Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Брежнев, О τ -функциональном решении шестого трансцендента Пенлеве, *ТМФ*, 2009, том 161, номер 3, 346–366

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6446>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:32:02

© 2009 г.

Ю. В. Брежнев*

О τ -ФУНКЦИОНАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ШЕСТОГО ТРАНСЦЕНДЕНТА ПЕНЛЕВЕ

Общее решение шестого трансцендента Пенлеве $\mathcal{P}_6$ в классе Пикара–Хитчина–Окамото представлено и проанализировано в форме Пенлеве: в виде логарифмической производной отношения τ -функций. Функции явно выражены через эллиптические интегралы Лежандра и тета-функции Якоби, для которых выписаны общие правила дифференцирования. Установлена также связь уравнения $\mathcal{P}_6$ с униформизацией алгебраических кривых и приведены примеры.

Ключевые слова: шестое уравнение Пенлеве, эллиптическая функция, тета-функция, униформизация, автоморфная функция.

1. ВВЕДЕНИЕ

Шестой трансцендент Пенлеве $\mathcal{P}_6$

$$y_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) y_x^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) y_x + \\ + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left(\alpha - \beta \frac{x}{y^2} + \gamma \frac{x-1}{(y-1)^2} - \left(\delta - \frac{1}{2} \right) \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right) \quad (1)$$

впервые появился в работе Фукса [1], а его современные приложения (наиболее нетривиальные – в космологии) хорошо известны [2]–[4]. В своей работе Фукс уже использовал эллиптический интеграл, а через год после него Пенлеве [5], тоже применяя эллиптические функции, придал уравнению замечательный вид

$$-\frac{\pi^2}{4} \frac{d^2 z}{d\tau^2} = \alpha \wp'(z|\tau) + \beta \wp'(z-1|\tau) + \gamma \wp'(z-\tau|\tau) + \delta \wp'(z-1-\tau|\tau), \quad (2)$$

сделав следующую трансцендентную замену переменных $(y, x) \mapsto (z, \tau)$:

$$x = \frac{\vartheta_4^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)}, \quad y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{\vartheta_4^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)} - \frac{4}{\pi^2} \frac{\wp(z|\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)} \quad (3)$$

(это эквивалент оригинальных формул Пенлеве; см. далее соотношения (4)). Всюду в работе $\wp(z|\tau) := \wp(z|1, \tau)$, т.е. ζ , $\wp$, $\wp'$ и другие функции Вейерштрасса [6]–[8]

*Томский государственный университет, Томск, Россия. E-mail: brezhnev@mail.ru

строятся по полупериодам $(\omega, \omega') = (1, \tau)$, а тета-константы Якоби $\vartheta(\tau)$ зависят от модуля τ , принадлежащего верхней полуплоскости $\mathbb{H}^+$, т.е. $\text{Im } \tau > 0$ (см. приложение).

Этот результат Пенлеве, известный как $\wp$ -форма уравнения $\mathcal{P}_6$, был переоткрыт и расширен в 90-х годах в рамках других подходов, а глубокая связь уравнения (1) с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка из класса Фукса широко известна. Переход от таких уравнений к представлению Пенлеве (2) хорошо и неформально изложен в недавнем обзоре [9]. Там же можно найти ссылки на дополнительную литературу.

Интерес к общему уравнению Пенлеве (1) сильно возрос после того, как в 1994 г. Тод показал [3], что наложение требования $SU(2)$ -симметрии на метрику (знаменитая модель Бианки-IX, часто именуемая как космологическая) и предположение о ее конформности совместны с уравнениями самодуальности Эйнштейна–Вейля $R_{ab} = \frac{1}{2} \Lambda g_{ab}$ и $W_{abcd} = 0$. В свою очередь, они, будучи уравнениями в частных производных, редуцируются к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно конформного фактора, который выражается через решение уравнения $\mathcal{P}_6$ при частных значениях параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (см. п. 2.1). Позднее в работе [10] уравнение (1), но уже с произвольными параметрами, было получено как автомодельная редукция уравнений для потенциала Эрнста в общей теории относительности. Это не единственный пример возникновения уравнения (1) в приложениях: достаточно упомянуть уравнения Янга–Милса, двумерные топологические теории поля и пр. Случай общего положения уравнения (1) выводится в работе [11] тоже как автомодельная редукция, (см. также ссылки в этой работе и в [10]).

1.1. О подстановке Пенлеве. Уравнение (1) и подстановка (3) отражают свойства не только самого уравнения, но и его решений. Если уравнение имеет второй порядок, линейно по y_{xx} , рационально по y_x , а его решения имеют только неподвижные точки ветвления (свойство Пенлеве), тогда, как известно, число таких точек сводимо к трем. Их всегда можно поместить в $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \infty$, при этом уравнение будет иметь вид уравнения Фукса–Пенлеве (1), либо представлять собой некоторый его предельный случай [5]. В свою очередь, плоскость переменной x можно конформно и взаимно однозначно отобразить на фундаментальный четырехугольник модулярной группы $\Gamma(2)$ [7] в плоскости новой переменной τ с помощью модулярной функции $x = (k'(\tau))^2$, т.е. первой формулы в (3). Поскольку функция $(k'(\tau))^2$ в прообразах точек x_j ведет себя экспоненциально по локальному параметру τ , ветвление $y = y(x)$ произвольного степенного или логарифмического характера в окрестности точки x_j перейдет в локально однозначную зависимость по переменной τ [12]. В этом мы видим частичное объяснение¹⁾ происхождения подстановки (3). Фукс получил ее [1], используя уравнение Лежандра, а Пенлеве – модулярную функцию [5]. Сам Пенлеве выписывал уравнение не в форме (2),

¹⁾ Частичное, потому что общее и точное утверждение о ветвлении решений уравнения $\mathcal{P}_6$ в литературе, по всей видимости, еще не приведено. Например, неизвестно, является ли оно (как максимум) локальным ветвлением типа рациональной функции от $x^\alpha \ln^n x$ (см. важную работу [13], посвященную именно этим вопросам, где эквивалент уравнения (2) – фуксово уравнение (5) – есть основной предмет исследования).

а через модулярную функцию $x = \varphi(\xi)$ с тремя особыми точками $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \infty$, возникающую при обращении эллиптического интеграла

$$z = \frac{1}{\omega_1} \int_{\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \xi, \quad y = f(z, \xi). \quad (4)$$

В его записи $\wp$ -форма уравнения $\mathcal{P}_6$ имела вид

$$z''_{\xi^2} = \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\varphi-1)} \left[\alpha f'(z, \xi) - \beta f'(z+1, \xi) + \gamma f'(z+\xi, \xi) + \left(\frac{1}{2} - \delta \right) f'(z+1+\xi, \xi) \right],$$

(см. работу [5], где следует исправить опечатку и заменить η на z). Уравнение (1) в форме, которую Фукс называет замечательной, имеет вид “неоднородного” дифференциального уравнения Лежандра

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)} \frac{du}{dt} + \frac{u}{4t(t-1)} = \\ = \frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}{2t^2(t-1)^2} \left[k_{\infty} - k_0 \frac{t}{\lambda^2} + k_1 \frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - k_t \frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $u = \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}$, а $\lambda = \lambda(t)$ есть решение уравнения $\mathcal{P}_6$.

1.2. Мотивировки и содержание работы. Прочие особые точки решений подвижны, но являются полюсами, и поэтому глобальное поведение решений полностью определяется логарифмическими производными от “целых” функций [5], [14]. Построение таких трансцендентных функций, как это подчеркивалось самим Пенлеве, завершает процедуру интегрирования уравнения (в его терминологии – концепция “*intégration parfaite*”). Для всех уравнений Пенлеве характер полюсов известен [14], [15], а их решения, кроме решений уравнения $\mathcal{P}_1$, имеют структуру [5]

$$y \sim \frac{d}{dx} \operatorname{Ln} \frac{\tau_2}{\tau_1} \quad (6)$$

(в случае общего положения) с функциями $\tau_{1,2}(x)$, не имеющими подвижных особенностей. Полный список таких формул см. в работах [14] и [16].

Если не принимать во внимание известные автоморфизмы решений уравнения $\mathcal{P}_6$ в пространстве параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (см., например, статью Громака в сборнике [14], работу [17], монографии [15], [18] и ссылки в них), то известно лишь два случая, когда для уравнения (1) можно выписать его общий интеграл. Это решения Пикара [19] и Хитчина (см. п. 2.1 настоящей работы), но ни для одного из этих случаев форма Пенлеве (6) не известна.

С другой стороны, представление решений через соответствующие аналоги τ -функций присутствуют почти во всех исследованиях нелинейных уравнений, так или иначе связанных с интегрируемостью: в методе Хироты, теории изомонодромных деформаций [17], теории солитонов и ее Θ -функциональных обобщениях. В этой

связи представляет интерес показать, что и для уравнений Пенлеве возможна нетривиальная ситуация, когда функции $\tau_{1,2}(x)$ выписываются явно при общем интеграле. В настоящей работе мы восполняем этот пробел (см. п. 2.2 и п. 4.2, 4.3), описывая дополнительно распределение сингулярностей решения (раздел 3). С технической точки зрения для этого необходимы специальные дифференциальные свойства тета-функций и констант Якоби. Они тоже являются новым результатом и приведены в приложении. Как станет видно из решения, и это справедливо было отмечено авторами работы [17], характер τ -функций Пенлеве существенно отличается от того, как устроены Θ -функциональные решения солитонных уравнений. Тем не менее определенный вариант прямолинейного сечения многообразия имеет место (см. раздел 4). В разделе 5 мы демонстрируем связь уравнения $\mathcal{P}_6$ с униформизацией нетривиальных алгебраических кривых. К сказанному в п. 1.1 (см. также сборник [14]) добавим, что о представлении решений однозначными функциями в контексте свойства Пенлеве совершенно определенно писал и сам Пенлеве [20], и повсюду в работе [19] упоминает Пикар. Поэтому указываемая далее связь с униформизацией и наличие обширного количества примеров (см. п. 5.2) не случайны.

2. ФОРМА ПЕНЛЕВЕ

2.1. Решение Хитчина. Этот случай соответствует параметрам

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{8}, \quad (7)$$

которые были найдены в работе [4] при условии, что метрика уравнений Эйнштейна конформна с $SU(2)$ -инвариантным антисамодуальным тензором Вейля [3]. Уравнение (2) в этом случае легко приводится к эквивалентному виду, записанному в тета-функциях,

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = 4\pi \eta^9(\tau) \frac{\theta_1(2z|\tau)}{\theta_1^4(z|\tau)}, \quad (8)$$

где η обозначает функцию Дедекинда:

$$\eta(\tau) = e^{\pi i \tau / 12} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{2k\pi i \tau}).$$

Общее решение уравнения (8) в параметрической форме (3) имеет вид [4]

$$\wp(z|\tau) = \wp(A\tau + B|\tau) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(A\tau + B|\tau)}{\zeta(A\tau + B|\tau) - A\eta'(\tau) - B\eta(\tau)}, \quad (9)$$

где A, B – константы интегрирования. В другой, опосредованной, форме это решение отмечал Окамото [21].

Решение (9) является не только самым нетривиальным из известных в настоящее время, но и, поскольку доставляет общий интеграл, весьма показательно для уравнения (1) вообще. Оно подробно рассматривалось в литературе и безусловно является чем-то большим чем “просто решение”. Решение Пикара в этом отношении

вырожденно, так как представляет собой полный квадрат (см. п. 4.1). Этими фактами объясняется выбор решения Хитчина для дальнейшего анализа. Известны и другие частные случаи, для которых имеются разновидности $(\partial_x \text{Ln})$ -формы Пенлеве, хотя и не содержащие функций τ . Но эти решения, допуская больший произвол в параметрах $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, содержат только одну константу интегрирования и связаны с линейным гипергеометрическим ${}_2F_1$ -уравнением [14], [15], [18], [21].

2.2. Форма Пенлеве. Одна из тета-функциональных версий решения (9) была предложена в работе [4] и, в другом виде, в работе [17]. Однако сложность этих форм решения отмечалась как в самой работе [4], так и в работе [17], а также в статье [2], целиком состоящей из вычислений. В этих работах решения тоже параметричны и содержат набор функций $\theta, \theta', \theta'', \theta''', \vartheta, \vartheta', \vartheta'''$, хотя компактная форма решения получается, если перевести функции Вейерштрасса (9) в тета-функции (ср. с работой [12]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Общее решение уравнения (1) с параметрами (7) имеет вид*

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\theta_1^2} \left\{ \frac{\pi \vartheta_2^2 \theta_2 \theta_3 \theta_4}{\theta_1' + \pi i A \theta_1} - \theta_2^2 \right\}, \quad \theta = \theta \left(\frac{1}{2} A \tau + \frac{1}{2} B \middle| \tau \right), \quad (10)$$

где $\vartheta = \vartheta(\tau)$.

Возможность придать решению (10) явный вид (6) связана с весьма неочевидными свойствами тета-функций, например с тождеством, следующим из леммы 3, приведенной в приложении:

$$\frac{\pi}{2i} \frac{d}{d\tau} \text{Ln} \{ \zeta(z|\tau) - z\eta(\tau) \} = \wp(z|\tau) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(z|\tau)}{\zeta(z|\tau) - z\eta(\tau)} + \eta(\tau).$$

Сопоставляя данное тождество с (9), получаем полную логарифмическую производную:

$$\wp(z|\tau) = \frac{\pi}{2i} \frac{d}{d\tau} \text{Ln} \frac{\zeta(A\tau + B|\tau) - A\eta'(\tau) - B\eta(\tau)}{\eta^2(\tau)}. \quad (11)$$

Заменяя A, B на $2A, 2B$ и переводя правую часть (11) в тета-функции (см. лемму 1 приложения), решение можно записать в виде

$$y = \frac{2i}{\pi} \frac{1}{\vartheta_3^4(\tau)} \frac{d}{d\tau} \text{Ln} \frac{\theta_1'(A\tau + B|\tau) + 2\pi i A \theta_1(A\tau + B|\tau)}{\vartheta_2^2(\tau) \theta_1(A\tau + B|\tau)}, \quad x = \frac{\vartheta_4^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)}. \quad (12)$$

Чтобы переписать решение в исходных переменных x, y , необходимо воспользоваться формулами, обращающими подстановку (3) и ее дифференциал. Они записываются через полные эллиптические интегралы K, K' [6], [22]. Нетрудно показать, что этот переход вместе с дифференцированием определяется формулами

$$\frac{d}{d\tau} = \pi i x(x-1) \vartheta_3^4(\tau) \frac{d}{dx}, \quad \vartheta_2^2(\tau) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x} K'(\sqrt{x}), \quad (13)$$

а обращение первой формулы в (3) дается следующим выражением (рядом):

$$\begin{aligned} e^{\pi i \tau} &= \exp \left\{ -\pi \frac{K(\sqrt{x})}{K'(\sqrt{x})} \right\} = \\ &= \left(\frac{1-x}{16} \right) + 8 \left(\frac{1-x}{16} \right)^2 + 84 \left(\frac{1-x}{16} \right)^3 + \\ &\quad + 992 \left(\frac{1-x}{16} \right)^4 + 12514 \left(\frac{1-x}{16} \right)^5 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Упростив получившиеся выражения и заменяя iA на A , приходим к искомой форме решения.

ТЕОРЕМА. *Общий интеграл уравнения (1) с параметрами (7) имеет вид*

$$y = 2x(1-x) \frac{d}{dx} \operatorname{Ln} \frac{\theta'_1 \left(A \frac{K}{K'} + B \left| \frac{iK}{K'} \right. \right) + 2\pi A \theta_1 \left(A \frac{K}{K'} + B \left| \frac{iK}{K'} \right. \right)}{\sqrt{1-x} K' \theta_1 \left(A \frac{K}{K'} + B \left| \frac{iK}{K'} \right. \right)}. \quad (15)$$

Здесь и в некоторых последующих формулах мы используем краткие обозначения $K = K(\sqrt{x})$, $K' = K'(\sqrt{x})$.

Величины K , K' можно записать через гипергеометрические функции [6], [7]:

$$K(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} \cdot {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1 \middle| x \right), \quad K'(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} \cdot {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1 \middle| 1-x \right),$$

хотя одновременное использование этих рядов возможно только в пересечении областей сходимости. Поэтому в прикладных вопросах, чтобы избежать использования многочисленных преобразований для аналитических продолжений ${}_2F_1$ -рядов, функции K , K' лучше рассматривать как полные голоморфные эллиптические интегралы,

$$K(\sqrt{x}) = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-x\lambda^2)}}, \quad K'(\sqrt{x}) = \int_x^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-x)(1-\lambda^2)}}$$

(всюду конечные функции), или как функции Лежандра $P_{1/2}$, $Q_{-1/2}$ [22].

Проверка прямой подстановкой (15) в (1) является достаточно нетривиальным упражнением, при этом необходимо использовать лемму 1 и ее простые следствия. Следует также учесть известные правила дифференцирования полных эллиптических интегралов [6]. Обозначим аналогично $E := E(\sqrt{x})$ и $E' := E'(\sqrt{x})$. Тогда эти правила запишутся как

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dx} K &= \frac{E}{x(1-x)} - \frac{K}{x}, & 2 \frac{d}{dx} K' &= \frac{E'}{x(x-1)} - \frac{K'}{x-1}, \\ 2 \frac{d}{dx} E &= \frac{E}{x} - \frac{K}{x}, & 2 \frac{d}{dx} E' &= \frac{E'}{x-1} - \frac{K'}{x-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

а их следствием будет соотношение Лежандра

$$\eta' = \tau\eta - \frac{\pi}{2}i \Leftrightarrow EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

Если говорить точнее, то в (15) следует также сократить общий “не целый” множитель $e^{\pi i \tau/4}$, присутствующий в рядах для θ_1 и θ'_1 (см. приложение). Он, впрочем, является “неподвижным”, как и немероморфная особенность решения, определяемая множителем $K'(\sqrt{x})$. Из соотношений (15) и (16) нетрудно увидеть, что решение содержит аддитивный член, имеющий неподвижную критическую особенность логарифмического типа.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Функция $y(x)$ и решение $z(\tau)$ уравнения (8) имеют вид*

$$y = \frac{E'}{K'} + 2x(1-x) \frac{d}{dx} \operatorname{Ln} \left\{ \frac{\theta'_1}{\theta_1} \left(A \frac{K}{K'} + B \left| \frac{iK}{K'} \right| \right) + 2\pi A \right\}, \quad (17)$$

$$z = \wp^{-1} \left(\frac{\pi}{2i} \frac{d}{d\tau} \operatorname{Ln} \left\{ \frac{\theta'_1(A\tau + B|\tau)}{\theta_1(A\tau + B|\tau)} + 2\pi i A \right\} - \eta(\tau) \right) \tau, \quad (18)$$

где эллиптический интеграл $\wp^{-1}$ здесь и далее определен как

$$\wp^{-1}(u|\tau) := \int_{\infty}^u \frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 - g_2(\tau)\lambda - g_3(\tau)}}.$$

Чтобы более отчетливо отследить мероморфную составляющую решения по x (подвижные полюсы), в формулы (15), (17) и ряды для тета-функций из приложения следует подставить разложения типа (14). Аналогичные ряды выводил еще Вейерштрасс в связи с решением модулярной задачи обращения для функции $k^2(\tau)$ [8], [22]. Явные разложения в окрестностях любых других точек выписываются на основании формул приложения. Сами же формулы (12), (15), (17) дают аналитический ответ для степенных разложений из работы [4].

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЮСОВ

Одна из двух серий полюсов x_{mn} решения (15) допускает явную параметризацию:

$$\theta_1 \left(A \frac{K(\sqrt{x})}{K'(\sqrt{x})} + B \left| \frac{iK(\sqrt{x})}{K'(\sqrt{x})} \right| \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{mn} = \frac{\vartheta_4^4}{\vartheta_3^4} \left(\frac{m-B}{n+A} \right), \quad (19)$$

где $n, m \in \mathbb{Z}$. К этому необходимо добавить естественное ограничение на n, m вида $\operatorname{Im} \left(\frac{m-B}{n+A} \right) > 0$, которое не влечет ограничений на A и B , кроме запрета для этих чисел быть одновременно вещественными. Хотя это распределение полюсов описывается простой формулой (19), выглядит оно достаточно замысловато (см. рис. 1).

Общее и характерное поведение “ортогональных” направляющих параметризации $n = \text{const}$ и $m = \text{const}$, т.е. строение рис. 1 в целом, дополнительно показано на рис. 2. То, что изображено на этом рисунке, можно воспринимать как аналог, хотя и отдаленный, двух прямолинейных орбит полюса любой двоякопериодической функции. Распределения полюсов деформируются при изменении начальных данных A, B , порождая разнообразные картины, но все они, как и должно быть, имеют накопления полюсов в неподвижных особенностях $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \infty$. Отсюда же следует и характер этой деформации. Если взять один из полюсов $p = x_{mn}$,

Рис. 1. Полюсы x_{mn} вида (19) решений (15), (22) при $A = 125.45 - 103.29i$, $B = 36.710 - 69.980i$ и $(n, m) = -30, \dots, 70$.

Рис. 2. Две пары направляющих $n = (12, 13)$ и $m = (129, 130)$ распределений полюсов (19) при $A = -195.45 + 103.29i$, $B = -6.710 + 79.98i$. “Случайные” точки в нижней полуплоскости тоже являются “нормальными” полюсами.

зафиксировав m, n , то получим, что в пространстве начальных данных A, B он движется без изменения вдоль прямолинейных характеристик $(n + A)t - (m - B) = 0$. Сама же динамика $p = p(t)$ для любого из полюсов серии (19) дается одной и той же функцией $p(t) = \vartheta_4^4(t)/\vartheta_3^4(t)$, но с временами t_k , отличающимися для каждого полюса $p_k = p(t_k)$ на дробно-линейное преобразование. Функция $p(t)$ и строение фундаментальной области группы ее автоморфизмов хорошо изучены. Нетрудно также описать вещественные или чисто комплексные полюсы.

Далее, мы можем заметить, что преобразование Окамото [15], [17]

$$\begin{aligned} \text{Picard}_y &\mapsto \text{Hitchin}_{\tilde{y}}: & \tilde{y} &= y + \frac{y(y-1)(y-x)}{x(x-1)y_x - y^2 + y}, \\ \text{Hitchin}_y &\mapsto \text{Picard}_{\tilde{y}}: & \tilde{y} &= y - \frac{y(y-1)(y-x)}{x(x-1)y_x + y^2/2 - xy + x/2}, \end{aligned} \quad (20)$$

переводящее, как известно, решения Пикара и Хитчина друг в друга, оставляет инвариантной полюсы (19), но добавляет или, при обратном преобразовании, уничтожает вторую серию полюсов, определяемую корнями уравнения

$$\zeta(A\tau + B|\tau) = A\zeta(\tau|\tau) + B\zeta(1|\tau).$$

Решение этого уравнения эквивалентно нахождению A -точек трансцендентной функции

$$f(x; A, B) = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta'_1\left(A \frac{K}{K'} - B \middle| \frac{iK}{K'}\right)}{\theta_1\left(A \frac{K}{K'} - B \middle| \frac{iK}{K'}\right)}, \quad (21)$$

т.е. решению уравнения $f(x; A, B) = A$. Серия полюсов, определяющаяся соотношением (21), описывается и эволюционирует намного сложнее серии (19).

4. τ -ФУНКЦИИ

4.1. О решении Пикара. Серия полюсов (19) исчерпывает все полюсы решения уравнения (1) и в случае Пикара $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Из (2) тогда следует, что $z = a\tau + b$. Записывая соотношение (3) через тета-функции, получаем другую форму самой подстановки (3) и эквивалент решения Пикара из [19]:

$$y = -\frac{\vartheta_4^2(\tau) \theta_2^2\left(\frac{z}{2}|\tau\right)}{\vartheta_3^2(\tau) \theta_1^2\left(\frac{z}{2}|\tau\right)} \Rightarrow y_{\text{Pic}} = -\sqrt{x} \frac{\theta_2^2\left(A \frac{K}{K'} + B \middle| \frac{iK}{K'}\right)}{\theta_1^2\left(A \frac{K}{K'} + B \middle| \frac{iK}{K'}\right)}. \quad (22)$$

В связи с этим решением сделаем отступление. Строго говоря, оригинальное решение Пикара u_{Pic} [19] и представление Фукса–Пенлеве уравнения (1) не идентичны, но связаны обратимым преобразованием. Пикар строил пример уравнения, используя форму Лежандра $\Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, а Пенлеве – форму Римана (4). Поэтому переход между решениями этих уравнений дается формулой

$$u_{\text{Pic}}\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \frac{\sqrt{e-\wp}}{\pi \vartheta_3^2} = \sqrt{y_{\text{Pic}}(x)}. \quad (23)$$

Иными словами, имеет место следующее свойство. Параметры $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ – это такой (не единственный) случай уравнения Пенлеве (1), что квадратный корень из любого его решения удовлетворяет уравнению, также обладающему свойством Пенлеве, – уравнению Пикара [19]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} - \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{u(2xu^2 - 1 - x)}{(1-u^2)(1-xu^2)} + \\ + \frac{du}{dx} \left[\frac{u^2 - 1}{(1-x)(1-xu^2)} + \frac{1}{x} \right] - \frac{u(1-u^2)}{x(1-x)(1-xu^2)} = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где к последнему слагаемому следует приписать упущенный множитель $1/4$. Это уравнение в почти двухсотстраничном трактате Пикара [19] появляется в конце как любопытное дифференциальное уравнение (*équation différentielle curieuse*), которому

удовлетворяет функция $u = \operatorname{sn}(a\omega + b\omega')$, рассматриваемая как функция от эллиптического модуля $k^2 = x$.

По этой причине анзац для изучения ветвлений решений уравнения (1)

$$y(x) = \wp(\nu_1\omega_1(x) + \nu_2\omega_2(x) + v(x; \nu_1, \nu_2); \omega_1(x), \omega_2(x)) + \frac{1+x}{3},$$

принятый в работе [13], содержит в некотором смысле “избыточный” полный квадрат, и его удобнее заменить на структуру типа Хитчина (15) с последующим упрощением анализа.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полными квадратами, помимо решения Пикара, являются и все его преобразования, происходящие от дискретных симметрий уравнения (1) [15], например от преобразования

$$y \mapsto \tilde{y} = \frac{y-x}{y-1} = \frac{\vartheta_4^2(\tau)}{\vartheta_3^2(\tau)} \frac{\theta_3^2(A\tau + B|\tau)}{\theta_4^2(A\tau + B|\tau)}.$$

Добавляя сюда модулярные подстановки из группы $\Gamma(1)$ и ангармоническую группу S_3 , преобразующую x [6], получаем полный набор преобразований из работы [15] и замены параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (они также приведены в [15]). Вместе с преобразованиями Окамото все полученные выше и далее в тета-функциях и τ -функциях формулы сведутся к перестановкам индексов у функций $\vartheta, \theta, \theta'$ в формулах (10), (15), (17), (18). Поэтому под решениями Пикара–Хитчина мы будем подразумевать весь этот класс, не оговаривая в дальнейшем этого особо.

Решения Пикара–Хитчина суть функции от $\sqrt{x}$. С другой стороны, сама величина $\sqrt{x} = s$ через интегралы $K(\sqrt{x}), K'(\sqrt{x})$ и подстановку (3) связана с линейным дифференциальным уравнением Фукса второго порядка. Это будет уравнение с четырьмя особенностями в точках $s = 0, 1, -1, \infty$, поскольку интегралы $K(x), K'(x)$ удовлетворяют уравнению Лежандра с тремя особенностями $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \infty$. Следовательно, мы приходим к частному случаю уравнения Гойна:

$$Y_{ss} = -\frac{1}{2} \frac{(s^2 + 1)^2}{s^2(s^2 - 1)^2} Y \quad \Rightarrow \quad \frac{Y_2}{Y_1} = i \frac{K(s)}{K'(s)} = \tau. \quad (25)$$

Таким образом, характер квадратуры (15) описывается следующим утверждением.

СЛЕДСТВИЕ 2. Уравнение Пенлеве (1) в случаях Пикара и Хитчина являются интегрируемыми в (θ', θ) -функциональных квадратурах над дифференциальным полем, определяемым функциями Гойна вида (25) или, эквивалентно, гипергеометрическими функциями Лежандра.

4.2. Однопараметрические решения. Обратим внимание на то, что из формулы (9) и тем более из первой формулы в (22) не следует с очевидностью, что полюсы второго порядка из серии Пикара становятся полюсами первого порядка для (17). Сопоставляя аналогично (3), (9) и (22), получаем, что первая формула в (22) не дает поведения решения в случаях, предельных по параметрам A и B , в то время как из формулы (17) это следует автоматически. Будем, например, считать,

что в (17) и (18) $A\tau + B \rightarrow 0$ при $B/A = \alpha$. Тогда, учтя (14) и (16), сразу получаем α -параметрическое семейство решений:

$$y = \frac{\alpha E' - E + K}{\alpha K' + K} \Leftrightarrow z = \wp^{-1} \left(\frac{\pi i}{2} \frac{d}{d\tau} \operatorname{Ln} \{(\tau + \alpha) \boldsymbol{\eta}^2(\tau)\} \Big| \tau \right) = \\ = \wp^{-1} \left(\frac{1}{2} \frac{\pi i}{\tau + \alpha} - \eta(\tau) \Big| \tau \right),$$

что полезно сравнить с соответствующей формулой Хитчина в работе [4].

Другой случай выглядит несколько сложнее и рассматривался Хитчиным только в виде разложений, к тому же он приводит к сингулярной конформной структуре. Этот случай удобнее анализировать в форме (11), где он соответствует пределам $A\tau + B \rightarrow \{1, \tau, \tau + 1\}$. Полагая $A\tau + B = \varepsilon \tau + (1 + \varepsilon \alpha)$ и устремляя ε к нулю, получаем решение, для которого мы сохраним (в качестве одного из вариантов) τ -форму (6):

$$\wp(z|\tau) = \frac{\pi}{2i} \frac{d}{d\tau} \operatorname{Ln} \frac{2(\tau + \alpha) \dot{\vartheta}_2 + \vartheta_2}{\boldsymbol{\eta}^2 \vartheta_2} = \\ = \frac{\pi^2 (\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4) (\eta' + \alpha \eta) + (\tau + \alpha) (g_2 - \pi^4 \vartheta_3^4 \vartheta_4^4 / 2)}{\pi^2 (\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4) (\tau + \alpha) + 12 (\eta' + \alpha \eta)}. \quad (26)$$

Здесь и всюду далее точкой над символом мы обозначаем производную по τ и для краткости опускаем аргумент τ у функций $\boldsymbol{\eta}$, η , η' , g_2 , ϑ ; кроме того, при желании g_2 можно заменить на его ϑ -эквивалент (см. формулу (П.3) приложения). В переменных x, y это решение вычисляется, если соотношения (13), (14), (16) дополнить так, чтобы получился полный базис, осуществляющий взаимный переход между τ -и x -представлениями. Это можно сделать, используя следующие выражения для величин ϑ , $\dot{\vartheta}_2$ и η :

$$\vartheta_3^2 = \frac{2}{\pi} K', \quad \dot{\vartheta}_2 = \frac{i}{\pi} \vartheta_2 K' E', \quad \eta = K' E' - \frac{x+1}{3} (K')^2.$$

После упрощений, заменяя α на $i\alpha$, получаем компактное решение

$$y = \frac{x(\alpha K' + K)}{\alpha E' - E + K}.$$

Аналогично упрощаем и два других предела:

$$y = \frac{2(\alpha K' + K)(E' - K') - \pi}{2(\alpha K' + K)(E' - xK') - \pi} x \Leftrightarrow \wp(z|\tau) = \frac{\pi}{2i} \frac{d}{d\tau} \operatorname{Ln} \frac{2(\tau + i\alpha) \dot{\vartheta}_3 + \vartheta_3}{\boldsymbol{\eta}^2 \vartheta_3}, \\ y = \frac{2(\alpha K' + K)(E' - xK') - \pi}{2(\alpha K' + K)(E' - K') - \pi} \Leftrightarrow \wp(z|\tau) = \frac{\pi}{2i} \frac{d}{d\tau} \operatorname{Ln} \frac{2(\tau + i\alpha) \dot{\vartheta}_4 + \vartheta_4}{\boldsymbol{\eta}^2 \vartheta_4}.$$

Видно, что эти решения связаны между собой преобразованиями вида $y \mapsto x/y$, и поэтому они не происходят от модулярных подстановок $\tau \mapsto \tau + 1$ и $\tau \mapsto -1/\tau$. Но нетрудно заметить, что они отражают дискретные симметрии уравнения (8) вида

$z \mapsto \{z + 1, z + \tau\}$, что и влечет указанное преобразование для y , которое легко узнать, если выписать его в привычном $\wp(z|\omega, \omega')$ -представлении:

$$\wp(z + \omega) - e = \frac{(e - e')(e - e'')}{\wp(z) - e} \Leftrightarrow \tilde{y} = \frac{x}{y},$$

где e, e', e'' – стандартные точки ветвления в теории Вейерштрасса. Эта симметрия применима, конечно, к любым решениям Пикара–Хитчина. Заметим также, что пара функций E, E' необходима не только как формальное дополнение к функциям K, K' : через E, E' выражаются решения Хитчина и решения Шази, полученные в работе [23], и вообще любые η -, ϑ -, θ -функциональные решения уравнения (1).

4.3. τ -функции. Мы продемонстрировали примеры $(\partial_x \text{Ln})$ -форм Пенлеве и для вырожденных решений Хитчина, поскольку τ -функции важны в теории уравнений Пенлеве, они генерируют их гамильтонианы и другие объекты [14], [16], [18], [21]. Однако τ -функции необходимы не столько для гамильтонианов, которые известны для всех уравнений Пенлеве, сколько для представления решений в форме (6). Сошлемся, например, на работу Окамото [16] и его пояснения в работе [14] в связи с построением τ -функций, соответствующих положительной и отрицательной сериям вычетов для решений уравнения $\mathcal{P}_2$.

Необходимо отметить, что другие известные примеры (см. ссылки в конце п. 2.1) требуют наличия явного перехода ${}_2F_1 \mapsto \tau$, так как ${}_2F_1$ -ряды являются существенно неголоморфными функциями с ветвлениями. Приведение их в “настоящую” τ -форму – очень сложная задача, эквивалентная обращению отношения интегралов уравнений класса Фукса. В этом смысле в униформизирующем τ -представлении (см. далее раздел 5) формулы всегда “конечны”, а переход ${}_2F_1 \mapsto \tau$ нетривиален и может содержать несколько гипергеометрических рядов. Например, в разобранных выше примерах, помимо интегралов K, K', E, E' , т.е. функций типа ${}_2F_1(\pm 1/2, 1/2; 1|z)$, присутствует функция $\eta^2(\tau)$. Можно показать [12], что гипергеометрическое уравнение, связанное с ней, есть не что иное, как уравнение на функцию ${}_2F_1(1/12, 1/12; 2/3|J)$, т.е. уравнения, определяющие классический модулярный инвариант Клейна $J = (g_2^3/\Delta)(\tau)$ [6], [7]:

$$J(J - 1) \frac{d^2}{dJ^2} \eta^2 + \frac{1}{6} (7J - 4) \frac{d}{dJ} \eta^2 + \frac{1}{144} \eta^2 = 0.$$

Таким образом, имеется пока единственный класс Хитчина, в котором все ответы, включая вырождения, предъявляются явно. Осталось заметить, что найденная форма Пенлеве допускает естественную трактовку, аналогичную формулам прямолинейных сечений двумерных якобианов в теории солитонных уравнений. Функция (21) есть канонический нормализованный мероморфный эллиптический интеграл $I(z - B|\tau)$, имеющий единственный полюс первого порядка в точке $z = B$ и рассматриваемый на прямолинейном сечении $z - A\tau + B = 0$ пространства $\{\mathbb{C} \times \mathbb{H}^+\}$, получаемого как прямое произведение эллиптической кривой (параметр z) и одномерного пространства модулей эллиптических кривых (параметр τ).

Построенная в работе [17] τ -функция соответствует только пикаровским полюсам (19) и с точностью до неподвижного “немероморфного” множителя совпадает

с функцией

$$\tau_1(x; A, B) = \theta_1 \left(A \frac{K(\sqrt{x})}{K'(\sqrt{x})} + B \left| \frac{iK(\sqrt{x})}{K'(\sqrt{x})} \right| \right).$$

Следовательно, существует второй гамильтониан, соответствующий второй τ -функции и полюсам с противоположным знаком вычетов. Она определяется формулой

$$\tau_2(x; A, B) = \tau_1(x; A, B) \frac{d}{dB} \operatorname{Ln} \{ \tau_1(x; A, B) e^{2\pi AB} \}.$$

Выбор такого представления мотивируется тем, что мероморфные абелевы интегралы (интегралы второго рода) типа функций (21) могут быть представлены как производные от логарифмических интегралов (интегралы третьего рода) по параметру, определяющему расположение одного из двух логарифмических полюсов (по константе B). Этот факт может быть предметом дальнейших обобщений, но мы их здесь не обсуждаем.

5. УРАВНЕНИЕ $\mathcal{P}_6$ И УНИФОРМИЗАЦИЯ КРИВЫХ

5.1. Алгебраические решения. То, что мы имеем общий интеграл, приводит к ряду следствий, например к случаям, предельным по параметрам A, B , например

$$A\tau + B = \frac{n}{N} \tau + \frac{m}{N}, \quad n, m, N \in \mathbb{Z}. \quad (27)$$

Так возникает неограниченная серия алгебраических решений вида $P(x, y) = 0$, где P – полином по своим переменным. Частные решения алгебраического типа приводил еще Хитчин, а в работе [23] показано, откуда происходит и вся алгебраическая серия Пикара. Там же рассмотрены асимптотики и монодромии, связанные с этими и другими решениями, и характер их ветвлений.

Менее известно, что некоторые из этих результатов, как и схема построения таких решений, имелись уже в работе Фукса [24] с тем же названием, что и достаточно известная его работа 1907 г.²⁾ Процедуры построения решений в работах [23], [24] не рассматривались, но метод их получения, очевидно, один и тот же: используются теоремы умножения и сложения для эллиптических функций. Кроме того, Фукс указал [24] рецепт использования известной детерминантной формулы умножения Киперта для $\wp(Nz)$ как рациональной функции от $\wp(z)$ (см. также [8], [22]); выписал ряды Пуизё для этих решений [24] и очень подробно рассмотрел монодromию уравнения Фукса.

Такие детерминантные схемы могут представлять самостоятельный интерес, поскольку список алгебраических решений уравнений Пенлеве в последнее время постоянно расширяется. Ограничимся (без доказательства) утверждением о том, что можно получить эффективные рекуррентные схемы построения таких решений. Примеры рекурсий мы не приводим, поскольку более интересным нам представляется другое незамедлительное следствие из сказанного выше.

²⁾Пикар в виде однострочного замечания в работе [19] тоже подчеркивает наличие бесконечной серии алгебраических решений, если числа A и B соизмеримы.

Из пояснений, приведенных в п. 1.1, и того факта, что имеется явный вид (18) зависимости $z(\tau)$ для решения уравнения (2), мы получаем бесконечные серии алгебраических кривых $P(u, v) = 0$ нетривиальных родов $g > 1$ с явными параметризациями однозначными аналитическими функциями $u(\tau)$, $v(\tau)$. Так как упомянутая формула Киперта содержит избыточный комплект функций $\wp, \wp', \wp'', \dots$, удобнее перейти на язык тета-функций, что к тому же даст и более компактные ответы. В этом случае желательно иметь теоремы умножения непосредственно для функций θ_k, θ'_1 . Насколько нам известно, в литературе такие формулы отсутствуют, и мы их привели в приложении (лемма 2). Для решений Хитчина можно воспользоваться преобразованиями (20), но действовать ими на быстро усложняющиеся с ростом N алгебраические функции не эффективно. Поэтому удобнее использовать указанные теоремы для (θ, θ') -функций прямо в формулах (12), (18) (см. также далее предложение 2). Как применять их к рассматриваемым решениям, вполне очевидно, и мы переходим к демонстрации характерных примеров и их следствий.

5.2. Примеры. Положив $A\tau + B = 1/3$, мы воспроизводим решение Дубровина [23]

$$y^4 - (6y - 4)yx + (4y - 3)x^2 = 0. \quad (28)$$

Формула (3) тогда приводит к кривой рода $g = 3$ вида

$$4(u^2 + u^{-2})v = v^4 - 6v^2 - 3, \quad u = \frac{\vartheta_4(\tau)}{\vartheta_3(\tau)}, \quad v = \frac{\theta_2^2(\frac{1}{6}|\tau)}{\theta_1^2(\frac{1}{6}|\tau)}, \quad (29)$$

если использовать подстановку $x = u^4$, $y = -u^2v$. Эта кривая не попадает в серию классических модулярных уравнений [7] и их ближайших вариаций [12]. В свою очередь, что примечательно, уравнение (29) в силу бирационального преобразования

$$\begin{aligned} u &= \frac{x^4 - y - 1}{4x}, & x &= \frac{u(v^2 - 1)}{2(u^2 + v)}, \\ v &= \frac{x^4 - y + 1}{2x^2}, & y &= \frac{(v^2 + 3)^2}{v^2(v^2 - 1)} \left(\frac{4u^2v}{v^2 + 3} + 1 \right) \end{aligned}$$

изоморфно классической гиперэллиптической кривой Шварца

$$y^2 = x^8 + 14x^4 + 1. \quad (30)$$

В работах Шварца [25] эта кривая фигурирует повсюду в обоих томах в разных контекстах³⁾, но вариантов ее параметризаций не было известно. Приведем формулу для $x(\tau)$, поскольку она допускает компактное упрощение

$$x = \frac{\eta^3(\tau)\theta_2(\frac{1}{3}|\tau)}{\theta_1^2(\frac{1}{6}|\tau)\theta_3^2(\frac{1}{6}|\tau)}. \quad (31)$$

³⁾Например, в той работе 1967 г. (см. том 1 в [25]), где появилась его знаменитая производная Шварца $\Psi(s, u)$.

Для этих и других кривых и функций, выводимых указанным способом, можно выписать (и это является чисто технической задачей) оставшиеся атрибуты униформизации: дифференциальные уравнения на эту функцию $y(x)$, ${}_2F_1$ -решения соответствующих фуксовых уравнений, представления групп монодромий этих уравнений, многоугольники Пуанкаре [7], абелевы интегралы как функции τ , их редукции, если они допустимы, к эллиптическим интегралам и др. Подробности см. в работе [12]; там же, хотя и в сжатом виде, приведены приложения.

Если рассмотреть аналогичное решение (9) с этими же параметрами $A\tau + B = 1/3$, то получим кривую-решение Хитчина

$$y^4 - 2(x+1)(y^2+x)y + 6xy^2 + x^3 - x^2 + x = 0. \quad (32)$$

Но эта кривая после подстановки $x = u^4$ должна быть изоморфна предыдущим кривым, так как исходные решения Пикара (28) и Хитчина (32) имеют род $g = 0$. Со своей стороны, формулы (3) и (9) дают эквивалентную, но не очевидную параметризацию для (32):

$$y = \frac{\vartheta_4^2(\tau)}{\vartheta_3^2(\tau)} \left(\pi \vartheta_2^2(\tau) \frac{\theta_3 \theta_4}{\theta_2 \theta_1'} \left(\frac{1}{6} \middle| \tau \right) - 1 \right) \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2} \left(\frac{1}{6} \middle| \tau \right),$$

что является проявлением нетривиальных $(\vartheta, \theta, \theta')$ -функциональных тождеств⁴⁾. Общее утверждение об алгебраических решениях Хитчина следует из формул (3) и (10).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Алгебраические решения Хитчина имеют параметризацию*

$$x = \frac{\vartheta_4^4}{\vartheta_3^4}, \quad y = \frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_3^2} \frac{\theta_2}{\theta_1^2} \left\{ \frac{\pi \vartheta_2^2 \theta_3 \theta_4}{\theta_1' + 2\pi i(n/N)\theta_1} - \theta_2 \right\}, \quad (33)$$

где (θ, θ') -функции берутся с аргументами из (27). Функции (33) удовлетворяют автономным дифференциальным уравнениям третьего порядка вида

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^3} - \frac{3}{2} \frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^4} = -\frac{1}{2} \frac{x^2 - x + 1}{x^2(x-1)^2}, \quad \frac{\ddot{y}}{\dot{y}^3} - \frac{3}{2} \frac{\dot{y}^2}{\dot{y}^4} = Q(x, y)$$

с явно вычисляемой рациональной функцией $Q(x, y)$ при любых n, m, N .

В силу этого предложения и простоты формул (33) во многом отпадает необходимость и в самих уравнениях $P(x, y) = 0$, поскольку униформизация позволяет анализировать решения при сколь угодно больших N . Сюда входят дифференцирования, ряды Лорана–Пуизё, вычисление монодромий, ветвлений, родов, построение графиков и т.д.

Нулевой род не является общим свойством рассматриваемых решений. Так, при $A\tau + B = 1/5$ решение Пикара имеет вид громоздкой, но эллиптической кривой $P(x, y) = 0$:

$$y^{12} - 50xy^{10} + 140(x^2+x)y^9 - 5(32x^3 + 89x^2 + 32x)y^8 +$$

⁴⁾В частности, $\theta_1'(p\tau + q|\tau)$ алгебраически связана с функциями $\theta(p\tau + q|\tau)$, если p, q – рациональные числа, в то время как в случае общего положения эта связь может быть только дифференциальной (см. лемму 1 приложения).

$$\begin{aligned}
& + 16(4x^4 + 35x^3 + 35x^2 + 4x)y^7 - 60(4x^4 + 13x^3 + 4x^2)y^6 + \\
& + 360(x^4 + x^3)y^5 - 105x^4y^4 - 80(x^5 + x^4)y^3 + \\
& + 2(8x^6 + 47x^5 + 8x^4)y^2 - 20(x^6 + x^5)y + 5x^6 = 0
\end{aligned} \tag{34}$$

с модулярным инвариантом Клейна $J = 256/135$. Для нее $\wp$ -параметризация Вейерштрасса очень сложна и малоприменима, в то время как для любого $\tau \in \mathbb{H}^+$

$$x = \frac{\vartheta_4^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)}, \quad y = -\frac{\vartheta_4^2(\tau)}{\vartheta_3^2(\tau)} \frac{\vartheta_2^2(\frac{1}{10}|\tau)}{\vartheta_1^2(\frac{1}{10}|\tau)}.$$

Род кривых быстро растет. При $N = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ для решений Пикара–Хитчина имеем $g = 0, 1, 1, 4, 5, 7$ соответственно. Здесь стоит отметить, что род зависит от выбора представления уравнения со свойством Пенлеве. Например, это же решение (34), но в пикаровском представлении (23), (24) имеет негиперэллиптический род $g = 3$, а простое решение уравнения (24), причем бирационально изоморфное лемнискате $w^2 = z^4 - 1$ (вычисление не тривиально), появляется уже при $A\tau + B = 1/4$:

$$\begin{aligned}
& x^4u^{16} - 20x^3u^{12} + 32x^2(x+1)u^{10} - 2x(8x^2 + 29x + 8)u^8 + \\
& + 32x(x+1)u^6 - 20xu^4 + 1 = 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [12] мы высказали предположение о возможной связи тета-констант $\theta(u(\tau)|\tau)$ общего вида с униформизирующими уравнениями Фукса. Частным случаем таких констант является сама функция Дедекинда $\eta(\tau) = -ie^{\pi i \tau/3} \theta_1(\tau|3\tau)$, которая присутствует как в наших формулах, так и в некоторых известных, но изолированных параметризациях модулярных уравнений (по большей части нулевых родов; библиографию см. в [12]). Из вышеприведенных результатов мы, таким образом, заключаем, что уравнение Пенлеве через фундаментальный объект $\theta(\frac{n}{N}\tau + \frac{m}{N}|\tau)$ доставляет бесконечный класс обобщений в этом направлении вместе с явными формулами для кривых, не обязательно являющихся решениями уравнения $\mathcal{P}_6$, функций на них, дифференциальных уравнений на эти функции, соответствующих подгрупп $\Gamma(2)$ и т.д.

Отметим следующий вычислительный факт. Кривые Пенлеве специфичны и не всегда легко поддаются разного рода алгоритмам. Кривая (35) – хороший тому пример. Но в рамках изложенного выше появляются и “удобные” уравнения, в частности важный класс гиперэллиптических кривых. Еще менее очевидным является тот факт, что функция (31) в действительности “обслуживает” большую кривую

$$z^2 = (x^8 + 14x^4 + 1)(x^5 - x). \tag{36}$$

А именно, формула (31) параметризует и это уравнение в том смысле, что $z(\tau)$, определяемая из (31) и (36), является аналитической функцией, однозначной всюду в области своего существования, т.е. в $\mathbb{H}^+$. Этот пример доставляет еще одну реализацию весьма нетривиальной башни вложенных гиперэллиптических кривых с универсальной униформизирующей функцией $\chi(\tau)$ (о ней см. в [12]).

Вывод формулы (36) и другие тета-функциональные следствия из сказанного выше мы здесь не приводим. Ввиду их многочисленности это составляет предмет отдельного рассмотрения и выходит за рамки настоящей работы.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Используя аналитические ответы как в x -представлении (15), (17), так и в τ -представлении (12), (18), можно без труда получить ряд полезных формул, например простые выражения для конформного фактора F метрик Тода–Хитчина [2]–[4]. В работе [2] он выражен через производные от тета-функций по константам интегрирования, а в работе [17] решение $y(x)$ представлено через двойные производные от тета-функций по обоим аргументам. В силу леммы 1 окончательные ответы в действительности выражаются в базисе $\vartheta, \theta'_1, \theta_k(A\tau + B|\tau)$. Другой пример – дифференциальные уравнения третьего порядка на τ -функции и целые голоморфные функции, частное которых дает решение $y(x)$. На существование и важность таких уравнений неоднократно указывал Пенлеве (см., например, [5]). Они являются следствиями уравнений третьего порядка для $\sigma(a\tau + b|\tau)$, вытекающих из леммы 3 приложения.

Возвращаясь к примечанию, сделанному в п. 1.1, отметим, что известные решения и локальные ветвления [4], [13], [15], [23] согласуются с униформизацией подстановкой Пенлеве, т.е. порождают τ -представления решений однозначными функциями $y(\tau)$. Все необходимое для того, чтобы установить это свойство для всех решений, по всей видимости, содержится в теореме 2 работы [16] и в работе [13]. Но в контексте униформизации желательно иметь прямое утверждение о глобальной однозначности функции $\wp(z(\tau)|\tau)$ при любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Это дало бы новую важную трактовку уравнения $\mathcal{P}_6$. От младших уравнений Пенлеве уравнение (1) отличалось бы тогда тем, что для них решения глобально мероморфны на плоской поверхности $\mathbb{C}$, а для $\mathcal{P}_6$ – на верхней полуплоскости $\mathbb{H}^+$ с постоянной отрицательной кривизной Лобачевского как универсальном накрытии $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$. Обширный класс алгебраических решений доставляет тогда автоморфные функции на римановых поверхностях с тремя проколами (орбифолды), а собственно трансцендентные решения типа Пикара–Хитчина порождают другой, физически содержательный, класс однозначных функций. В этом контексте из решений уравнения (1) решения уравнения (2) не следуют автоматически, и поэтому интегрирование уравнения (2) представляет самостоятельную задачу.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Правила дифференцирования тета-функций

П.1. Тета-функции. Функции Якоби используются в следующих определениях [6]:

$$\begin{aligned}\theta_1(z|\tau) &= -ie^{\pi i \tau/4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{(k^2+k)\pi i \tau} e^{(2k+1)\pi i z}, \\ \theta_2(z|\tau) &= e^{\pi i \tau/4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(k^2+k)\pi i \tau} e^{(2k+1)\pi i z}, \\ \theta_3(z|\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{k^2 \pi i \tau} e^{2k \pi i z},\end{aligned}$$

$$\theta_4(z|\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{k^2 \pi i \tau} e^{2k \pi i z},$$

$$\theta'_1(z|\tau) := \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = \pi e^{\pi i \tau / 4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k (2k+1) e^{(k^2+k) \pi i \tau} e^{(2k+1) \pi i z},$$

а ϑ -константы определяются как $\vartheta_k := \vartheta_k(\tau) = \theta_k(0|\tau)$ и $\vartheta_1 \equiv 0$.

ЛЕММА 1. Пять функций Якоби $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ и θ'_1 удовлетворяют следующим замкнутым обыкновенным дифференциальным уравнениям по переменным z, τ с коэффициентами $\eta(\tau)$ и $\vartheta_k^2(\tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_k}{\partial z} &= \frac{\theta'_1}{\theta_1} \theta_k - \pi \vartheta_k^2 \cdot \frac{\theta_\nu \theta_\mu}{\theta_1}, \\ \frac{\partial \theta'_1}{\partial z} &= \frac{\theta_1'^2}{\theta_1} - \pi^2 \vartheta_3^2 \vartheta_4^2 \cdot \frac{\theta_2^2}{\theta_1} - 4 \left\{ \eta + \frac{\pi^2}{12} (\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4) \right\} \theta_1 \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_k}{\partial \tau} &= -\frac{i}{4\pi} \frac{\theta_1'^2}{\theta_1^2} \theta_k + \frac{i}{2} \vartheta_k^2 \cdot \theta'_1 \frac{\theta_\nu \theta_\mu}{\theta_1^2} + \frac{\pi i}{4} \left\{ \vartheta_3^2 \vartheta_4^2 \cdot \theta_2^2 - \vartheta_k^2 \vartheta_\mu^2 \cdot \theta_\nu^2 - \vartheta_k^2 \vartheta_\nu^2 \cdot \theta_\mu^2 \right\} \frac{\theta_k}{\theta_1^2} + \\ &+ \frac{i}{\pi} \left\{ \eta + \frac{\pi^2}{12} (\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4) \right\} \theta_k, \\ \frac{\partial \theta'_1}{\partial \tau} &= -\frac{i}{4\pi} \frac{\theta_1'^3}{\theta_1^3} + \frac{3i}{\pi} \left\{ \frac{\pi^2}{4} \vartheta_3^2 \vartheta_4^2 \cdot \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2} + \eta + \frac{\pi^2}{12} (\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4) \right\} \theta'_1 - \\ &- \frac{\pi^2 i}{2} \vartheta_2^2 \vartheta_3^2 \vartheta_4^2 \cdot \frac{\theta_2 \theta_3 \theta_4}{\theta_1^2}, \end{aligned}$$

где

$$\nu = \frac{8k-28}{3k-10}, \quad \mu = \frac{10k-28}{3k-8}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Эти дифференцирования не вполне симметричны, а сами уравнения означают, что не только эллиптические функции (отношения θ_j/θ_k) имеют замкнутое дифференциальное исчисление, причем по обоим переменным z, τ независимо, но и их “составляющие” – тета-функции с неизбежным присоединением функции θ'_1 . Исчерпывающие подробности и, что не маловажно, анализ условия интегрируемости вышеприведенных уравнений см. в работе [26]. Очевидно, что базис $\theta_{1,2,3,4}$ можно замыкать любой из функций θ'_k , а не только θ'_1 . Существенным моментом является еще и тот факт, что известное уравнение $4\pi i \theta_\tau = \theta_{zz}$ следует рассматривать скорее как следствие приведенных здесь уравнений, но не наоборот, поскольку уравнения леммы 1 – обыкновенные дифференциальные уравнения, а данное уравнение “теплопроводности” в частных производных. Тета-функции являются его важными, но частными решениями.

ЛЕММА 2. Пусть n – целое число и $n_1 = n - 1$. Тогда функции Якоби удовлетворяют следующим рекурсивным формулам умножения:

$$\begin{aligned}\theta_1(2z) &= 2\theta_1(z) \frac{\theta_2(z)\theta_3(z)\theta_4(z)}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}, \\ \theta_1(nz) &= \frac{\theta_3^2(n_1z)\theta_2^2(z) - \theta_2^2(n_1z)\theta_3^2(z)}{\vartheta_4^2 \cdot \theta_1((n-2)z)}, \\ \theta_2(nz) &= \frac{\theta_3^2(n_1z)\theta_3^2(z) - \theta_4^2(n_1z)\theta_4^2(z)}{\vartheta_2^2 \cdot \theta_2((n-2)z)}, \\ \theta_3(nz) &= \frac{\theta_2^2(n_1z)\theta_2^2(z) + \theta_4^2(n_1z)\theta_4^2(z)}{\vartheta_3^2 \cdot \theta_3((n-2)z)}, \\ \theta_4(nz) &= \frac{\theta_3^2(n_1z)\theta_3^2(z) - \theta_2^2(n_1z)\theta_2^2(z)}{\vartheta_4^2 \cdot \theta_4((n-2)z)}.\end{aligned}\quad (\text{П.2})$$

Формула умножения для функции $\theta'_1(nz)$ получается взятием производной в (П.2) с последующим использованием формул (П.1). Утверждение леммы остается верным и для произвольного комплексного n .

Здесь естественно предположить, что существуют общие нерекурсивные выражения для этих формул в виде детерминантов.

П.2. Функции Вейерштрасса. Модулярные функции Вейерштрасса $g_2(\tau)$, $g_3(\tau)$ и $\eta(\tau)$ определяются следующими рядами:

$$\begin{aligned}\eta(\tau) &= 2\pi^2 \left\{ \frac{1}{24} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i\tau}}{(1 - e^{2k\pi i\tau})^2} \right\}, \\ g_2(\tau) &= 20\pi^4 \left\{ \frac{1}{240} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 e^{2k\pi i\tau}}{1 - e^{2k\pi i\tau}} \right\} = \frac{\pi^4}{24} (\vartheta_2^8 + \vartheta_3^8 + \vartheta_4^8), \\ g_3(\tau) &= \frac{7}{3} \pi^6 \left\{ \frac{1}{504} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5 e^{2k\pi i\tau}}{1 - e^{2k\pi i\tau}} \right\} = \frac{\pi^6}{432} (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4)(\vartheta_4^4 - \vartheta_2^4).\end{aligned}\quad (\text{П.3})$$

ЛЕММА 3. Функции Вейерштрасса σ , ζ , $\wp$, $\wp'(z|\tau)$ удовлетворяют следующей неавтономной динамической системе с коэффициентами $\eta(\tau)$, $g_2(\tau)$ и параметром z :

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} &= \frac{i}{\pi} \left(\wp - \zeta^2 + 2\eta(z\zeta - 1) - \frac{1}{12} g_2 z^2 \right) \sigma, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} &= \frac{i}{\pi} \left(\wp' + 2(\zeta - z\eta)\wp + 2\eta\zeta - \frac{1}{6} g_2 z \right), \\ \frac{\partial \wp}{\partial \tau} &= -\frac{i}{\pi} \left(2(\zeta - z\eta)\wp' + 4(\wp - \eta)\wp - \frac{2}{3} g_2 \right), \\ \frac{\partial \wp'}{\partial \tau} &= -\frac{i}{\pi} \left(6(\wp - \eta)\wp' + (\zeta - z\eta)(12\wp^2 - g_2) \right)\end{aligned}\right\}, \quad (\text{П.4})$$

где правой фигурной скобкой дополнительно обозначена дифференциальная замкнутость функций ζ , $\wp$, $\wp'$. Замены $\zeta \mapsto \zeta - z\eta$ и $\sigma \mapsto \sigma e^{-\eta z^2/2}$ исключают параметр z из уравнений (П.4), что эквивалентно переходу к функциям θ' и θ .

Поскольку $\wp'$ алгебраически выражается через $\wp$, “существенную” часть системы (П.4) составляют ее второе и третье уравнения. Они, в свою очередь, равносильны уравнениям для функций $\zeta(A\tau + B|\tau)$ и $\wp(A\tau + B|\tau)$, если учесть известную связь $\partial_z \zeta(z|\tau) = -\wp(z|\tau)$. Поэтому если рассматривать параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ как модули уравнения $\mathcal{P}_6$, то класс Пикара–Хитчина–Окамото (см. замечание 1) имеет общие модули, и все уравнения $\mathcal{P}_6$ из этого класса эквивалентны одному представителю – системе (П.4).

СЛЕДСТВИЕ 3. *Каноническим представителем уравнений $\mathcal{P}_6$ в классе параметров Пикара–Хитчина–Окамото является следующая система двух уравнений для функций $\zeta, \wp$:*

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{d\tau} &= \frac{i}{\pi} \{ \wp' + 2(\wp + \eta)\zeta \}, \\ \frac{d\wp}{d\tau} &= -\frac{i}{\pi} \left\{ 2\zeta\wp' + 4(\wp - \eta)\wp - \frac{2}{3}g_2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

и ее общий интеграл

$$\zeta = \zeta(A\tau + B|\tau) - A\eta'(\tau) - B\eta(\tau), \quad \wp = \wp(A\tau + B|\tau).$$

Здесь $\wp' = \sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}$, и уравнения (П.5) дополняются их следствием

$$\frac{d\wp'}{d\tau} = -\frac{i}{\pi} \{ 6(\wp - \eta)\wp' + (12\wp^2 - g_2)\zeta \}.$$

Ясно, что оставить можно любую из величин $\wp$ или $\wp'$, а решения и их производные будут рациональными функциями от $\zeta, \wp, \wp'$. Такие производные можно тогда воспринимать как $\wp$ -форму преобразований Окамото (20). Например, для решения Хитчина $H = \wp(z|\tau)$ будем иметь

$$H = \wp + \frac{1}{2} \frac{\wp'}{\zeta}, \quad \frac{\pi}{i} \frac{dH}{d\tau} = \frac{2H^3 - g_2H - g_3}{\wp - H} + 2H^2 + 4\eta H + \frac{1}{6}g_2.$$

Выбирая из $\zeta, \wp, \wp'$ удобный базис, можно пойти дальше и развивать на основе определяющих уравнений (П.5) обратное, т.е. интегральное, исчисление Пенлеве как в униформизирующей τ -полуплоскости, так и в плоскости x . Примеры здесь тоже многочисленны, помимо первого очевидного примера, следующего из τ -формы (15),

$$\int_x^x \frac{y dx}{x(x-1)} = -2 \operatorname{Ln} \frac{\theta_1' \left(A \frac{K}{K'} + B \left| \frac{iK}{K'} \right. \right) + 2\pi A \cdot \theta_1 \left(A \frac{K}{K'} + B \left| \frac{iK}{K'} \right. \right)}{\sqrt{1-x} K' \cdot \theta_1 \left(A \frac{K}{K'} + B \left| \frac{iK}{K'} \right. \right)},$$

приведем другой, наиболее примечательный:

$$\frac{i}{\pi} \int^\tau (\wp - \zeta^2) d\tau = \operatorname{Ln} \theta_1 \left(\frac{1}{2} A\tau + \frac{1}{2} B \middle| \tau \right) - \operatorname{Ln} \eta(\tau) + \frac{\pi i}{4} A^2 \tau.$$

Этот пример, порождающий все другие интегралы, логично рассматривать как τ -аналог Пенлеве хорошо известного интегрального соотношения Вейерштрасса между мероморфными объектами $\zeta, \wp$ и целой функцией σ . Вновь, налагая условие (27), слева будем получать разнообразные тета-константы общего вида, $\theta(u(\tau)|\tau), \theta'(u(\tau)|\tau)$, а справа – значение интеграла от них, также являющееся тета-константой.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского агентства по науке и инновациям (грант № 02.740.11.0238).

Список литературы

- [1] R. Fuchs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **141** (1906), 555–558.
- [2] M. V. Babich, D. A. Korotkin, *Lett. Math. Phys.*, **46**:4 (1998), 323–337.
- [3] K. P. Tod, *Phys. Lett. A*, **190**:3–4 (1994), 221–224.
- [4] N. Hitchin, *J. Differ. Geom.*, **42**:1 (1995), 30–112.
- [5] P. Painlevé, *C. R. Acad. Sci.*, **143** (1907), 1111–1117.
- [6] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.
- [7] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1967.
- [8] K. Weierstrass, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der Elliptischen Functionen*, Bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz, Kaestner, Göttingen, 1885.
- [9] М. В. Бабич, *УМН*, **64**:1(385) (2009), 51–134.
- [10] W. K. Schief, *Phys. Lett. A*, **267**:4 (2000), 265–275.
- [11] F. Nijhoff, A. Hone, N. Joshi, *Phys. Lett. A*, **267**:2–3 (2000), 147–156.
- [12] Yu. V. Brezhnev, *Mosc. Math. J.*, **8**:2 (2008), 233–271.
- [13] D. Guzzetti, *Comm. Pure Appl. Math.*, **55**:10 (2002), 1280–1363.
- [14] R. Conte (ed.), *The Painlevé Property. One Century Later*, CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York, 1999.
- [15] V. Gromak, I. Laine, S. Shimomura, *Painlevé Differential Equations in the Complex Plane*, de Gruyter Stud. Math., **28**, Walter de Gruyter, Berlin, 2002.
- [16] K. Okamoto, *Proc. Japan Acad. Ser. A*, **56**:8 (1980), 367–371.
- [17] A. V. Kitaev, D. A. Korotkin, *Int. Math. Res. Not.*, **17** (1998), 877–905.
- [18] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Aspects Math., **E16**, Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1991.
- [19] E. Picard, *J. de Math.* (4), **5** (1889), 135–319.
- [20] P. Painlevé, *Œuvres de Paul Painlevé. T. III. Equations différentielles du second ordre. Mécanique. Quelques documents*, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1975.
- [21] K. Okamoto, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **146**:1 (1986), 337–381.
- [22] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Ч. 2, Физматлит, М., 1963.
- [23] M. Mazzocco, *Math. Ann.*, **321**:1 (2001), 157–195.
- [24] R. Fuchs, *Math. Ann.*, **70**:4 (1911), 525–549.
- [25] H. A. Schwarz, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Springer, Berlin, 1890.
- [26] Yu. V. Brezhnev, *On functions of Jacobi–Weierstrass (I) and equation of Painlevé*, [arXiv: 0808.3486](https://arxiv.org/abs/0808.3486).

Поступила в редакцию 4.03.2009,
после доработки 8.04.2009