Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Гончаровский, И. В. Широков, Интегрируемый класс дифференциальных уравнений с нелокальной нелинейностью на группах Ли, *ТМФ*, 2009, том 161, номер 3, 332–345

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6445>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:37:04

© 2009 г. М. М. Гончаровский*, И. В. Широков*

ИНТЕГРИРУЕМЫЙ КЛАСС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА ГРУППАХ ЛИ

Построены общее и N -солитонное решения интегродифференциального уравнения Шредингера с нелокальной нелинейностью. Рассматриваются интегрируемые нелинейные интегродифференциальные уравнения на многообразии произвольной связной унимодулярной группы Ли. Для редукции уравнений на группе к уравнениям с меньшим числом независимых переменных применяется метод орбит коприсоединенного представления и построенный на его основе обобщенный гармонический анализ. Возможности изложенного алгоритма демонстрируются на примере группы $SO(3)$.

Ключевые слова: нелинейные интегродифференциальные уравнения, солитоны, группы Ли, коприсоединенное представление, гармонический анализ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Актуальной задачей современной математической физики является задача построения интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений. В настоящей работе обсуждается класс интегрируемых уравнений с нелокальной нелинейностью на многообразиях групп Ли. В первой части работы рассматриваются интегрируемые нелинейные интегродифференциальные уравнения в пространстве R^n . Под интегрируемостью в этом случае понимается возможность сведения исходного уравнения к системе алгебраических или обыкновенных дифференциальных уравнений. Подробно рассматривается случай свободного уравнения Шредингера с дополнительным нелинейным интегральным членом, находится его общее решение, строится N -солитонное решение. Интересно, что, в отличие от классических нелинейных интегрируемых дифференциальных уравнений, допускающих солитонные решения (уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ), нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), синус-Гордон и т.д.), обобщение которых на многомерный случай представляет собой нетривиальную задачу (см., например, книгу [1]), нелокальные уравнения допускают многосолитонные решения в пространствах R^n произвольной размерности.

*Омский государственный технический университет, Омск, Россия.
E-mail: iv_shirokov@mail.ru, eiklm@mail.ru

Во второй части работы рассматривается более общий случай интегрируемых интегродифференциальных уравнений на многообразии $R^1 \times G$, где G – произвольная связная унимодулярная группа Ли. Для редукции уравнений на группе к уравнениям с меньшим числом независимых переменных применяется метод орбит коприсоединенного представления [2] и построенный на его основе в монографии [3] обобщенный гармонический анализ, ранее успешно применявшийся для интегрирования линейных дифференциальных уравнений [4], [5]. После редукции нелинейное интегродифференциальное уравнение сводится к системе алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве примера строится решение уравнения рассматриваемого типа для $G = SO(3)$.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ

В этом разделе G – вещественная абелева n -мерная группа Ли, $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ – координаты на многообразии G . Рассмотрим класс нелинейных интегродифференциальных уравнений для неизвестной функции $\psi(t, \mathbf{x})$, $t \in R^1$, следующего вида:

$$\begin{aligned} H(\partial_t, -i\partial_x)\psi(t, \mathbf{x}) = & A(\partial_t, -i\partial_x) \int_{G^3} \psi(t, \mathbf{x}_1)\psi(t, \mathbf{x}_2)\overline{\psi(t, \mathbf{x}_3)} \times \\ & \times \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 + \\ & + B(\partial_t, -i\partial_x) \int_{G^5} \psi(t, \mathbf{x}_1)\psi(t, \mathbf{x}_2)\psi(t, \mathbf{x}_3)\overline{\psi(t, \mathbf{x}_4)} \overline{\psi(t, \mathbf{x}_5)} \times \\ & \times \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 d\mathbf{x}_5 + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $H, A, B, \dots$ – линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Введем преобразование Фурье $\psi(t, \mathbf{x}) = \int e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}\psi(t, \mathbf{p}) d\mathbf{p}/(2\pi)^n$. Если какая-либо однопараметрическая подгруппа с координатой x^j компактна: $x^j \sim x^j + 2\pi$, то $p_j \in \mathbb{Z}$, и в формуле для преобразования Фурье интегрирование по переменной p_j следует заменить суммированием по целым числам. После преобразования Фурье уравнение (1) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$H(\partial_t, \mathbf{p})\psi(t, \mathbf{p}) = A(\partial_t, \mathbf{p})|\psi(t, \mathbf{p})|^2\psi(t, \mathbf{p}) + B(\partial_t, \mathbf{p})|\psi(t, \mathbf{p})|^4\psi(t, \mathbf{p}) + \dots \quad (2)$$

Популярным объектом исследования является НУШ и его различные обобщения. Рассмотрим уравнение

$$i \frac{\partial \psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \Delta \psi(t, \mathbf{x}) = \int K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \psi(t, \mathbf{x}_1) \psi(t, \mathbf{x}_2) \overline{\psi(t, \mathbf{x}_3)} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3. \quad (3)$$

Если в этом уравнении положить $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3)$, то мы получим широко известное НУШ. В работах [6], [7] строятся квазиклассические решения и изучается распространение гауссовых волновых пакетов в уравнении Шредингера с интегральной нелинейностью типа Хартри, что соответствует уравнению (3) для функции $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)$.

Выпишем уравнение (3) для ядра $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$ и найдем его общее решение:

$$i \frac{\partial \psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \Delta \psi(t, \mathbf{x}) = \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) \psi(t, \mathbf{x}_1) \psi(t, \mathbf{x}_2) \overline{\psi(t, \mathbf{x}_3)} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3. \quad (4)$$

Уравнение (2) здесь имеет простой вид:

$$i\dot{\psi}(t, \mathbf{p}) = (\mathbf{p}^2 + |\psi(t, \mathbf{p})|^2)\psi(t, \mathbf{p}).$$

Таким образом, общее решение задачи Коши для уравнения (4) с начальным условием $\psi(0, \mathbf{x})$ представляется следующей формулой:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \phi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x} - it(\mathbf{p}^2 + |\phi(\mathbf{p})|^2)} d\mathbf{p}, \quad \phi(\mathbf{p}) = \int_{R^n} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \psi(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Так же, как и в случае линейного уравнения Шредингера, решения уравнения (4) являются суперпозицией плоских волн. Однако наличие в правой части нелинейного члена приводит к существованию качественно новых решений, типичных для нелинейных уравнений, а именно солитонных решений. Под солитонным решением мы понимаем решение в виде бегущей волны с конечной нормой $\int |\psi(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty$.

Приведем N -солитонное решение уравнения (4) в пространстве R^n . Пусть постоянный вектор $\mathbf{v}_j \in R^n$ обозначает скорость j -го солитона. Обозначим через B_j шар в R^n с центром в точке $\mathbf{v}_j/2$ и радиусом $|\mathbf{v}_j|/2$, тогда $B_j = \{\mathbf{p} \in R^n \mid \mathbf{p}\mathbf{v}_j - \mathbf{p}^2 > 0\}$. Введем подмножества $M_j \subset B_j$ такие, что $M_j \cap M_s = \emptyset$ для любых $j \neq s$, $j, s = 1, \dots, N$. Обозначим через $\theta_{M_j}(\mathbf{p})$ характеристические функции множеств M_j :

$$\theta_{M_j}(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{p} \in M_j, \\ 0, & \mathbf{p} \notin M_j. \end{cases}$$

Очевидна справедливость равенств

$$\theta_{M_j}^2(\mathbf{p}) = \theta_{M_j}(\mathbf{p}), \quad \theta_{M_j}(\mathbf{p})\theta_{M_s}(\mathbf{p}) = 0, \quad j \neq s. \quad (6)$$

Построим функцию

$$\phi(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^N \theta_{M_j}(\mathbf{p}) \sqrt{\mathbf{p}\mathbf{v}_j - \mathbf{p}^2} e^{i\varphi_j(\mathbf{p})}, \quad (7)$$

где φ_j – произвольные вещественные функции. В силу равенств (6) имеем

$$|\phi(\mathbf{p})|^2 = \sum_{j=1}^N \theta_{M_j}(\mathbf{p})(\mathbf{p}\mathbf{v}_j - \mathbf{p}^2). \quad (8)$$

Для произвольных функций $F(\mathbf{p})$, $f_s(\mathbf{p})$ в силу этих же формул справедливо равенство

$$\int_{R^n} F(\mathbf{p}) \theta_{M_j}(\mathbf{p}) e^{\sum_s f_s(\mathbf{p}) \theta_{M_s}(\mathbf{p})} d\mathbf{p} = \int_{M_j} F(\mathbf{p}) e^{f_j(\mathbf{p})} d\mathbf{p}. \quad (9)$$

Рис. 1. Двухсолитонное решение в моменты времени $t_1 = 0$ (а), $t_2 = 16$ (б), $t_3 = 33$ (в) для параметров $v_1 = 1$, $v_2 = -0.8$, $x_1 = -22$, $x_2 = 15$.

Рис. 2. Односолитонное решение на плоскости для параметров $v_x = 1$, $v_y = 0$.

Подставляя выражение (7) в формулу общего решения (5) и используя равенства (8) и (9), получаем искомое N -солитонное решение

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^N \int_{M_j} \sqrt{\mathbf{p}\mathbf{v}_j - \mathbf{p}^2} e^{i\varphi_j(\mathbf{p})} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{v}_j t)} d\mathbf{p}. \quad (10)$$

Из ограниченности множеств M_j и конечности их числа следует конечность нормы солитонного решения (10):

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \int |\psi(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^N \int_{M_j} (\mathbf{p}\mathbf{v}_j - \mathbf{p}^2) d\mathbf{p} < \\ &< \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j^2 \text{Vol}(M_j) < \infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Приведем явный вид решения (10) на R^1 для случая двух солитонов, движущихся навстречу друг другу со скоростями $v_1 > 0$ и $v_2 < 0$:

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \frac{v_1}{4|x - x_1 - tv_1|} J_1\left(\frac{v_1|x - x_1 - tv_1|}{2}\right) e^{iv_1(x - x_1 - tv_1)/2} - \\ &- \frac{v_2}{4|x - x_2 - tv_2|} J_1\left(-\frac{v_2|x - x_2 - tv_2|}{2}\right) e^{iv_2(x - x_2 - tv_2)/2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $J_1(z)$ – функции Бесселя первого рода, x_1, x_2 – координаты центра первого и второго солитонов в начальный момент времени. Представление (12) получено из формулы (10) для $M_1 = B_1 = (0, v_1)$, $M_2 = B_2 = (v_2, 0)$, $\varphi_1 = -px_1$, $\varphi_2 = -px_2$. На рис. 1 представлена вещественная часть решения (12) для трех различных моментов времени.

Приведем также вид двумерного солитона на плоскости R^2 с координатами x, y . На рис. 2 приведены графики вещественной части и модуля волновой функции движущегося вдоль оси x солитона (движение происходит, естественно, без изменения формы).

3. ЭЛЕМЕНТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НА ГРУППАХ ЛИ

Если в уравнении (1) считать, что неизвестная функция ψ – функция на абелевой унимодулярной группе Ли G , и заменить операторы дифференцирования $-i\partial_x$ на действие правоинвариантных векторных полей η , то мы получим более широкий класс интегрируемых нелинейных интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} H(\partial_t, \eta)\psi(t, g) &= A(\partial_t, \eta) \int_{G^3} \psi(t, g_1) \psi(t, g_2) \overline{\psi(t, g_3)} \times \\ &\times \delta(gg_3g_2^{-1}g_1^{-1}) d\mu(g_1) d\mu(g_2) d\mu(g_3) + \\ &+ B(\partial_t, \eta) \int_{G^5} \psi(t, g_1) \psi(t, g_2) \psi(t, g_3) \overline{\psi(t, g_4)} \overline{\psi(t, g_5)} \times \\ &\times \delta(gg_5g_4g_3^{-1}g_2^{-1}g_1^{-1}) \prod_{k=1}^5 d\mu(g_k) + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

В частном случае, когда оператор H является квадратичной невырожденной комбинацией правоинвариантных полей, мы имеем уравнение скалярного поля с нелокальным самодействием на римановом многообразии группы Ли с правоинвариантной метрикой:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta_G - m^2\right)\psi(g) = \int_{G^3} \psi(g_1)\psi(g_2)\overline{\psi(g_3)}\delta(gg_3g_2^{-1}g_1^{-1})d\mu(g_1)d\mu(g_2)d\mu(g_3), \quad (14)$$

где $\Delta_G = g^{ab}\eta_a\eta_b$, $\det g^{ab} \neq 0$, $g^{ab} = \text{const}$.

В настоящем разделе мы коротко изложим теорию гармонического анализа на группах Ли, основанного на методе орбит коприсоединенного представления, с помощью которой строится метод интегрирования уравнений (13) и (14).

Пусть G – вещественная связная унимодулярная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ – дуальное пространство к алгебре $\mathfrak{g}$, $\mathcal{O}_\lambda \approx \mathfrak{g}^*/G^\lambda$, $G^\lambda = \{g \in G \mid \text{Ad}_g^* \lambda = \lambda\}$, – орбита коприсоединенного представления группы G , проходящая через линейный функционал $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, ω_λ – симплектическая форма Кириллова:

$$\omega_\lambda(a, b) \equiv \langle \lambda, [X, Y] \rangle, \quad a, b \in T_\lambda \mathcal{O}_\lambda, \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \quad a = \text{ad}_X^* \lambda, \quad b = \text{ad}_Y^* \lambda.$$

Подалгебра $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ такая, что

$$\dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{g} - \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_\lambda, \quad \langle \lambda, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \rangle = 0, \quad (15)$$

называется *поляризацией* линейного функционала λ . В монографии [8] установлено, что для произвольной алгебры Ли поляризация существует для всякого невырожденного функционала λ , т.е. когда $\mathcal{O}_\lambda$ – орбита общего положения. Отметим, что для гармонического анализа следует рассматривать именно невырожденные функционалы, и в дальнейшем под λ мы будем понимать функционал общего положения. В этом случае

$$\dim \mathcal{O}_\lambda = \dim \mathfrak{g} - \text{ind } \mathfrak{g}, \quad \dim \mathfrak{n} = \frac{1}{2} (\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g}), \quad \text{ind } \mathfrak{g} \equiv \inf_{\lambda \in \mathfrak{g}^*} \dim \mathfrak{g}^\lambda.$$

По заданной комплексной поляризации $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ построим вещественное подпространство $\mathfrak{m}$, так что $\mathfrak{m}_\mathbb{C} = \mathfrak{n} + \bar{\mathfrak{n}}$, и вещественную подалгебру $\mathfrak{h} = \mathfrak{n} \cap \bar{\mathfrak{n}} \subset \mathfrak{g}$. Локально всегда выполняется условие

$$\text{Ad}_h \mathfrak{m} = \mathfrak{m}, \quad h \in H. \quad (16)$$

Обозначим через $\xi_X(g) = (L_g)_* X$, $\eta_X(g) = -(R_g)_* X$, $X \in \mathfrak{g}$, левоинвариантные и правоинвариантные поля на группе G (генераторы правых и левых сдвигов соответственно). Представление $X \rightarrow \eta_X$ алгебры $\mathfrak{g}$ может быть продолжено по линейности до представления комплексной оболочки $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Подалгебра $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ подчинена функционалу $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, и поэтому линейный функционал λ задает ее одномерное представление $X \rightarrow \lambda(X)$, $X \in \mathfrak{n}$. Определим линейное пространство $L(G, \mathfrak{n}, \lambda)$ решений системы

$$\left(\eta_Y(g) + \frac{i}{\hbar} \lambda(Y)\right)\psi(g) = 0, \quad Y \in \mathfrak{n}, \quad \psi \in C^\infty(G), \quad (17)$$

где $\hbar$ – положительный вещественный параметр.

Для случая, когда $\mathfrak{m}$ – подалгебра, H , M – замкнутые подгруппы группы G с алгебрами $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{m}$ и выполнено условие (16), в монографии [2] доказывается теорема, которая утверждает, что пространство $L(G, \mathfrak{n}, \lambda)$ изоморфно, т.е. $\phi: L(G, \mathfrak{n}, \lambda) \rightarrow L(Q, \mathfrak{n}, \lambda)$, пространству функций $L(Q, \mathfrak{n}, \lambda)$ на частично голоморфном многообразии Q типа (k, l) , где $k = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{m}$, $l = (\dim \mathfrak{m} - \dim \mathfrak{h})/2$. Отметим, что если приведенные выше условия не выполняются, то изоморфизм и многообразие Q определяются локально. Нетрудно проверить справедливость равенства $\dim Q = (1/2) \dim \mathcal{O}_\lambda = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{n}$. Для функционала λ общего положения $\dim Q = (\dim \mathfrak{g} - \text{ind } \mathfrak{g})/2$. Важно отметить, что многообразие Q является лагранжевым подмногообразием к орбите $\mathcal{O}_\lambda$: $\omega_\lambda|_Q = 0$.

Поскольку пространство $L(G, \mathfrak{n}, \lambda)$ инвариантно относительно правого сдвига, корректно определены линейные операторы ζ_X , действующие в пространстве $L(Q, \mathfrak{n}, \lambda)$:

$$\zeta_X = \phi \circ \xi_X \circ \phi^{-1}, \quad X \in \mathfrak{g}. \quad (18)$$

Операторы ζ_X образуют неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$: $[\zeta_X, \zeta_Y] = \zeta_{[X, Y]}$, $X, Y \in \mathfrak{g}$, в пространстве $L(Q, \mathfrak{n}, \lambda)$, которое мы называем λ -представлением.

В локальных координатах q многообразия Q операторы ζ_X имеют вид

$$\zeta_X = \alpha_X^a(q) \frac{\partial}{\partial q^a} + \frac{i}{\hbar} \chi_X(q, \lambda), \quad X \in \mathfrak{g}, \quad \chi_X(0, \lambda) = \lambda(X).$$

Следовательно, λ -представление можно определить как операторно неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве функций на лагранжевом подмногообразии Q орбиты коприсоединенного представления $\mathcal{O}_\lambda$.

На частично голоморфном многообразии Q введем меру $d\mu(q)$ и скалярное произведение

$$(\psi_1, \psi_2)_Q \equiv \int_Q \overline{\psi_1(q)} \psi_2(q) d\mu(q),$$

относительно которого операторы ζ антиэрмитовы: $\zeta^+ = -\zeta$. Для этого необходимо ввести в операторы ζ “квантовый сдвиг”: $\lambda \rightarrow \lambda + i\hbar\beta$, где

$$\beta(X) = \frac{1}{2} (\text{tr}(\text{ad}_X) - \text{tr}(\text{ad}_X|_{\mathfrak{m}})), \quad X \in \mathfrak{g}. \quad (19)$$

Формула (19) справедлива, если пространство $\mathfrak{m}$ – подалгебра. В силу операторной неприводимости операторы Казимира в λ -представлении являются операторами умножения на вещественные константы: $K(-i\hbar\zeta) = \kappa(\lambda)$.

Пусть $(g^1, \dots, g^{\dim \mathfrak{g}})$ – локальные координаты элемента g из окрестности единицы группы G , $\{e_k = (\partial g / \partial g^k)|_{g=e}\}$ – базис алгебры $\mathfrak{g} \cong T_e G$. Обозначим через T^λ поднятие λ -представления алгебры $\mathfrak{g}$ до локального представления группы G :

$$\left. \frac{\partial T^\lambda(g)}{\partial g^k} \right|_{g=e} = \zeta_k. \quad (20)$$

По определению

$$T^\lambda(g) \varphi(q) = \int D_{q\bar{q}'}^\lambda(g) \varphi(q') d\mu(q') \quad (21)$$

для всех $\varphi \in C^\infty(Q)$. Из условия $T^\lambda(g_1)T^\lambda(g_2) = T^\lambda(g_1g_2)$ следует соотношение для “матричных элементов” представления T^λ :

$$D_{q\bar{q}'}^\lambda(g_1g_2) = \int D_{q\bar{q}''}^\lambda(g_1)D_{q''\bar{q}'}^\lambda(g_2) d\mu(q''). \quad (22)$$

Используя соотношения

$$\left. \frac{\partial(g\tilde{g})}{\partial\tilde{g}^k} \right|_{\tilde{g}=e} = \xi_k(g), \quad \left. \frac{\partial(\tilde{g}g)}{\partial\tilde{g}^k} \right|_{\tilde{g}=e} = -\eta_k(g)$$

и формулы (20), (21), получаем уравнения для обобщенных функций $D_{q\bar{q}'}^\lambda(g)$:

$$(\eta_X(g) + \zeta_X(q, \lambda))D_{q\bar{q}'}^\lambda(g) = 0, \quad (\xi_X(g) + \overline{\zeta_X(q', \lambda)})D_{q\bar{q}'}^\lambda(g) = 0. \quad (23)$$

В силу равенства $\eta(g^{-1}) = -\xi(g)$ имеем

$$D_{q\bar{q}'}^\lambda(g^{-1}) = \overline{D_{q'\bar{q}}^\lambda(g)}. \quad (24)$$

С учетом нормировки $D_{q\bar{q}'}^\lambda(e) = \delta(q, \bar{q}')$ функции $D_{q\bar{q}'}^\lambda(g)$ находятся из уравнений (23) однозначно:

$$D_{q\bar{q}'}^\lambda(e^X) = e^{\zeta_X(q, \lambda)}\delta(q, \bar{q}'), \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Определяя таким образом “матричные элементы” в окрестности единицы и применяя равенство (22), в силу связности группы G можно распространить локальное представление T^λ на всю группу. Из условия (23) и требования однозначной определенности функций $D_{q\bar{q}'}^\lambda(g)$ на группе G следует условие для орбиты $\mathcal{O}_\lambda$:

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \oint_{\gamma \in H_1(G^\lambda)} \sigma_\lambda = n_\gamma \in \mathbb{Z}. \quad (25)$$

Здесь $G^\lambda = \{g \in G \mid \text{Ad}_g^* \lambda = \lambda\}$ – стабилизатор функционала λ , $H_1(G^\lambda)$ – группа одномерных гомологий подгруппы G^λ , σ_λ – левоинвариантная 1-форма на подгруппе G^λ , соответствующая функционалу λ : $\sigma_\lambda = L_g^* \lambda$, $g \in G^\lambda$. Подробнее о выводе условия (25) см. работу [9]. Для односвязной группы G условие (25) равносильно условию Кириллова [2] *целочисленности* орбиты $\mathcal{O}_\lambda$:

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \oint_{\gamma \in H_2(\mathcal{O}_\lambda)} \omega_\lambda = n_\gamma \in \mathbb{Z}.$$

Свойства ортогональности и полноты функций $D_{q\bar{q}'}^\lambda(g)$,

$$\int D_{q\bar{q}'}^\lambda(g) \overline{D_{\tilde{q}\bar{\tilde{q}'}}^\lambda(g)} d\mu(g) = \delta(\lambda, \tilde{\lambda})\delta(q, \tilde{q})\delta(q', \tilde{q}'), \quad (26)$$

$$\int D_{q\bar{q}'}^\lambda(g) \overline{D_{\tilde{q}\bar{\tilde{q}'}}^\lambda(\tilde{g})} d\mu(\lambda) d\mu(q) d\mu(q') = \delta(g\tilde{g}^{-1}), \quad (27)$$

позволяют определить прямое и обратное преобразования Фурье:

$$\psi_\lambda(q, \bar{q}') = \int D_{q\bar{q}'}^\lambda(g) \psi(g) d\mu(g), \quad (28)$$

$$\psi(g) = \int \overline{D_{q\bar{q}'}^\lambda(g)} \psi_\lambda(q, \bar{q}') d\mu(\lambda) d\mu(q) d\mu(q'). \quad (29)$$

Ключевым для дальнейших рассуждений является тот факт, что после преобразования (28) действие правоинвариантных и левоинвариантных полей переходит в действие соответствующих операторов λ -представления и наоборот:

$$\begin{aligned} (\psi(g) \iff \psi_\lambda(q, \bar{q}')) &\implies (\eta_X \psi(g) \iff \zeta_X(q, \lambda) \psi_\lambda(q, \bar{q}'), \\ \xi_X \psi(g) &\iff \overline{\zeta_X(q', \lambda)} \psi_\lambda(q, \bar{q}')). \end{aligned}$$

Векторные поля η и ξ зависят от $\dim \mathfrak{g}$ переменных, в то время как число переменных, входящих в операторы $\zeta(q, \lambda)$, равно $(\dim \mathfrak{g} - \text{ind } \mathfrak{g})/2$. Это позволяет применять обобщенный фурье-анализ для редукции дифференциальных операторов, являющихся линейными или полиномиальными комбинациями правоинвариантных и левоинвариантных полей, к операторам с меньшим числом переменных.

Отметим, что классическое преобразование Фурье является частным случаем преобразования (28), соответствующим абелевой группе R^n .

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРУППАХ ЛИ

Применим изложенный выше метод обобщенного фурье-анализа для интегрирования уравнений (13) и (14). Для этого представим неизвестную функцию в виде (29) и умножим правую и левую части этих уравнений на функцию $\overline{D_{q\bar{q}'}^\lambda(g)}$. Используя свойства ортогональности и полноты (26), (27), а также равенства (22), (24), сведем уравнение (13) к следующему интегродифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} H(\partial_t, \zeta(q, \lambda)) \psi_\lambda(t, q, \bar{q}') &= A(\partial_t, \zeta(q, \lambda)) \int_{Q \times Q} \psi_\lambda(t, q, \bar{r}) \psi_\lambda(t, r, \bar{r}') \times \\ &\times \overline{\psi_\lambda(t, q', \bar{r}')} d\mu(r) d\mu(r') + \\ &+ B(\partial_t, \zeta(q, \lambda)) \int_{Q^4} \psi_\lambda(t, q, \bar{r}) \psi_\lambda(t, r, \bar{s}) \psi_\lambda(t, s, \bar{s}') \times \\ &\times \overline{\psi_\lambda(t, r', \bar{s}')} \overline{\psi_\lambda(t, q', \bar{r}')} d\mu(r) d\mu(r') d\mu(s) d\mu(s') + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Уравнение (30) содержит $\dim \mathfrak{g} - \text{ind } \mathfrak{g}$ “пространственных” переменных q, q' вместо $\dim \mathfrak{g}$ изначальных переменных g . Отметим, что такая же ситуация была бы и в случае, если операторы $H, A, B, \dots$ в уравнении (13) содержали бы, кроме правоинвариантных полей η , также и левоинвариантные поля ξ . В случае правоинвариантных и самосопряженных в пространстве $L_2(G, d\mu(g))$ операторов $H, A, B, \dots$ можно провести дальнейшую редукцию.

Рассмотрим подробнее уравнение (14). Соответствующее редуцированное уравнение (30) в этом случае имеет вид

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \tilde{\Delta}_\lambda - m^2 \right) \psi_\lambda(t, q, \bar{q}') = \int_{Q \times Q} \psi_\lambda(t, q, \bar{r}) \psi_\lambda(t, r, \bar{r}') \overline{\psi_\lambda(t, q', \bar{r}')} d\mu(r) d\mu(r'), \quad (31)$$

где $\tilde{\Delta}_\lambda \equiv g^{ab} \zeta_a(q, \lambda) \zeta_b(q, \lambda)$.

Рассмотрим сначала случай, когда группа G компактна. Для компактной группы G представления T^λ конечномерны и, как следствие, спектр оператора $\tilde{\Delta}_\lambda$ также конечен. В силу косоэрмитовости операторов $\zeta_a(q, \lambda)$ в пространстве $L_2(Q, d\mu(q))$ оператор $\tilde{\Delta}_\lambda$ самосопряжен, поэтому существует полный ортонормированный набор его собственных функций $\{\varphi_A(q)\}$ $((\varphi_A, \varphi_B)_Q = \delta_{AB})$:

$$-g^{ab} \zeta_a(q, \lambda) \zeta_b(q, \lambda) \varphi_A(q) = \omega_A^2 \varphi_A(q). \quad (32)$$

Разложим функцию $\psi_\lambda(t, q, \bar{q}')$ по этому набору:

$$\psi_\lambda(t, q, \bar{q}') = \sum_{A,B=1}^{\dim T^\lambda} \Psi_{AB}^\lambda(t) \varphi_A(q) \overline{\varphi_B(q')}. \quad (33)$$

Подставляя разложение (33) в формулу (32), получаем автономную систему из $\dim T^\lambda$ обыкновенных дифференциальных уравнений для матричных элементов матрицы Ψ^λ :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega^2 - m^2 \right) \Psi^\lambda = (\Psi^\lambda)^2 (\Psi^\lambda)^+, \quad (34)$$

где $\omega^2 = \text{diag}(\omega_A^2)$, знак “+” означает операцию эрмитова сопряжения матрицы.

Таким образом, построение общего решения интегродифференциального уравнения (14) сводится к решению линейной задачи на собственные значения (32) и к интегрированию автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (34). Отметим, что задача на собственные значения (32) в силу конечномерности пространства представления является чисто алгебраической.

Рассмотрим теперь случай некомпактной группы. Пусть M_A , $A = 1, \dots, N_\lambda$, — непересекающиеся открытые подмножества многообразия Q , инвариантные относительно инволюции комплексного сопряжения: $\overline{M_A} = M_A$, $M_A \cap M_B = \emptyset$, $A \neq B$. Обозначим через $\theta_A(q)$ характеристические функции множеств M_A :

$$\theta_A(q) = \begin{cases} 1, & q \in M_A, \\ 0, & q \notin M_A, \end{cases} \quad q \in M_A \Leftrightarrow \bar{q} \in M_A,$$

которые обладают очевидными свойствами

$$\overline{\theta_A(q)} = \theta_A(q), \quad \theta_A^2(q) = \theta_A(q), \quad \theta_A(q) \theta_B(q) = 0, \quad A \neq B. \quad (35)$$

Из бесконечного спектра оператора $\tilde{\Delta}_\lambda$ выберем произвольным образом N_λ точек $\{\omega_A\}$ и представим функцию $\psi_\lambda(t, q, \bar{q}')$ в виде

$$\psi_\lambda(t, q, \bar{q}') = \sum_{A,B=1}^{N_\lambda} \Psi_{AB}^\lambda(t) \theta_A(q) \varphi_A(q) \overline{\theta_B(q')} \overline{\varphi_B(q')}. \quad (36)$$

Здесь $\varphi_A(q)$ — собственные функции оператора $\tilde{\Delta}_\lambda$, отвечающие собственному значению ω_A^2 (32), нормированные условием $\int_{M_A} \varphi_A(q) \varphi_A(q) d\mu(q) = 1$. Подставляя

разложение (36) в формулу (31), с учетом нормировки функций φ_A и равенств (35) получаем для матрицы Ψ^λ уравнение (34).

Таким образом, как в компактном, так и в некомпактном случае интегрирование интегродифференциального уравнения (14) сводится к решению линейной задачи на собственные значения (32) и к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (34). Разница в том, что в компактном случае, перебирая все представления, мы получаем все решения, в некомпактном же случае, учитывая произвол в выборе семейства $\{\omega_A^2\}$ точек спектра и подмножеств M_A , получаем бесконечное множество частных решений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Несмотря на то что для каждого фиксированного представления T^λ система (34) конечномерна, иногда “перебрать” все представления даже для компактного случая невозможно. Поэтому в этом случае для построения решений мы выбираем произвольное (может быть, конечное) число представлений и считаем, что интегралы по спектральной мере $\int(\cdot) d\mu(\lambda)$ берутся по выбранным представлениям и являются конечными.

В общем случае представить решение системы (34) в матричном виде не представляется возможным. Однако мы можем предьявить два больших класса решений.

Нетрудно проверить, что матрица $\Psi^\lambda = e^{i\Omega t}U$, где $\Omega = \text{diag}(\Omega_A)$, $\Omega_A = \sqrt{\omega_A^2 + m^2}$, U – произвольная унитарная матрица, является решением системы (34). Для этого решения норма волновой функции не зависит от времени:

$$\|\psi\|^2 = \int_G \overline{\psi(t, g)} \psi(t, g) d\mu(g) = \int N_\lambda d\mu(\lambda)$$

(в компактном случае $N_\lambda = \dim T^\lambda$).

Ко второму классу решений относятся так называемые СРТ-инвариантные решения, где S – операция зарядового сопряжения (для скалярного поля это комплексное сопряжение), P , T – операции пространственного и временного отражения соответственно. Примером СРТ-инвариантного решения является плоская волна $e^{i(\omega t - px)}$, поэтому можно говорить, что СРТ-инвариантные решения являются обобщениями плоских волн.

Естественным обобщением пространственной инверсии на неабелеву группу является следующая инволюция: $P\psi(g) = \psi(g^{-1})$. Таким образом, СРТ-инвариантное решение удовлетворяет условию $\overline{\psi(t, g)} = \psi(-t, g^{-1})$. Для матрицы Ψ^λ в силу унитарности представления (24) это эквивалентно условию $(\Psi^\lambda)^+(t) = \Psi^\lambda(-t)$. Решением задачи (34), удовлетворяющим данному условию, является диагональная матрица

$$\Psi^\lambda(t) = \text{diag}\left(e^{i\Omega_A(\lambda)t} \sqrt{\Omega_A^2(\lambda) - \omega_A^2 - m^2}\right), \quad (37)$$

где Ω_A – произвольные вещественные числа такие, что $\Omega_A^2 - \omega_A^2 - m^2 \geq 0$. Подставляя матрицу (37) в формулу (36) (или (33) в компактном случае), а затем результат в формулу (29), получаем СРТ-инвариантное решение

$$\psi(t, g) = \int_{\hat{G}} \sum_A \sqrt{\Omega_A^2 - \omega_A^2 - m^2} e^{i\Omega_A(\lambda)t} \chi_A^\lambda(g) d\mu(\lambda), \quad (38)$$

где

$$\chi_A^\lambda(g) = \int_{M_A \times M_A} \overline{D_{q\bar{q}'}^\lambda}(g) \varphi_A(q) \overline{\varphi_A(q')} d\mu(q) d\mu(q'). \quad (39)$$

Для компактной группы в формуле (39) следует положить $M_A = Q$. Решение (38) можно обобщить, введя произвольные “фазы” $\alpha_A(\lambda)$:

$$\psi(t, g) = \int_{\hat{G}} \sum_A \sqrt{\Omega_A^2 - \omega_A^2 - m^2} e^{i\Omega_A(\lambda)t} e^{i\alpha_A(\lambda)} \chi_A^\lambda(g) d\mu(\lambda). \quad (40)$$

Функции $\chi_A^\lambda(g)$ обладают следующими важными свойствами:

$$-\Delta_G \chi_A^\lambda(g) = \omega_A^2 \chi_A^\lambda(g), \quad \int \overline{\chi_A^\lambda(g)} \chi_B^\lambda(g) d\mu(g) = \delta(\lambda, \tilde{\lambda}) \delta_{AB}, \quad \overline{\chi_A^\lambda(g)} = \chi_A^\lambda(g^{-1}).$$

В компактном случае $\sum_{A=1}^{\dim T^\lambda} \chi_A^\lambda(g) = \chi^\lambda(g)$ – характер представления T^λ . С учетом этих свойств решение (40) по форме напоминает N -солитонное решение (10). Решение (40) также обладает конечной нормой

$$\|\psi\|^2 = \int_G \overline{\psi(t, g)} \psi(t, g) d\mu(g) = \int \sum_A (\Omega_A^\lambda - \omega_A^2 - m^2) d\mu(\lambda)$$

(интересно сравнить эту формулу с формулой (11)). В разделе 5 мы приведем решение (40) для группы $SO(3)$.

5. УРАВНЕНИЕ НА ГРУППЕ $SO(3)$

Группа вращений трехмерного евклидова пространства $SO(3)$ представляет собой трехмерную вещественную компактную группу Ли. Пусть x^1, x^2, x^3 – канонические координаты второго рода элемента $g \in SO(3)$: $g = e^{x^3 e_3} e^{x^2 e_2} e^{x^1 e_1}$, где e_i – базис алгебры $so(3)$, $x^1, x^3 \in [0; 2\pi)$, $x^2 \in [-\pi/2; \pi/2)$. Они имеют смысл углов вращения вокруг трех взаимно перпендикулярных осей. Выпишем инвариантную меру и правоинвариантные поля в этих координатах:

$$d\mu(g) = \frac{1}{8\pi} \cos x^2 dx^1 dx^2 dx^3, \quad \eta_1 = -\frac{\cos x^3}{\cos x^2} \partial_{x^1} + \sin x^3 \partial_{x^2} - \operatorname{tg} x^2 \cos x^3 \partial_{x^3},$$

$$\eta_2 = -\frac{\sin x^3}{\cos x^2} \partial_{x^1} + \cos x^3 \partial_{x^2} - \operatorname{tg} x^2 \sin x^3 \partial_{x^3}, \quad \eta_3 = -\partial_{x^3}.$$

Каждая целочисленная орбита коприсоединенного представления проходит через ковектор $\lambda = (j, 0, 0)$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Форма Кириллова на целочисленных K -орбитах $\mathcal{O}_\lambda = \{f \in so(3)^* \mid K(f) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = j^2, j = 0, 1, 2, \dots\}$ имеет вид $\omega_\lambda = df_1 \wedge df_2 / f_3$. Выпишем λ -представление, соответствующее поляризации $\{e_1, e_2 + ie_3\}$ (полагаем $\hbar = 1$):

$$\zeta_1 = -i \sin q \partial_q + ij \cos q, \quad \zeta_2 = -i \cos q \partial_q - ij \sin q, \quad \zeta_3 = \partial_q.$$

Здесь $q = \alpha + i\beta$, $\alpha \in [0; 2\pi)$, $\beta \in (-\infty; \infty)$. Операторы ζ_i косоэрмитовы относительно меры

$$d\mu_j(q) = \frac{(2j+1)!! d\alpha d\beta}{\pi 2^{j+2} j! (\operatorname{ch} \beta)^{2j+2}}.$$

Спектральная мера оператора Казимира $K(i\eta)$ дается выражением

$$\int (\cdot) d\mu(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} (\cdot) (2j+1).$$

“Матричные элементы” представления T^λ имеют вид

$$\begin{aligned} D_{q\bar{q}'}^j(g) &= e^{x^3\zeta_3(q,j)} e^{x^2\zeta_2(q,j)} e^{x^1\zeta_1(q,j)} \delta(q, \bar{q}') = \\ &= \frac{2^j(j!)^2}{(2j)!} [(\cos x^1 \cos \bar{q}' + i \sin x^1) \cos(q + x^3) + \\ &\quad + (\sin x^1 \sin x^2 \cos \bar{q}' - \cos x^2 \sin \bar{q}' - i \cos x^1 \sin x^2) \sin(q + x^3) + \\ &\quad + i \sin x^2 \sin \bar{q}' + \cos x^1 \cos x^2 + i \sin x^1 \cos x^2 \cos \bar{q}']^j. \end{aligned} \quad (41)$$

Рассмотрим уравнение (14) на группе $SO(3)$. В качестве оператора $\Delta_{SO(3)}$ выберем “возмущенный” оператор Казимира

$$\Delta_{SO(3)} = K(\eta) + \varepsilon \eta_3^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + (1 + \varepsilon) \eta_3^2, \quad \varepsilon > 0.$$

После редукции он переходит в оператор

$$\tilde{\Delta}_\lambda = K(\zeta(q, j)) + \varepsilon \zeta_3(q, j)^2 = -j(j+1) + \varepsilon \partial_q^2.$$

Нормированные собственные функции оператора $-\tilde{\Delta}_\lambda$, соответствующие собственным значениям $\omega_A^2 = \varepsilon A^2 + j(j+1)$, равны

$$\varphi_A(q) = \frac{j! e^{iAq}}{\sqrt{(j+A)!(j-A)!}}, \quad A = -j, -j+1, \dots, j.$$

Найдем функции $\chi_A^\lambda(g)$. Используя определение (39) и равенство (41), получаем

$$\begin{aligned} \chi_A^j(g) &= \int \varphi_A(q) \overline{\varphi_A(q')} e^{x^3\zeta_3(q,j)} e^{x^2\zeta_2(q,j)} e^{x^1\zeta_1(q,j)} \overline{\delta(q, \bar{q}')} d\mu_j(q) d\mu_j(q') = \\ &= e^{-iAx^3} \int \overline{e^{x^1\zeta_1(q,j)} \varphi_A(q)} e^{-x^2\zeta_2(q,j)} \varphi_A(q) d\mu_j(q) = \\ &= \frac{j!^2 e^{-iAx^3}}{(j+A)!(j-A)!} \int (\cos x^1 \cos \bar{q} - i(\sin x^1 + \sin \bar{q}))^A \times \\ &\quad \times (\cos x^1 - i \sin x^1 \cos \bar{q})^{j-A} \times \\ &\quad \times (\cos q - \sin x^2 + i \cos x^2 \sin q)^A (\cos x^2 + i \sin x^2 \sin q)^{j-A} d\mu_j(q). \end{aligned}$$

Построим СРТ-инвариантное решение (40) для простейшего случая $\Omega_A^2(j) = \omega_A(j)^2 + m^2$, где параметр j принимает два значения $j = 0$ и $j = 1$:

$$\begin{aligned} \psi(t, g) &= \sqrt{\Omega^2 - m^2} e^{i\Omega t} \chi_0^0(g) + 3 \sum_{A=-1}^1 \sqrt{\Omega_A^2 - \varepsilon A^2 - 2 - m^2} e^{i\Omega_A t} \chi_A^1(g) = \\ &= \sqrt{\Omega^2 - m^2} e^{i\Omega t} + \frac{3}{2} \left(\sqrt{\Omega_{-1}^2 - \varepsilon - 2 - m^2} e^{i(\Omega_{-1}t + x^3)} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (\cos x^1 + \cos x^2 - i \sin x^1 \sin x^2) + \\
& + 2\sqrt{\Omega_0^2 - 2 - m^2 e^{i\Omega_0 t} \cos x^1 \cos x^2} + \\
& + \sqrt{\Omega_1^2 - \varepsilon - 2 - m^2 e^{i(\Omega_1 t - x^3)} (\cos x^1 + \cos x^2 + i \sin x^1 \sin x^2)} \Big).
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения $\Omega = \Omega_0(0)$, $\Omega_A = \Omega_A(1)$. Заметим, что первое и третье слагаемые в скобках представляют собой “волновые решения”, т.е. решения, удовлетворяющие условию $\psi(t+a, g) = \psi(t, h^{-1}(a)g)$ с $h(a) = e^{a\Omega_{\pm 1}e_3}$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Можно показать, что уравнение (4), как и классические нелинейные уравнения, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния, представляет собой бесконечномерную гамильтонову систему, а преобразование Фурье играет для него роль перехода к переменным типа действие–угол. Интегрируемость уравнения (4) обеспечивается наличием у него бесконечнопараметрической группы симметрий. В связи с этим представляет интерес исследование симметрий уравнений более общего вида (13).

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [2] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1978.
- [3] И. В. Широков, *K-орбиты, гармонический анализ на однородных пространствах и интегрирование дифференциальных уравнений*, ОмГУ, Омск, 1998.
- [4] А. В. Шаповалов, И. В. Широков, *ТМФ*, **104**:2 (1995), 195–213.
- [5] С. П. Барановский, В. В. Михеев, И. В. Широков, *ТМФ*, **129**:1 (2001), 3–13.
- [6] В. В. Белов, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов, *ТМФ*, **130**:3 (2002), 460–492.
- [7] Й. Брюнинг, С. Ю. Доброхотов, Р. В. Некрасов, А. И. Шафаревич, *ТМФ*, **155**:2 (2008), 215–235.
- [8] Ж. Диксмье, *Универсальные обертывающие алгебры*, Мир, М., 1978.
- [9] И. В. Широков, *ТМФ*, **123**:3 (2000), 407–423.

Поступила в редакцию 1.03.2009