Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Юй-Тун Чэнь, Нианн-Черн Ли, Мин-Хсиень Ту, О симметриях уравнения Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде в двухпримарных моделях, *ТМФ*, 2009, том 161, номер 3, 367–381

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:10:37

© 2009 г. Юй-Тун Чэнь*, Нианн-Черн Ли†, Мин-Хсиень Ту‡†

О СИММЕТРИЯХ УРАВНЕНИЯ ВИТТЕНА–ДИЙКГРААФА–ВЕРЛИНДЕ–ВЕРЛИНДЕ В ДВУХПРИМАРНЫХ МОДЕЛЯХ

На основе бигамильтоновой точки зрения исследуются симметрии уравнений Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде, предложенные Дубровиным. Эти симметрии можно рассматривать как канонические преобразования Миуры между бигамильтоновыми системами гидродинамического типа рода 0. В частности, показано, что при таких симметриях пространство модулей двухпримарных моделей можно параметризовать показателем политропы h . Обсуждаются свойства преобразований свободной энергии на уровне рода 1.

Ключевые слова: фробениусово многообразие, уравнения Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде, бигамильтонова структура, примарная свободная энергия, иерархия Бени, бездисперсионная иерархия Тоды, бездисперсионная иерархия Гарри Дима, динамика политропного газа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Фробениусово многообразие – это разновидность комплексного многообразия $\mathcal{M}$, касательное пространство к которому локально определяет коммутативную ассоциативную алгебру с единичным элементом. Понятие фробениусова многообразия имеет отношение ко многим темам в математике и теоретической физике, таким как интегрируемые системы, квантовые когомологии, симплектическая геометрия, теория особенностей, топологические теории поля, зеркальная симметрия и т.д. (см., например, [1]–[6] и ссылки в этих работах). Один из способов определения N -мерного фробениусова многообразия $\mathcal{M}$ состоит в построении квазиоднородной функции $F(t)$ от N переменных $t = (t^1, t^2, \dots, t^N)$ такой, что соответствующие функции

$$c_{\alpha\beta\gamma}(t) = \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, N, \quad (1)$$

удовлетворяют следующим условиям [2].

*Department of Computer Science, National Defense University, Taoyuan, Taiwan

†General Education Center, National Chin-Yi University of Technology, Taichung, Taiwan

‡Department of Physics, National Chung Cheng University, Chiayi, Taiwan.

E-mail: phymhtu@ccu.edu.tw

1. Метрика $\eta_{\alpha\beta} = c_{1\alpha\beta}$ постоянна и невырожденна (обсуждение вырожденных случаев см. в [7]).

2. Функции $c_{\beta\gamma}^\alpha = \eta^{\alpha\sigma} c_{\sigma\beta\gamma}$, где $\eta^{\alpha\beta} = (\eta_{\alpha\beta})^{-1}$, определяют структурные константы ассоциативной коммутативной алгебры $\mathbf{A}_t$ размерности N , так что для базиса $\{e_1, \dots, e_N\}$ выполняется $e_\alpha \cdot e_\beta = c_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$, причем e_1 – единичный элемент для всей алгебры $\mathbf{A}_t$ и $c_{1\alpha}^\beta(t) = \delta_\alpha^\beta$. Условие ассоциативности $(e_\alpha \cdot e_\beta) \cdot e_\gamma = e_\alpha \cdot (e_\beta \cdot e_\gamma)$ дает уравнение $c_{\alpha\beta}^\mu c_{\mu\gamma}^\sigma = c_{\alpha\gamma}^\mu c_{\mu\beta}^\sigma$, или, в силу (1), систему нелинейных уравнений в частных производных для $F(t)$

$$\frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\lambda} \eta^{\lambda\mu} \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\mu \partial t^\gamma \partial t^\sigma} = \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\alpha \partial t^\gamma \partial t^\lambda} \eta^{\lambda\mu} \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\mu \partial t^\beta \partial t^\sigma}. \quad (2)$$

3. Функция $F(t)$ (также называемая примарной свободной энергией) удовлетворяет условию квазиоднородности

$$\mathcal{L}_E F = d_F F + \text{квадратичные члены}, \quad (3)$$

где $E(t) = \sum_\alpha (d_\alpha t^\alpha + r^\alpha) \partial_\alpha = \sum_\alpha E^\alpha \partial_\alpha$ известно как эйлерово векторное поле.

Уравнение ассоциативности (2) и условие квазиоднородности (3) составляют так называемые уравнения Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ) [8], [9]. Удобно положить $d_1 = 1$ и ввести новые параметры $q_1 = 0, q_2, \dots, q_N = d$ с условием $q_\alpha + q_{N-\alpha+1} = d$ таким образом, что $q_\alpha = 1 - d_\alpha$ и $d = 3 - d_F$.

Имея некоторое решение (или примарную свободную энергию) уравнений ВДВВ, можно построить фробениусово многообразие $\mathcal{M}$, связанное с ним, и определить единственную структуру алгебры Фробениуса $(\mathbf{A}_t, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ на касательной плоскости $T_t \mathcal{M}$ такую, что $\langle \partial_\alpha \cdot \partial_\beta, \partial_\gamma \rangle = \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma F(t)$, $\langle \partial_\alpha, \partial_\beta \rangle = \eta_{\alpha\beta}$ с условием $\partial_\alpha \cdot \partial_\beta = c_{\alpha\beta}^\gamma(t) \partial_\gamma$, $c_{\alpha\beta}^\gamma = \eta^{\gamma\delta} \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\delta F(t)$, где мы положили, что ∂_1 – единица алгебры. На таком многообразии можно интерпретировать $\eta^{\alpha\beta} = (\eta_{\alpha\beta})^{-1}$ как плоскую метрику, а t^α – как плоские координаты.

Пространство решений уравнений ВДВВ довольно богато. Можно показать [10], что если $\eta_{11} = 0$ и все d_α различны, то при подходящей замене переменных t^α матрица $\eta_{\alpha\beta}$ имеет антидиагональную форму, $\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha+\beta, N+1}$, и

$$F(t) = \frac{1}{2} (t^1)^2 t^N + \frac{1}{2} t^1 \sum_{\alpha=2}^{N-1} t^\alpha t^{N-\alpha+1} + f(t^2, \dots, t^N).$$

Первый нетривиальный пример относится к случаю $N = 2$, где

$$F(t) = \frac{1}{2} (t^1)^2 t^2 + f(t^2), \quad E = t^1 \partial_1 + (1 - d) t^2 \partial_2.$$

Уравнения ассоциативности (2) пусты, тогда как условия квазиоднородности (3) приводят к уравнению

$$t^2 f'(t^2) = s f(t^2) + k_1 + k_2 t^2 + k_3 (t^2)^2, \quad s = \frac{3-d}{1-d}.$$

Интегрируя по t^2 , получаем

$$f(t^2) = (t^2)^s \left(k_1 \int^{t^2} \frac{dz}{z^{s+1}} + k_2 \int^{t^2} \frac{dz}{z^s} + k_3 \int^{t^2} \frac{dz}{z^{s-1}} + k_4 \right).$$

Для $d \neq 3, \pm 1$ имеем $f \sim (t^2)^s$ (по модулю квадратичной части), для $d = 3$ имеем $f \sim \ln t^2$, для $d = -1$ имеем $f \sim (t^2)^2 \ln t^2$. В случае $d = 1$ эйлерово векторное поле превращается в $E = t^1 \partial_1 + 2\partial_2$, и мы получаем $f \sim e^{t^2}$ (см. табл. 1). Эти функции соответствуют двухпримарным решениям уравнений ВДВВ, два из которых имеют примарную свободную энергию логарифмического типа. Оказывается, что ассоциированные интегрируемые структуры в основе этих двухпримарных моделей – это динамика политропного газа [11] [12], бездисперсионная иерархия Гарри Дима [13], иерархия Бенни [14] и бездисперсионная иерархия Тоды [15] соответственно.

Таблица 1. Модели с двухпримарными полями [2]

Модель	$F(t)$	$E(t)$	d
Политропный газ	$\frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + c_h (t^2)^{h+1}$	$t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{2}{h} t^2 \frac{\partial}{\partial t^2}$	$1 - \frac{2}{h}$ ($h \neq -1, 0, 1$)
Бездисперсионная иерархия Гарри Дима	$\frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 - \frac{1}{2} \ln t^2$	$t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} - 2t^2 \frac{\partial}{\partial t^2}$	3
Иерархия Бенни	$\frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + \frac{1}{2}(t^2)^2 \ln(t^2 - \frac{3}{2})$	$t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + 2t^2 \frac{\partial}{\partial t^2}$	-1
Бездисперсионная иерархия Тоды	$\frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + e^{t^2}$	$t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + 2 \frac{\partial}{\partial t^2}$	1

Для $N = 3$ решения уравнения ВДВВ могут сводиться к особому случаю уравнения Пенлеве VI [2]. При $N > 3$ из-за большей сложности переопределенной системы (2) полная классификация ассоциированных интегрированных систем представляется непростой задачей [16].

Дубровин ввел [2] два типа нетривиальных симметрий уравнений ВДВВ, что, по-видимому, приводит к другой точке зрения на интегрируемость, ассоциированную с фробениусовыми многообразиями. Симметрей уравнений ВДВВ является преобразование

$$t^\alpha \mapsto \hat{t}^\alpha, \quad \eta_{\alpha\beta} \mapsto \hat{\eta}_{\alpha\beta}, \quad F(t) \mapsto \hat{F}(\hat{t}),$$

сохраняющее уравнения. Некоторые примеры, в которых демонстрируются симметрии ВДВВ, были даны в работе [2]. Однако даже для простейшего случая ($N = 2$) по-прежнему недостает общего обсуждения пространства решений ВДВВ с использованием этих симметрий. В настоящей работе мы попытаемся изучить пространство решений двухпримарных моделей с точки зрения симметрий, поскольку симметрии имеют ключевое значение при классификации интегрируемых структур фробениусовых многообразий [16]. Мы покажем, что симметрии ВДВВ порождают преобразования Миуры между бигамильтоновыми системами гидродинамического типа, связанными с фробениусовыми многообразиями. В частности, мы проверим каноническое свойство симметрий ВДВВ и опишем пространство модулей решений для двухпримарных моделей. Недавно Дубровин предложил [17] двойственное описание фробениусовых многообразий. Хотя было бы интересно изучить симметрии между двойственными фробениусовыми многообразиями [18], мы не будем заниматься этим в настоящей работе.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 напоминаются некоторые базовые идеи построения бигамильтоновых систем гидродинамического типа из фробениусовых многообразий и представлены интегрируемые системы, ассоциированные с двухпримарными моделями. В разделе 3 показано, что симметрии ВДВВ можно рассматривать как канонические преобразования Миуры для двухпримарных моделей, а также найдено, что при симметриях ВДВВ пространство модулей двухпримарных моделей можно параметризовать показателем политропы h . В разделе 4 мы рассматриваем возможность продолжения симметрий ВДВВ на случай рода 1. В разделе 5 приведены заключительные замечания.

2. БИГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА

2.1. Фробениусовое многообразие. Бездисперсионные интегрируемые иерархии (см., например, [19]–[21]) с конечным числом переменных тесно связаны с фробениусовыми многообразиями. Для этих бигамильтоновых гидродинамических уравнений [22] можно добиться дифференциально-геометрической интерпретации бигамильтоновых структур. Точнее, если записать скобки Пуассона бигамильтоновой гидродинамической системы как

$$\{t^\alpha(x), t^\beta(y)\}_i = J_i^{\alpha\beta} \delta(x - y), \quad i = 1, 2, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N,$$

где

$$J_1^{\alpha\beta}(t) = \eta^{\alpha\beta}(t) \partial_x + \gamma_\sigma^{\alpha\beta}(t) t_x^\sigma, \quad J_2^{\alpha\beta}(t) = g^{\alpha\beta}(t) \partial_x + \Gamma_\sigma^{\alpha\beta}(t) t_x^\sigma, \quad (4)$$

то $\gamma_\sigma^{\alpha\beta}(t)$ и $\Gamma_\sigma^{\alpha\beta}(t)$ будут контравариантными связностями Леви-Чивиты контравариантных плоских метрик $\eta^{\alpha\beta}(t)$ и $g^{\alpha\beta}(t)$ соответственно. Когда $\eta^{\alpha\beta}(t)$ – постоянная плоская метрика (т.е. $\gamma_\sigma^{\alpha\beta}(t) = 0$), переменные t^α называются плоскими координатами. Для заданной примарной свободной энергии $F(t)$ ассоциированную бигамильтонову структуру (4) можно построить в контексте фробениусовых многообразий [2], [10], [23]. Кратко напомним конструкцию. Обозначая умножение в алгебре как $u \cdot v$, можно определить другую плоскую метрику на $\mathcal{M}$:

$$g^{\alpha\beta}(t) = E(dt^\alpha \cdot dt^\beta) = E^\gamma(t) c_\gamma^{\alpha\beta}(t), \quad (5)$$

где $dt^\alpha \cdot dt^\beta = c_\gamma^{\alpha\beta} dt^\gamma = \eta^{\alpha\sigma} c_{\sigma\gamma}^\beta dt^\gamma$. Эта метрика вместе с первоначальной метрикой $\eta^{\alpha\beta}$ определяет плоский пучок, т.е. метрика $\eta^{\alpha\beta} + \lambda g^{\alpha\beta}$ тоже плоская, и соответствующая связность Леви-Чивиты равна $\gamma_\sigma^{\alpha\beta} + \lambda \Gamma_\sigma^{\alpha\beta}$ для любого значения λ , что отвечает условию совместимости в интегрируемых системах. Заметим, что в терминах плоских координат контравариантные компоненты связности Леви-Чивиты, ассоциированной с метрикой $g^{\alpha\beta}(t)$, можно выразить как [2]

$$\Gamma_\gamma^{\alpha\beta}(t) = c_\gamma^{\alpha\epsilon}(t) \left(\frac{1}{2} - \mu \right)_\epsilon^\beta, \quad (6)$$

где матрица $\mu = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N)$, $\mu_\alpha = q_\alpha - d/2$. Поток ассоциированной иерархии рода 0 можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial t^\alpha}{\partial T^{\beta,n}} = \{t^\alpha(x), H_{\beta,n}\}_1,$$

где гамильтониан

$$H_{\beta,n} = \int h_{\beta}^{(n+1)}(t(x)) dx$$

определяется рекуррентными соотношениями [2], [10]

$$\frac{\partial^2 h_{\alpha}^{(n+1)}}{\partial t^{\beta} \partial t^{\gamma}} = c_{\beta\gamma}^{\sigma} \frac{\partial h_{\alpha}^{(n)}}{\partial t^{\sigma}}, \quad h_{\alpha}^{(0)} = \eta_{\alpha\beta} t^{\beta},$$

и

$$\partial_E h_{\beta}^{(n)} = \left(n + 1 - \frac{d}{2} + \mu_{\beta} \right) h_{\beta}^{(n)} + \sum_{k=1}^n (R_k)_{\beta}^{\gamma} h_{\gamma}^{(n-k)}$$

с постоянными матрицами R_k , удовлетворяющими равенствам

$$[\mu, R_k] = k R_k, \quad (R_k)_{\alpha}^{\gamma} \eta_{\gamma\beta} = (-1)^{k+1} (R_k)_{\beta}^{\gamma} \eta_{\gamma\alpha}.$$

Легко показать, что $\partial t^{\alpha} / \partial T^{1,0} = \partial t^{\alpha} / \partial x$ и, таким образом, мы устанавливаем, что $T^{1,0} = x$. На самом деле можно определить вторую гамильтонову структуру рекуррентным соотношением

$$\{t^{\alpha}(x), H_{\beta,n-1}\}_2 = \left(n + \mu_{\beta} + \frac{1}{2} \right) \{t^{\alpha}(x), H_{\beta,n}\}_1 + \sum_{k=1}^n (R_k)_{\beta}^{\gamma} \{t^{\alpha}(x), H_{\gamma,n-k}\}_1,$$

так что потоки иерархии выражаются в бигамильтоновой форме

$$\frac{\partial t^{\alpha}}{\partial T^{\beta,n}} = \{t^{\alpha}(x), H_{\beta,n}\}_1 = \{t^{\alpha}(x), \tilde{H}_{\beta,n-1}\}_2, \quad (7)$$

где

$$\tilde{H}_{\beta,n-1} = \sum_{k,l} (-1)^k (R_{n-l,k})_{\beta}^{\gamma} \frac{H_{\gamma,l-1}}{(n + \mu_{\beta} + 1/2)^{k+1}},$$

$R_{0,0} = 1, R_{n,0} = 0$ при $n > 0$ и $R_{n,l} = \sum_{i_1+\dots+i_l=n} R_{i_1} \dots R_{i_l}$ при $l > 0$. Можно заметить [10], что выражение (7) для коммутирующих потоков не удовлетворяет второй структуре для пары (β, n) , как только $n + \mu_{\beta} + 1/2 = 0$. Фробениусово многообразие резонантно, если для него есть такая пара (β, n) .

В заключение этого пункта заметим, что временные параметры $\{T^{n,\alpha}\}$ потоков иерархии соответствуют константам связи по отношению к операторам $\sigma_{n,\alpha}$ в топологической теории поля, взаимодействующей с гравитацией (см., например, [24]). Как обычно, мы будем называть пространство, натянутое на $\{T^{\alpha,n}, n = 0, 1, 2, \dots\}$, полным фазовым пространством, а подпространство, параметризованное $\{T^{\alpha,0}\}$, – малым фазовым пространством (здесь индексами $\alpha = 1, 2, \dots, N$ и $n \geq 0$ нумеруются примарные поля и уровни гравитационных потомков соответственно). Для топологической теории поля самые важные величины – корреляционные функции, описывающие топологические свойства ассоциированного многообразия. Производящая функция корреляционных функций – это полная свободная энергия, определяемая как

$$\mathcal{F}(T) = \sum_{g=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(g)}(T) = \sum_{g=0}^{\infty} \langle e^{\sum_{n,\alpha} T^{\alpha,n} \sigma_{n,\alpha}} \rangle_g,$$

где $\langle \dots \rangle_g$ обозначает математическое ожидание на римановой поверхности рода g по отношению к классическому действию. Так называемая примарная свободная энергия $F(t)$ представляет собой просто свободную энергию рода 0, ограниченную на малое фазовое пространство, т.е. $\mathcal{F}^{(0)}|_{T^{\alpha,0}=t^\alpha, T^{n>0,\alpha=0}} = F(t)$. После отождествления плоских координат t^α с двухточечными функциями $\eta^{\alpha\beta} \partial^2 \mathcal{F}^{(0)} / \partial T^{1,0} \partial T^{\beta,0}$ рода 0 выясняется, что потоки иерархии (7) совпадают с топологическим рекуррентным соотношением рода 0 [8].

2.2. Модели с двумя примарными полями.

2.2.1. Бездисперсионная иерархия Тоды. Двумерное фробениусово многообразие, ассоциированное с бездисперсионной иерархией Тоды, описывается примарной свободной энергией [2], [15]

$$F_T(t) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + e^{t^2}, \quad t = (t^1, t^2),$$

удовлетворяющей условию $\mathcal{L}_E F = 2F$, где $E = t^1 \partial_1 + 2\partial_2$. Соответствующую бигамильтонову структуру можно вывести из примарной свободной энергии следующим образом:

$$J_1^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 2e^{t^2} \partial_x + e^{t^2} t_x^2 & t^1 \partial_x \\ t^1 \partial_x + t_x^1 & 2\partial_x \end{pmatrix},$$

а коммутирующие гамильтоновы потоки бездисперсионной иерархии Тоды определяются согласно формуле (7), в которой

$$\tilde{H}_{\beta,n-1} = \frac{1}{n + \mu_\beta + 1/2} \left(H_{\beta,n-1} - 2\delta_{1\beta} \frac{H_{2,n-2}}{n + \mu_\beta + 1/2} \right),$$

где $\mu_1 = -1/2$, $\mu_2 = 1/2$, а резонанс происходит на паре $(\beta, n) = (1, 0)$.

2.2.2. Иерархия Бенни. Двумерное фробениусово многообразие, соответствующее иерархии Бенни, описывается примарной свободной энергией [2], [14]

$$F_B(t) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + \frac{1}{2}(t^2)^2 \left(\ln t^2 - \frac{3}{2} \right),$$

удовлетворяющей условию $\mathcal{L}_E F = 4F$, где $E = t^1 \partial_1 + 2t^2 \partial_2$. Как и в бездисперсионной иерархии Тоды, ассоциированную бигамильтонову структуру можно построить как

$$J_1^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 2\partial_x & t^1 \partial_x + t_x^1 \\ t^1 \partial_x & 2t^2 \partial_x + t_x^2 \end{pmatrix}.$$

Гамильтоновы потоки иерархии Бенни определяются согласно формуле (7) при

$$\tilde{H}_{\beta,n-1} = \frac{1}{n + \mu_\beta + 1/2} \left(H_{\beta,n-1} - 2\delta_{2\beta} \frac{H_{1,n-2}}{n + \mu_\beta + 1/2} \right),$$

где $\mu_1 = 1/2$, $\mu_2 = -1/2$, а резонанс происходит на паре $(\beta, n) = (2, 0)$.

2.2.3. *Бездисперсионная иерархия Гарри Дима.* Для бездисперсионной системы Гарри Дима ассоциированное двумерное фробениусово многообразие описывается примарной свободной энергией [2], [13]

$$F_D(t) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 - \frac{1}{2} \ln t^2,$$

удовлетворяющей условию $\mathcal{L}_E F = 0$, где $E = t^1 \partial_1 - 2t^2 \partial_2$. Соответствующую бигамильтонову структуру можно вывести из F_D :

$$J_1^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{2}{(t^2)^2} \partial_x - \frac{2}{(t^2)^3} t_x^2 & t^1 \partial_x - t_x^1 \\ t^1 \partial_x + 2t_x^1 & -2t^2 \partial_x - t_x^2 \end{pmatrix},$$

коммутирующие гамильтоновы потоки бездисперсионной иерархии Гарри Дима определяются в соответствии с (7) при

$$\tilde{H}_{\beta, n-1} = \frac{1}{n + \mu_\beta + 1/2} \left(H_{\beta, n-1} + 2\delta_{1\beta} \frac{H_{2, n-4}}{n + \mu_\beta + 1/2} \right),$$

где $\mu_1 = -3/2$, $\mu_2 = 3/2$, а резонанс происходит на паре $(\beta, n) = (1, 1)$.

2.2.4. *Динамика политропного газа.* Перейдем к динамике политропного газа. Ассоциированное двумерное фробениусово многообразие описывается примарной свободной энергией [2]

$$F_h(t) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + c_h(t^2)^{h+1}, \quad h \neq -1, 0, 1,$$

которая характеризуется показателем политропы h и удовлетворяет условию $\mathcal{L}_E F_h = (2 + 2/h)F_h$, где $E = t^1 \partial_1 + 2h^{-1}t^2 \partial_2$. Соответствующая бигамильтонова структура имеет вид

$$J_1^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 2c_h(h^2 - 1)(t^2)^{h-1} \partial_x + c_h(h-1)(h^2 - 1)(t^2)^{h-2} t_x^2 & t^1 \partial_x + h^{-1} t_x^1 \\ t^1 \partial_x + (1 - h^{-1}) t_x^1 & 2h^{-1} t^2 \partial_x + h^{-1} t_x^2 \end{pmatrix},$$

коммутирующие гамильтоновы потоки динамики политропного газа определяются формулой (7) при

$$\tilde{H}_{\beta, n-1} = \frac{1}{n + \mu_\beta + 1/2} \left(H_{\beta, n-1} - \sum_{k, \alpha} (R_k)_\beta^\alpha \frac{H_{\alpha, n-k-1}}{n + \mu_\beta + 1/2} \right),$$

где $\mu_1 = 1/h - 1/2$, $\mu_2 = 1/2 - 1/h$, а матрицы R_k заданы формулами [25]

$$(R_k)_\beta^\alpha = \begin{cases} 2(-1)^{m+1} \delta_{k, 2m-1} \delta_{\alpha, 1} \delta_{\beta, 2}, & h = \frac{1}{m}, \quad m \geq 2, \\ 2(-1)^m \delta_{k, 2m+1} \delta_{\alpha, 2} \delta_{\beta, 1}, & h = -\frac{1}{m}, \quad m \geq 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Необходимо обсудить два случая: 1) если $|h|^{-1} \notin \mathbb{N}$, бигамильтоново рекуррентное соотношение – это просто соотношение Ленаарда, и соответствующие фробениусовы многообразия нерезонантны; 2) если $h = 1/m$, $|m| \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, резонанс происходит на паре $(2, m-1)$ при $m \geq 2$ или $(1, -m)$ при $m \leq -2$.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МИУРЫ

3.1. Симметрии ВДВВ как канонические отображения Миуры. Дубровин ввел [2] следующие два типа симметрий уравнений ВДВВ.

Тип 1. Преобразование Лежандра типа S_κ :

$$\hat{t}_\alpha = \partial_\alpha \partial_\kappa F(t), \quad \frac{\partial^2 \hat{F}(\hat{t})}{\partial \hat{t}^\alpha \partial \hat{t}^\beta} = \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}, \quad \hat{\eta}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}, \quad (8)$$

где $\kappa = 2, \dots, N$, так как S_1 – тождественное преобразование. Эйлерово векторное поле преобразуется как $\hat{E}(\hat{t}) = E(t)$, где $\hat{d} = d - 2 + 2d_\kappa$ и $\hat{\mu} = \mu$. Тогда можно показать [2], что векторное поле $\partial/\partial \hat{t}^\kappa$ следует идентифицировать как единицу e , и необходимо переставить индексы 1 и κ после преобразования S_κ .

Тип 2. Преобразование инверсии I :

$$\hat{t}^1 = \frac{1}{2} \frac{t_\sigma t^\sigma}{t^N}, \quad \hat{t}^\alpha = \frac{t^\alpha}{t^N}, \quad \alpha \neq 1, N, \quad \hat{t}^N = -\frac{1}{t^N},$$

$$\hat{F}(\hat{t}) = (\hat{t}^N)^2 F(t) + \frac{1}{2} \hat{t}^1 \hat{t}_\sigma \hat{t}^\sigma, \quad \hat{\eta}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \quad (9)$$

Тогда можно показать, что

$$\hat{c}_{\alpha\beta\gamma}(\hat{t}) = (t^N)^{-2} \frac{\partial t^\lambda}{\partial \hat{t}^\alpha} \frac{\partial t^\mu}{\partial \hat{t}^\beta} \frac{\partial t^\nu}{\partial \hat{t}^\gamma} c_{\lambda\mu\nu}(t), \quad (10)$$

и эйлерово векторное поле преобразуется как $\hat{E}(\hat{t}) = E(t)$, где $\hat{d} = 2 - d$ и $\hat{\mu} = (d-1)(E_{11} - E_{NN}) + \mu$. Заметим, что преобразование Лежандра типа S_κ инволютивно, т.е. $(S_\kappa)^2 = \text{id}$, тогда как преобразование I инволютивно с точностью до эквивалентности:

$$I^2: (t^1, t^2, \dots, t^{N-1}, t^N) \mapsto (t^1, -t^2, \dots, -t^{N-1}, t^N).$$

Исследуем каноническое свойство симметрий ВДВВ, порождаемых преобразованиями S_κ и I . В терминах плоской координаты t^α , $\gamma_\sigma^{\alpha\beta}(t) = 0$, и преобразования ВДВВ S_κ и I в силу (8) и (9) сохраняют первую гамильтонову структуру, т.е.

$$J_1^{\alpha\beta}(t) \mapsto \hat{J}_1^{\alpha\beta}(\hat{t}) = \eta^{\alpha\beta} \partial_x.$$

Поскольку плоская метрика $g^{\alpha\beta}(t)$ зависит от t нетривиально, было бы интересно рассмотреть с преобразованиями второй гамильтоновой структуры под действием S_κ и I .

Тип 1. Преобразование Лежандра типа S_κ . Из (5) и (6) получаем

$$g^{\alpha\beta}(t) \xrightarrow{S_\kappa} \hat{g}^{\alpha\beta}(\hat{t}) = \hat{E}^\gamma(\hat{t}) \hat{c}_\gamma^{\alpha\beta}(\hat{t}) = g^{\alpha\beta}(t),$$

$$\Gamma_\gamma^{\alpha\beta}(t) t_x^\gamma \xrightarrow{S_\kappa} \hat{\Gamma}_\gamma^{\alpha\beta}(\hat{t}) \hat{t}_x^\gamma = \hat{c}_\gamma^{\alpha\epsilon}(\hat{t}) \hat{t}_x^\gamma \left(\frac{1}{2} - \hat{\mu} \right)_\epsilon^\beta = \Gamma_\gamma^{\alpha\beta}(t) t_x^\gamma, \quad (11)$$

где $\hat{\Gamma}_\gamma^{\alpha\beta}(\hat{t})$ – связность по отношению к метрике $\hat{g}^{\alpha\beta}(\hat{t})$. Поэтому получаем

$$J_2^{\alpha\beta}(t) \xrightarrow{S_\kappa} \hat{J}_2^{\alpha\beta}(\hat{t}) = J_2^{\alpha\beta}(t),$$

а это просто преобразование координат.

Тип 2. Преобразование инверсии I . В этом случае, пользуясь (5), (6) и (10), получаем

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}(t) &\xrightarrow{I} \hat{g}^{\alpha\beta}(\hat{t}) = (t^N)^{-2} \frac{\partial t_\lambda}{\partial \hat{t}_\alpha} \frac{\partial t_\mu}{\partial \hat{t}_\beta} g^{\lambda\mu}(t), \\ \Gamma_\gamma^{\alpha\beta}(t) t_x^\gamma &\xrightarrow{I} \hat{\Gamma}_\gamma^{\alpha\beta}(\hat{t}) \hat{t}_x^\gamma = (t^N)^{-2} \frac{\partial t_\lambda}{\partial \hat{t}_\alpha} \frac{\partial t_\mu}{\partial \hat{t}_\epsilon} c_\nu^{\lambda\mu}(t) t_x^\nu \left(\frac{1}{2} - \mu + (1-d)(E_{11} - E_{NN}) \right)_\epsilon^\beta, \end{aligned} \quad (12)$$

откуда имеем

$$J_2^{\alpha\beta}(t) \xrightarrow{I} \hat{J}_2^{\alpha\beta}(\hat{t}) = (t^N)^{-2} \frac{\partial t_\lambda}{\partial \hat{t}_\alpha} \frac{\partial t_\mu}{\partial \hat{t}_\beta} \left[g^{\lambda\mu}(t) \partial_x + c_\nu^{\lambda\mu}(t) t_x^\nu \left(\frac{1}{2} - \mu_\beta + (1-d)(\delta_{\beta,1} - \delta_{\beta,N}) \right) \right].$$

Поскольку $\hat{J}_1^{\alpha\beta}(\hat{t})$ и $\hat{J}_2^{\alpha\beta}(\hat{t})$ образуют плоский пучок по отношению к новой примарной свободной энергии $\hat{F}(\hat{t})$, симметрии ВДВВ можно рассматривать как канонические преобразования Миуры между бигамильтоновыми системами гидродинамического типа.

3.2. Преобразования Миуры между двухпримарными моделями. Теперь применим преобразования ВДВВ к двухпримарным моделям ($N = 2$), перечисленным в табл. 1. Здесь $(S_2)^2 = I^2 = \text{id}$. Заметим, что после преобразования S_2 необходимо переставить индексы 1 и 2.

3.2.1. Иерархия Бенни $\leftrightarrow$ бездисперсионная иерархия Тоды. При преобразовании Лежандра типа S_2 система Бенни преобразуется как [2]

$$\left\{ \begin{aligned} F_B(t) &= \frac{1}{2} (t^1)^2 t^2 + \frac{1}{2} (t^2)^2 \left(\ln t^2 - \frac{3}{2} \right) \\ E_B(t) &= t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + 2t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} \\ (J_1, J_2)_B \end{aligned} \right\} \xrightarrow{S_2} \left\{ \begin{aligned} \hat{F}_T(\hat{t}) &= \frac{1}{2} (\hat{t}^1)^2 \hat{t}^2 + e^{\hat{t}^2} \\ \hat{E}_T(\hat{t}) &= \hat{t}^1 \frac{\partial}{\partial \hat{t}^1} + 2 \frac{\partial}{\partial \hat{t}^2} \\ (\hat{J}_1, \hat{J}_2)_T \end{aligned} \right\},$$

где $t^1 = \hat{t}^2$, $t^2 = e^{\hat{t}^1}$. Проверим каноническое свойство S_2 для J_2 . Из (11) получаем

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{S_2} \hat{g}(\hat{t}) = g(t) = \begin{pmatrix} 2 & \hat{t}^2 \\ \hat{t}^2 & 2e^{\hat{t}^1} \end{pmatrix} \stackrel{(1 \leftrightarrow 2)}{=} \begin{pmatrix} 2e^{\hat{t}^2} & \hat{t}^1 \\ \hat{t}^1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \Gamma_\gamma^{\alpha\beta}(t) t_x^\gamma &\xrightarrow{S_2} \hat{\Gamma}_\gamma^{\alpha\beta}(\hat{t}) \hat{t}_x^\gamma = \Gamma_\gamma^{\alpha\beta}(t) t_x^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \hat{t}_x^2 \\ 0 & \hat{t}_x^1 e^{\hat{t}^1} \end{pmatrix} \stackrel{(1 \leftrightarrow 2)}{=} \begin{pmatrix} \hat{t}_x^2 e^{\hat{t}^2} & 0 \\ \hat{t}_x^1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому бигамильтоновы структуры иерархий Тоды и Бенни канонически связаны преобразованием S_2 .

3.2.2. *Иерархия Бенни* $\leftrightarrow$ *бездисперсионная иерархия Гарри Дима*. При преобразовании инверсии I система Бенни преобразуется следующим образом [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_B(t) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + \frac{1}{2}(t^2)^2 \ln t^2 \\ E_B(t) = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + 2t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} \\ (J_1, J_2)_B \end{array} \right\} \xleftrightarrow{I} \left\{ \begin{array}{l} \widehat{F}_D(\hat{t}) = \frac{1}{2}(\hat{t}^1)^2 \hat{t}^2 - \frac{1}{2} \ln \hat{t}^2 \\ \widehat{E}_D(\hat{t}) = \hat{t}^1 \frac{\partial}{\partial \hat{t}^1} - 2\hat{t}^2 \frac{\partial}{\partial \hat{t}^2} \\ (\widehat{J}_1, \widehat{J}_2)_D \end{array} \right\},$$

где $t^1 = \hat{t}^1$, $t^2 = -1/\hat{t}^2$. Чтобы проверить каноническое свойство при инверсии I , определим матрицу

$$S^\alpha_\lambda = \left(\frac{\partial t_\lambda}{\partial \hat{t}_\alpha} \right) = \begin{pmatrix} 1/(\hat{t}^2)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда из (12) имеем

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}(t) &\xrightarrow{I} \hat{g}^{\alpha\beta}(\hat{t}) = \frac{1}{(t^2)^2} S^\alpha_\lambda g^{\lambda\mu}(S^t)_\mu^\beta = \begin{pmatrix} \frac{2}{(\hat{t}^2)^2} & \hat{t}^1 \\ \hat{t}^1 & -2\hat{t}^2 \end{pmatrix}, \\ \Gamma_\gamma^{\alpha\beta}(t) t^\gamma_x &\xrightarrow{I} \widehat{\Gamma}^{\alpha\beta}_\gamma(\hat{t}) \hat{t}^\gamma_x = (t^2)^{-2} S^\alpha_\lambda (c^\lambda_\nu(t) t^\nu_x) (S^t)_\mu^\epsilon \left(\frac{1}{2} + 2(E_{11} - E_{22}) - \mu \right)_\epsilon^\beta = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2\hat{t}^2_x}{(\hat{t}^2)^3} & -\hat{t}^1_x \\ 2\hat{t}^1_x & -\hat{t}^2_x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Значит, бигамильтонова структура иерархии Бенни отображается в структуру бездисперсионной иерархии Гарри Дима.

3.2.3. *Политропный газ* $\leftrightarrow$ *бездисперсионная иерархия Гарри Дима*. При преобразовании Лежандра типа S_2 динамика политропного газа с $h = 1/2$ преобразуется как

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{1/2}(t) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + c_{1/2}(t^2)^{3/2} \\ E_{1/2}(t) = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + 4t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} \\ (J_1, J_2)_{1/2} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{S_2} \left\{ \begin{array}{l} \widehat{F}_D(\hat{t}) = \frac{1}{2}(\hat{t}^1)^2 \hat{t}^2 - \frac{1}{2} \ln \hat{t}^2 \\ \widehat{E}_D(\hat{t}) = \hat{t}^1 \frac{\partial}{\partial \hat{t}^1} - 2\hat{t}^2 \frac{\partial}{\partial \hat{t}^2} \\ (\widehat{J}_1, \widehat{J}_2)_D \end{array} \right\},$$

где $t^1 = \hat{t}^2$, $t^2 = \frac{1}{2(\hat{t}^1)^2}$, $c_{1/2} = \frac{2^{3/2}}{3}$.

3.2.4. *Политропный газ* $\leftrightarrow$ *политропный газ*. При преобразовании Лежандра типа S_2 система политропного газа с показателем $h \neq 1/2$ преобразуется как

$$\left\{ \begin{array}{l} F_h(t) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + c_h(t^2)^{1+h} \\ E_h(t) = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{2}{h} t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} \\ (J_1, J_2)_h \end{array} \right\} \xleftrightarrow{S_2} \left\{ \begin{array}{l} \widehat{F}_{\frac{h}{h-1}}(\hat{t}) = \frac{1}{2}(\hat{t}^1)^2 \hat{t}^2 + \hat{c}_{\frac{h}{h-1}}(\hat{t}^2)^{1+\frac{h}{h-1}} \\ \widehat{E}_{\frac{h}{h-1}}(\hat{t}) = \hat{t}^1 \frac{\partial}{\partial \hat{t}^1} - \frac{2(1-h)}{h} \hat{t}^2 \frac{\partial}{\partial \hat{t}^2} \\ (\widehat{J}_1, \widehat{J}_2)_{\frac{h}{h-1}} \end{array} \right\},$$

где

$$t^1 = \hat{t}^2, \quad t^2 = \left(\frac{\hat{t}^1}{c_h h(1+h)} \right)^{\frac{1}{h-1}}, \quad \hat{c}_{\frac{h}{h-1}} = \frac{(h-1)^2}{h(2h-1)} (c_h h(h+1))^{\frac{1}{1-h}}.$$

С другой стороны, при преобразовании инверсии I система политропного газа преобразуется как

$$\left\{ \begin{array}{l} F_h(t) = \frac{1}{2} (t^1)^2 t^2 + c_h (t^2)^{1+h} \\ E_h(t) = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{2}{h} t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} \\ (J_1, J_2)_h \end{array} \right\} \xleftrightarrow{I} \left\{ \begin{array}{l} \hat{F}_{-h}(\hat{t}) = \frac{1}{2} (\hat{t}^1)^2 \hat{t}^2 + \hat{c}_{-h} (\hat{t}^2)^{1-h} \\ \hat{E}_{-h}(\hat{t}) = \hat{t}^1 \frac{\partial}{\partial \hat{t}^1} - \frac{2}{h} \hat{t}^2 \frac{\partial}{\partial \hat{t}^2} \\ (\hat{J}_1, \hat{J}_2)_{-h} \end{array} \right\},$$

где $t^1 = \hat{t}^1$, $t^2 = -1/\hat{t}^2$, $\hat{c}_{-h} = (-1)^{1-h} c_h$.

3.3. Пространство модулей. Как видно из приведенных выше рассуждений, отношение между четырьмя типами двухпримарных моделей можно проиллюстрировать следующей последовательностью преобразований ВДВВ.

3.3.1. Резонантная последовательность. Двумерные фробениусовы многообразия, в том числе F_T , F_B , F_D и F_h , $|h|^{-1} \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, все резонантны, и преобразования Миуры между ними составляют последовательность преобразований ВДВВ:

$$F_0 \dots F_{\frac{1}{n+1}} \xleftrightarrow{S_2} F_{-\frac{1}{n}} \xleftrightarrow{I} F_{\frac{1}{n}} \dots F_{-\frac{1}{2}} \xleftrightarrow{I} F_{\frac{1}{2}} \xleftrightarrow{S_2} F_D \xleftrightarrow{I} F_B \xleftrightarrow{S_2} F_T, \quad (13)$$

где коэффициент $c_{1/n}$ ($n \geq 2$) в $F_{1/n}$ можно вычислить по формуле

$$c_{1/n} = \frac{(-1)^n n^{(n-1)/n} (n!)^{2/n}}{n^2 - 1}.$$

Поскольку функция F_0 инвариантна относительно преобразований S_2 и I , резонантная последовательность заканчивается слева на предельной функции F_0 . Справа резонантная последовательность заканчивается на функции F_T , так как при преобразовании инверсии I преобразованная примарная свободная энергия более не удовлетворяет условию квазиоднородности (3).

3.3.2. Нерезонантные последовательности. Для систем политропного газа, определенных функцией F_h , где $|h|^{-1} \notin \mathbb{N}$, имеем

$$F_0 \dots \xleftrightarrow{I} F_{\frac{h}{kh+1}} \xleftrightarrow{S_2} \dots F_{\frac{h}{h+1}} \xleftrightarrow{S_2} F_{-h} \xleftrightarrow{I} F_h \xleftrightarrow{S_2} F_{\frac{h}{h-1}} \dots \xleftrightarrow{S_2} F_{\frac{h}{kh-1}} \xleftrightarrow{I} \dots F_0. \quad (14)$$

Можно заметить, что F_2 – тоже функция, инвариантная относительно S_2 , так что последовательность, порожденная F_2 , полубесконечна, а именно

$$F_0 \dots \xleftrightarrow{I} F_{\frac{2}{2k+1}} \xleftrightarrow{S_2} \dots F_{\frac{2}{3}} \xleftrightarrow{S_2} F_{-2} \xleftrightarrow{I} \widehat{F_2}.$$

С нерезонантными последовательностями связаны некоторые особые свойства.

1. Никакие два показателя политропы не совпадают в последовательности преобразований ВДВВ. Это следует из того факта, что для нерезонантной последовательности (14), содержащей F_h , возможные значения показателя политропы – это $\pm h/(kh \pm 1)$, где $k \geq 0$, $h > 0$ и $h^{-1} \notin \mathbb{N}$. Если два показателя в последовательности совпадают, это с необходимостью происходит в случае $h/(kh + 1) = \pm h/(k'h \pm 1)$. Однако все эти случаи приводят к противоречиям.

2. Любые две нерезонантные последовательности либо не имеют общих элементов, либо полностью перекрываются. Две нерезонантные последовательности, связанные с F_h и $F_{h'}$, $h \neq h'$, $h > 0$, $h' > 0$, могут иметь общий элемент только при $\pm h/(kh \pm 1) = \pm h'/(k'h' \pm 1)$, где $k \geq 0$, $k' \geq 0$, а h и h' принадлежат разным последовательностям. Однако, например, если $h/(kh + 1) = h'/(k'h' + 1)$, то $h' = h/((k - k')h + 1)$, и, таким образом, h и h' принадлежат одной и той же последовательности. Другие случаи проверяются аналогично.

Перечисленные выше свойства позволяют ввести фундаментальный интервал, параметризованный показателем политропы h , чтобы каждая последовательность имела в этом интервале характерное значение h . Оказывается, что в качестве пространства модулей для двухпримарных моделей можно выбрать один из следующих интервалов:

$$\mathbf{D}_n = \left\{ h \mid h \in \left[\frac{2}{2n+1}, \frac{1}{n} \right] \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

с той оговоркой, что для иерархий Тоды, Бенни и Гарри Дима “эффективным” показателем политропы присвоены значения ∞ , 1 и -1 соответственно. Заметим, что интервалы $\mathbf{D}_n$ изоморфны факторпространству $\mathbb{R}P_1^\times / \{S_2, I\}$, где $\mathbb{R}P_1^\times = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \setminus \{0\}$, и изоморфны друг другу посредством отображения $S_2 I: \mathbf{D}_n \rightarrow \mathbf{D}_{n+1}$. В работе [2] было отмечено, что фробениусово многообразие называется *приведенным*, если оно удовлетворяет неравенству

$$0 \leq q_\alpha \leq d \leq 1, \quad (15)$$

и любое решение ВДВВ с помощью преобразований S_κ и I можно свести к решению, удовлетворяющему свойству (15). Это действительно так для двухпримарных моделей, поскольку $\mathbf{D}_0 = \{h \mid h \in [2, \infty]\}$ – как раз единственный фундаментальный интервал, удовлетворяющий неравенству (15).

4. СИММЕТРИИ ВДВВ КАК КВАНТОВЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МИУРЫ

Выше мы обсуждали бигамильтоновы системы рода 0. Для исследования более высоких родов мы можем обратиться к работе Дубровина и Чжана [23], которая предоставляет начальную точку для продолжения бигамильтоновой гидродинамической системы на ее дисперсионный аналог и получения соответствующих коммутирующих потоков с точностью до поправок в роде 1. Подход Дубровина–Чжана содержит два основных момента: 1) введение медленного масштабирования пространственных и временных переменных $T^{\alpha, n} \rightarrow \epsilon T^{\alpha, n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; 2) замену полной свободной энергии $\mathcal{F} \rightarrow \sum_{g=0}^{\infty} \epsilon^{2g-2} \mathcal{F}^{(g)}$, где ϵ – параметр разложения по родам. Таким образом, все поправки выражаются в виде рядов по ϵ . Для получения однозначной поправки к гамильтоновым потокам (7) в случае рода 1 можно

разложить плоские координаты до порядка ϵ^2 : $t_\alpha = t_\alpha^{(0)} + \epsilon^2 t_\alpha^{(1)} + O(\epsilon^4)$, $t_\alpha = \eta_{\alpha\beta} t^\beta$, где $t_\alpha^{(0)}$ – обычные плоские координаты, а $t_\alpha^{(1)}$ – поправки в роде 1, определяемые как $t_\alpha^{(1)} = \partial^2 \mathcal{F}^{(1)}(T)/\partial T^{\alpha,0} \partial x$. Часть свободной энергии для рода 1 имеет вид [23]

$$\mathcal{F}^{(1)}(T) = \frac{1}{24} \ln \det M_\beta^\alpha(t, \partial_x t) + G(t),$$

где матрица $M_\beta^\alpha(t, \partial_x t) = c_{\beta\gamma}^\alpha(t) t_x^\gamma$, а $G(t)$ – так называемая G -функция, зависящая от $(t^2, \dots, t^N)$ и удовлетворяющая уравнению Гецлера [26]. Используя $c_{\beta\gamma}^\alpha(t)$ и $\mathcal{F}^{(1)}(t)$ и следуя процедуре, изложенной в работе [23] (теоремы 1, 2 и предложение 3), можно получить поправки к скобкам Пуассона и потокам иерархии для рода 1. Это означает, что бигамильтоновы структуры J_1 и J_2 и гамильтонианы получают поправки вплоть до порядка ϵ^2 , так что гамильтоновы потоки по-прежнему будут коммутировать. Из (8) и (9) имеем

$$\begin{aligned} M_\beta^\alpha(t) &\xrightarrow{S_\kappa} \widehat{M}_\beta^\alpha(\hat{t}) = M_\beta^\alpha(t), \\ M_\beta^\alpha(t) &\xrightarrow{I} \widehat{M}_\beta^\alpha(\hat{t}) = (t^N)^{-2} \frac{\partial t_\lambda}{\partial \hat{t}_\alpha} \frac{\partial t^\mu}{\partial \hat{t}^\beta} M_\mu^\lambda(t). \end{aligned}$$

С другой стороны, преобразования G -функции при симметриях ВДВВ были получены Стречаном [27] в виде

$$\begin{aligned} G(t) &\xrightarrow{S_\kappa} \widehat{G}(\hat{t}) = G(t) - \frac{1}{24} \ln \det \left(\frac{\partial \hat{t}^\alpha}{\partial t^\beta} \right), \\ G(t) &\xrightarrow{I} \widehat{G}(\hat{t}) = G(t) + \left(\frac{N}{24} - \frac{1}{2} \right) \ln t^N. \end{aligned}$$

Собирая приведенные результаты, получаем преобразования ВДВВ для свободной энергии $\mathcal{F}^{(1)}$ рода 1 в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(1)}(t) &\xrightarrow{S_\kappa} \widehat{\mathcal{F}}^{(1)}(\hat{t}) = \mathcal{F}^{(1)}(t) - \frac{1}{24} \ln \det c_{\kappa\beta}^\alpha(t), \\ \mathcal{F}^{(1)}(t) &\xrightarrow{I} \widehat{\mathcal{F}}^{(1)}(\hat{t}) = \mathcal{F}^{(1)}(t) + \left(\frac{N}{24} - \frac{1}{2} \right) \ln t^N, \end{aligned}$$

где мы использовали формулу $\det(\partial \hat{t}^\alpha / \partial t^\beta) = (t^N)^{-N}$ для преобразования инверсии I .

Для двухпримарных моделей ($N = 2$) в табл. 2 приводятся G -функции и свободные энергии $\mathcal{F}^{(1)}$ рода 1.

Действительно, как резонантные, так и нерезонантные последовательности преобразований ВДВВ для свободной энергии рода 0 можно переписать для рода 1. Например, рассмотрим свободную энергию рода 1 системы Бенни при преобразовании S_2 :

$$\mathcal{F}_B^{(1)}(t) \xrightarrow{S_2} \widehat{\mathcal{F}}^{(1)}(\hat{t}) = \frac{1}{24} \ln [(\hat{t}_x^2)^2 - (\hat{t}_x^1)^2 e^{\hat{t}^1}] - \frac{1}{24} \hat{t}^1 \stackrel{(1 \leftrightarrow 2)}{=} \frac{1}{24} \ln [(\hat{t}_x^1)^2 - (\hat{t}_x^2)^2 e^{\hat{t}^2}] - \frac{1}{24} \hat{t}^2,$$

что является просто свободной энергией рода 1 бездисперсионной иерархии Тоды $\widehat{\mathcal{F}}_T^{(1)}(\hat{t})$. Подобным образом другие преобразования между свободными энергиями рода 0 в последовательностях (13) и (14) можно легко поднять до свободных энергий рода 1.

ТАБЛИЦА 2. G -функция и свободная энергия $\mathcal{F}^{(1)}$ рода 1 двухпримарных моделей

Модель	G -функция	$\mathcal{F}^{(1)}$
Политропный газ	$-\frac{1}{24} \frac{(2-h)(3-h)}{h} \ln t^2$	$\frac{1}{24} \ln [(t_x^1)^2 - h(h^2 - 1)c_h(t^2)^{h-2}(t_x^2)^2] -$ $-\frac{1}{24} \frac{(h-2)(h-3)}{h} \ln t^2$
Бездисперсионная иерархия Гарри Дима	$\frac{1}{2} \ln t^2$	$\frac{1}{24} \ln [(t^2)^3(t_x^1)^2 + (t_x^2)^2] + \frac{3}{8} \ln t^2$
Иерархия Бенни	$-\frac{1}{12} \ln t^2$	$\frac{1}{24} \ln [t^2(t_x^1)^2 - (t_x^2)^2] - \frac{1}{8} \ln t^2$
Бездисперсионная иерархия Тоды	$-\frac{1}{24} t^2$	$\frac{1}{24} \ln [(t_x^1)^2 - (t_x^2)^2 e^{t^2}] - \frac{1}{24} t^2$

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы исследовали симметрии уравнений ВДВВ, введенные Дубровиным, основываясь на бигамильтоновой точке зрения. Мы показали, что эти симметрии можно рассматривать как канонические преобразования Миуры между бигамильтоновыми системами гидродинамического типа рода 0. В частности, оказалось, что пространство модулей двухпримарных моделей характеризуется показателем политропы h . Также обсуждются свойства преобразований свободной энергии на уровне рода 1.

Следует сделать два замечания. Во-первых, результат, полученный в разделе 4, наводит на мысль, что бигамильтоновы структуры двухпримарных моделей вплоть до поправок в роде 1 канонически связаны с преобразованиями ВДВВ. Во-вторых, преобразования ВДВВ интерпретировались в работе [28] с точки зрения обратных преобразований. Было бы интересно обсудить данную проблему в формализме Дарбу–Егорова. Сейчас ведутся работы в этих направлениях.

Благодарности. Авторы благодарны М. В. Павлову за полезные комментарии. Работа поддержана National Science Council of Taiwan (грант № NSC97-2112-M-194-002-MY3).

Список литературы

- [1] I. M. Krichever, *Comm. Math. Phys.*, **143**:2 (1992), 415–429.
- [2] B. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable Systems and Quantum Group*, Lecture Notes in Math., **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Berlin, Springer, 1996, 120–348.
- [3] Yu. I. Manin, *Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology, and Moduli Spaces*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **47**, AMS, Providence, RI, 1999.
- [4] N. Hitchin, “Frobenius manifolds”, With notes by D. Calderbank, *Gauge Theory and Symplectic Geometry*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C, **488**, eds. J. Hurtubise, F. Lalonde, G. Sabidussi, Kluwer, Dordrecht, 1997, 69–112.
- [5] C. Hertling, *Frobenius Manifolds and Moduli Spaces for Singularities*, Cambridge Tracts in Math., **151**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

- [6] K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, E. Zaslow, *Mirror Symmetry*, Clay Math. Monogr., **1**, Providence, RI, AMS, 2003.
- [7] I. A. B. Strachan, *J. Math. Phys.*, **40**:10 (1999), 5058–5079.
- [8] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **340**:2–3 (1990), 281–332.
- [9] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde, *Nucl. Phys. B*, **352**:1 (1991), 59–86.
- [10] B. Dubrovin, *Nucl. Phys. B*, **379**:3 (1992), 627–689.
- [11] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Pure Appl. Math., Wiley, New York–London–Sydney, 1974.
- [12] P. J. Olver, Y. Nutku, *J. Math. Phys.*, **29**:7 (1988), 1610–1619.
- [13] Y.-T. Chen, M.-H. Tu, *Lett. Math. Phys.*, **63**:2 (2003), 125–139.
- [14] J.-H. Chang, M.-H. Tu, *J. Phys. A*, **34**:2 (2001), 251–272.
- [15] T. Eguchi, S.-K. Yang, *Modern Phys. Lett. A*, **9**:31 (1994), 2893–2902.
- [16] B. Dubrovin, Y. Zhang, *Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov–Witten invariants*, [arXiv: math.DG/0108160](https://arxiv.org/abs/math/0108160).
- [17] B. Dubrovin, “On almost duality for Frobenius manifolds”, *Geometry, Topology, and Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **212**, eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, Providence, RI, AMS, 2004, 75–132.
- [18] A. Riley, I. A. B. Strachan, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **14**:1 (2007), 82–94.
- [19] K. Takasaki, T. Takebe, *Rev. Math. Phys.*, **7**:5 (1995), 743–808.
- [20] S. Aoyama, Y. Kodama, *Comm. Math. Phys.*, **182**:1 (1996), 185–219.
- [21] L.-C. Li, *Comm. Math. Phys.*, **203**:3 (1999), 573–592.
- [22] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *ДАН СССР*, **279**:2 (1984), 294–297.
- [23] B. Dubrovin, Y. Zhang, *Comm. Math. Phys.*, **198**:2 (1998), 311–361.
- [24] R. Dijkgraaf, “Intersection theory, integrable hierarchies and topological field theory”, *New Symmetry Principles in Quantum Field Theory*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B, **295**, eds. J. Fröhlich, G. ’t Hooft, A. Jaffe, G. Mack, P. K. Mitter, R. Stora, Plenum, New York, 1992, 95–158.
- [25] Y.-T. Chen, N.-C. Lee, M.-H. Tu, *J. Math. Phys.*, **48**:7 (2007), 072702.
- [26] E. Getzler, *J. Amer. Math. Soc.*, **10**:4 (1997), 973–998.
- [27] I. A. B. Strachan, *Int. Math. Res. Not.*, **2003**:19 (2003), 1035–1051.
- [28] М. В. Павлов, *ТМФ*, **150**:2 (2007), 263–285.

Поступила в редакцию 9.03.2009