1}{2}(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Операторы S^i являются операторами Дарбу уравнения Эйлера–Дарбу, т. е. если u – решение уравнения (4), то $u^i = S^i u$ – также решения уравнения (4).

Например, начиная с решения уравнения (4) вида $u_0 = (x - y)^{\alpha + \beta + 1}$, мы “размножаем” решения этого уравнения в соответствии с $u_n = (-S)^n u_0$, тогда $u_n = P_n(x, y)u_0$, где

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \quad P_1 = (\alpha + 1)x + (\beta + 1)y, \\ P_2 &= (\alpha + 1)(\alpha + 2)x^2 + 2xy(\alpha + 1)(\beta + 1) + (\beta + 1)(\beta + 2)y^2, \\ P_3 &= (\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)x^3 + 3(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\beta + 1)x^2y + \\ &\quad + 3(\alpha + 1)(\beta + 1)(\beta + 2)xy^2 + (\beta + 1)(\beta + 2)(\beta + 3)y^3. \end{aligned}$$

Рассмотрим операторы $S^\pm = S^1 \pm iS^2$ и элементарное решение уравнения Эйлера–Дарбу $u_\mu = \sqrt{x - \mu} \sqrt{y - \mu}$, тогда

$$S^+ u_\mu = -\frac{\partial}{\partial \mu} u_\mu, \quad S^- u_\mu = \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} u_\mu - 2\mu s u_\mu, \quad S^3 u_\mu = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} u_\mu - s u_\mu.$$

Отметим, что в данном случае переменные в гамильтониане не разделены, но они разделены в начальном частном решении, а роль операторов Дарбу играют операторы $S^\pm$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе предлагается построение решений некоторых линейных уравнений с частными производными второго порядка на основании метода одевания уравнений с разделенными переменными. Наиболее просто наш метод может быть применен при заданном одевающем операторе S . Приведем пример. Пусть $S = y\partial_x - x\partial_y$, тогда

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{a}{x^2} + b, \quad g_1(x) = g_2(x) = -\frac{a}{x^3} + \frac{c}{x}, \quad h_1(x) = h_2(x) = dx^2 + e.$$

Интересно, что в этом случае переменные в одетом гамильтониане также разделены:

$$H_1(x, y) = H_2(y, x) = \frac{a}{x^2} + b, \quad H_3(x, y) = 0, \quad H_4(x, y) = H_5(y, x) = -\frac{3a}{x^3} + \frac{c}{a}, \\ H_6(x, y) = w(x) + w(y), \quad w(x) = 3\frac{a}{x^4} - \frac{c}{x^2} + e + dx^2.$$

Решение для произвольных операторов $S, H, \hat{H}$ является непростой задачей. Однако для конкретных применений более естественной и более простой постановкой является следующая: пусть дан оператор $\hat{H}$, требуется восстановить операторы H, S и функцию $k(x, y)$, если это возможно, с помощью формул (2). Например, первое условие, которое нужно проверить, таково: $H_2/H_1 = f_2(y)/f_1(x)$, при этом восстанавливаются функции $f_1(x), f_2(y)$. Процедура может быть продолжена, при этом определяются функции $H_i(x, y), k(x, y), A(x, y), B(x, y), C(x, y)$, т. е. операторы H, S .

Благодарности. Автор благодарен А. Б. Шабату и В. В. Соколову за внимание к работе. Исследования были частично поддержаны РФФИ (грант № 08-01-00453_а), а также Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3472.2008.2).

Список литературы

- [1] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Première partie. Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima*, Reimpression de la deuxième édition de 1914, Chelsea, New York, 1972.
- [2] А. Б. Шабат, *ТМФ*, **103**:1 (1995), 170–175.
- [3] E. V. Ferapontov, A. P. Veselov, *J. Math. Phys.*, **42**:2 (2001), 590–607.
- [4] И. А. Тайманов, С. П. Царев, *ТМФ*, **157**:2 (2008), 188–207.
- [5] М. А. Скворцов, П. М. Островский, *Письма в ЖЭТФ*, **85**:1 (2007), 79–83.
- [6] W. Miller Jr., *Symmetry and Separation of Variables*, Encyclopedia Math. Appl., **4**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1977.

Поступила в редакцию 4.03.2009,
после доработки 25.03.2009