Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Я. Арефьева, А. А. Багров, Формирование ловушечных поверхностей в столкновениях нерасширяющихся гравитационных ударных волн в пространстве-времени AdS_4 , *ТМФ*, 2009, том 161, номер 3, 382–399

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6448>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:34:49

© 2009 г.

И. Я. Арефьева*, А. А. Багров*

ФОРМИРОВАНИЕ ЛОВУШЕЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В СТОЛКНОВЕНИЯХ НЕРАСШИРЯЮЩИХСЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ AdS_4

Изучается формирование маргинальных ловушечных поверхностей при лобовом столкновении двух ударных волн в пространстве-времени анти-де Ситтера. Полученные результаты сопоставляются с соответствующими результатами для пространства-времени де Ситтера. Чтобы сделать это сравнение более ясным, используются координаты, позволяющие описать случаи пространств анти-де Ситтера и де Ситтера универсальным образом. Изучается также зависимость площади ловушечной поверхности от выбора регуляризации метрики ударной волны.

Ключевые слова: пространство анти-де Ситтера, ловушечная поверхность, столкновения ударных волн, черные дыры.

1. ВВЕДЕНИЕ

Возможность формирования черных дыр при столкновении ультрарелятивистских точечных частиц в пространстве-времени Минковского является общепризнанным теоретическим фактом [1]–[3]. В последнее время в связи с возникновением парадигмы ТЭВ-й гравитации [4] формирование черных дыр при столкновениях частиц с энергией порядка нескольких ТЭВ в системе центра масс и возможные экспериментальные проявления данного процесса [5] стали предметом многочисленных всесторонних исследований [6]–[10]. Отдельно стоит отметить предполагаемую возможность рождения других, более экзотических объектов на ЛНС [11]–[13]. Рождение черных дыр при столкновениях ультрарелятивистских частиц в пространствах де Ситтера (dS) и анти-де Ситтера (AdS) также является предметом активного обсуждения [14], [16].

Отрицательная космологическая постоянная приводит к коллапсу материи, в то время как положительная способствует ее отталкиванию, и поэтому естественно ожидать, что отрицательная космологическая постоянная катализирует процесс рождения черных дыр, а положительная ослабляет его.

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: arefeva@mi.ras.ru, bagrov.andrey@googlegmail.com

В настоящей работе мы проводим детальное изучение процесса формирования маргинальной ловушечной поверхности при лобовом столкновении двух ударных волн в пространстве-времени AdS . В частности, анализируется зависимость физических параметров от типа регуляризации δ -функции, возникающей в метрике ударной волны. Также мы изучаем площадь ловушечной поверхности как функцию отношения космологического радиуса и энергии ударной волны. Отметим, что в предположении, что пространство-время является асимптотически плоским, наличие ловушечной поверхности гарантирует существование горизонта событий [17]–[20]. Для пространства AdS подобных теорем доказано не было, однако считается, что существование ловушечных поверхностей может служить индикатором формирования черной дыры.

Основная мотивация наших рассмотрений связана с AdS/CFT -соответствием. Несмотря на отсутствие голографического дуального описания КХД, в работах [21], [22] был предложен способ описания сталкивающихся тяжелых ионов в терминах сталкивающихся ударных гравитационных волн в пространстве-времени AdS . Формирование черных дыр в объемлющем пространстве при столкновениях объектов, дуальных к ядрам, интерпретируется в пространстве на единицу меньшей размерности как формирование кварк-глюонной плазмы [23]–[25].

Недавно в пространстве AdS был обнаружен критический эффект, зависящий от размерности пространства и проявляющийся при столкновении сглаженных ударных гравитационных волн [14]. При $D = 4$ и $D = 5$ существует критическое значение величины “размывки” ударных волн в направлении их движения, выше которого формирование ловушечной поверхности при столкновении становится невозможным. Стоит заметить, что полученные для случая AdS результаты находятся в качественном согласии с аналогичными результатами, полученными для плоского пространства-времени.

Настоящая статья организована следующим образом. Мы начинаем с введения основных математических объектов и напоминаем некоторые базовые факты, касающиеся обобщения геометрии ударной волны Айхельбурга–Зексла [26]–[28] на случай нерасширяющихся ударных волн в D -мерном пространстве-времени с нетривиальной космологической постоянной [29]–[37]. В разделе 3 представлены уравнения для ловушечной поверхности в терминах комплексных координат. Эти координаты особенно удобны для анализа четырехмерного случая. В общем случае ловушечная поверхность может быть найдена как решение частной задачи Дирихле для оператора Бельтрами–Лапласа на гиперboloиде, на котором локализована ударная волна. Завершается данная статья сравнением наших результатов с результатами работ [14], [15], полученными в другой системе координат.

2. УДАРНАЯ ВОЛНА В КОМПЛЕКСНЫХ КООРДИНАТАХ

2.1. Ударная волна в плоских координатах. Для начала позволим себе кратко напомнить основные результаты работ [29], [33], [36], посвященные геометрии ударных волн, распространяющихся в четырехмерном пространстве-времени AdS (о гравитационных волнах см. монографию [38]). В терминах связи пятимерных

Рис. 1. Единичная ударная волна в AdS (а); столкновение двух ударных волн при $Z : 0 = 0$ (б).

плоских координат $(U, V, \vec{Z}, Z^4)$, $\vec{Z} = (Z^2, Z^3)$, удовлетворяющих условию

$$-2UV + \vec{Z}^2 - Z^{4^2} = -a^2, \quad (2.1)$$

элементарный интервал в пространстве-времени, содержащем ударную волну, представляется в виде

$$ds^2 = -2dU dV + d\vec{Z}^2 - (dZ^4)^2 + F(Z^4)\delta(U) dU^2, \quad (2.2)$$

где U, V связаны с Z_0 и Z_1 как $U = (Z_0 + Z_1)/\sqrt{2}$, $V = (Z_0 - Z_1)/\sqrt{2}$.

Формфактор ударной волны F является фундаментальным решением уравнения

$$\left(\Delta_{\mathbb{H}^2} - \frac{2}{a^2}\right)F = -16\sqrt{2}\pi G_4 \bar{p} \delta(\vec{n}, \vec{n}_0), \quad (2.3)$$

где $\Delta_{\mathbb{H}^2}$ – оператор Бельтрами–Лапласа на двумерном гиперboloиде $\mathbb{H}^2$, $\vec{Z}^2 - Z^{4^2} = -a^2$, $\vec{n}_0$ – положение частицы на гиперboloиде, $\bar{p}$ – энергия ударной волны, а G_4 – четырехмерная гравитационная постоянная. Множитель $\sqrt{2}$ в правой части уравнения обусловлен нашим выбором системы координат (если в метрике пространства AdS и ударной волны мы положим $-dU dV$ вместо $-2dU dV$, то этот множитель не возникнет). Эта метрика является решением уравнений Гильберта–Эйнштейна с тензором энергии-импульса, обладающим единственной нетривиальной компонентой $T_{UU} \sim \bar{p}\delta(U)$.

Для параметризации $Z^4 = a\xi$ получим

$$F(\xi) = 4\sqrt{2}p \left(-2 + \xi \ln \left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right) \right), \quad (2.4)$$

где $p = \bar{p}G_4$ – перемасштабированная энергия волны и $\xi > 1$.

На рис. 1а схематически изображена единичная ударная волна в четырехмерном пространстве-времени AdS . Последнее представлено как гиперboloид, погруженный в $(D + 1)$ -мерное пространство-время Минковского. Координаты Z_2 и Z_3 на рисунке не изображены. Ударная волна локализована на пересечении гиперboloида с гиперплоскостью $Z^0 - Z^1 = 0$, $U = (Z^0 + Z^1)/\sqrt{2}$, $V = (Z^0 - Z^1)/\sqrt{2}$.

 Рис. 2. Ударная волна в AdS в дискретные моменты Z^0 -времени.

На рис. 1б изображены две ударные волны, сталкивающиеся при $U = V = 0$.

Рассмотрим столкновение двух ударных волн описанного выше типа. Мы предполагаем, что в области $\{U < 0\} \cup \{V < 0\}$, т.е. в той части пространства-времени, которая предшествует столкновению, метрика определяется выражением

$$ds^2 = -2dUdV + d\vec{Z}^2 - (dZ^4)^2 + F(\xi, \xi_1)\delta(U)dU^2 + F(\xi, \xi_2)\delta(V)dV^2. \quad (2.5)$$

Здесь ξ_1, ξ_2 – координаты положения двух сталкивающихся частиц (явная форма функции $F(\xi, \xi_i)$ приведена в работе [29]).

Мы также можем изобразить положение единичной ударной волны в различные дискретные моменты времени. Из рис. 2 легко понять, что ударная волна является нерасширяющейся.

Далее мы собираемся использовать независимые комплексные координаты, удобные для универсального описания пространств dS и AdS .

2.2. Метрика ударной волны в независимых координатах. Для изучения структуры пространства-времени в терминах независимых четырехмерных координат удобно использовать комплексные конформно-плоские координаты

$$w = \frac{2aU}{Z^4 + a}, \quad \sigma = \frac{2aV}{Z^4 + a}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}a}{Z^4 + a}(Z^2 + iZ^3). \quad (2.6)$$

В этих координатах метрика ударной волны имеет вид

$$ds^2 = \frac{-2dw d\sigma + 2d\zeta d\bar{\zeta} + 2H(\zeta, \bar{\zeta})\delta(w)dw^2}{[1 \pm (w\sigma - \zeta\bar{\zeta})/(2a^2)]^2}, \quad (2.7)$$

где

$$H(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{2a^2} \zeta \bar{\zeta} \right) F \left(a \frac{1 \pm \zeta \bar{\zeta}/(2a^2)}{1 \mp \zeta \bar{\zeta}/(2a^2)} \right) \quad (2.8)$$

и F задается выражением (2.4). Таким образом,

$$H(\zeta, \bar{\zeta}) = 2\sqrt{2}p \left(1 \mp \frac{1}{2a^2} \zeta \bar{\zeta} \right) \left(-2 + \frac{1 \pm \zeta \bar{\zeta}/(2a^2)}{1 \mp \zeta \bar{\zeta}/(2a^2)} \ln \left(\frac{2a^2}{\zeta \bar{\zeta}} \right) \right) \quad (2.9)$$

и знак $\mp$ здесь отвечает пространствам AdS и dS соответственно.

Ударная волна располагается на двумерном гиперboloиде (далее мы рассматриваем только случай AdS , см. рис. 2), а индуцированная метрика на нем задается формулой

$$ds^2 = \frac{2 d\zeta d\bar{\zeta}}{(1 - \zeta\bar{\zeta}/(2a^2))^2}. \quad (2.10)$$

Перемасштабированный формфактор $H(\zeta, \bar{\zeta})$, поделенный на $(1 \mp \zeta\bar{\zeta}/(2a^2))$, является фундаментальным решением уравнения Бельтрами–Лапласа на двумерном гиперboloиде:

$$\left(\Delta_{\mathbb{H}^2} - \frac{2}{a^2}\right) \frac{H(\zeta, \bar{\zeta})}{1 - \zeta\bar{\zeta}/(2a^2)} = -8\sqrt{2} \pi \bar{p} G_4 \delta(\zeta) \delta(\bar{\zeta}), \quad (2.11)$$

где

$$\Delta_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\zeta\bar{\zeta}}{2a^2}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}, \quad (2.12)$$

или же в терминах координат $\rho, \varphi, \zeta = \rho e^{i\varphi}$

$$\Delta_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho^2}{2a^2}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right). \quad (2.13)$$

Поскольку H , определяемое формулой (2.11), зависит только от ρ , мы имеем дело с фундаментальным решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho^2}{2a^2}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho}\right) \frac{H(\rho)}{1 - \rho^2/(2a^2)} = -8\sqrt{2} \pi \bar{p} G_4 \delta(\rho). \quad (2.14)$$

2.3. Геодезические в терминах независимых координат. Явные выражения для геодезических в терминах объемных пятимерных координат известны:

$$V = V_0 + V_1 U + Q(Z_0^j) \theta(U) + R(Z_0^j) \theta(U) U, \quad (2.15)$$

$$Z^i = Z_0^i + Z_1^i U + S_i(Z_0^j) \theta(U) U, \quad (2.16)$$

где

$$Q(Z_0^i) = \frac{1}{2} F(Z_0^i), \quad (2.17)$$

$$S^i(Z_0^i) = \frac{1}{2} F_{,i} + \frac{1}{2a^2} (F - Z_0^j F_{,j}) Z_0^i, \quad (2.18)$$

$$R(Z_0^j) = \frac{1}{2} F_{,i} Z_1^i + \frac{1}{2a^2} (F - Z_0^i F_{,i}) V_0 + \frac{1}{8} F_{,i}^2 + \frac{1}{8a^2} (F^2 - (Z_0^i F_{,i})^2). \quad (2.19)$$

Эти формулы были получены путем непосредственного анализа уравнений со связями для геодезических в работе [16], а также путем применения теорем о погружении многообразий в статье [34]. Здесь и далее мы будем пользоваться соглашением

$$\theta(0) = \frac{1}{2}. \quad (2.20)$$

Хотя функция Хевисайда является обобщенной функцией и ее значение в одной точке не должно играть существенной роли при физически осмысленных вычислениях,

здесь мы вынуждены иметь дело с таким объектом, как $\theta(0)$. В нашей следующей работе мы планируем детально изучить этот аспект и провести аккуратную процедуру регуляризации. Но в данной статье мы просто будем пользоваться соглашением (2.20).

Используя замену координат (2.6), мы получаем выражения для геодезических в терминах независимых координат. С точностью до первого порядка по U имеем

$$\begin{aligned} w(U) &= w_1 U + \dots, \\ \sigma(U) &= \sigma_0 + \sigma_1 U + \dots \equiv \sigma_{0c} + \sigma_{0\theta} \theta(U) + (\sigma_{1c} + \sigma_{1\theta} \theta(U)) U + \dots, \\ \zeta(U) &= \zeta_0 + \zeta_1 U + \dots \equiv \zeta_{0c} + \zeta_{0\theta} \theta(U) + (\zeta_{1c} + \zeta_{1\theta} \theta(U)) U + \dots, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$w_1 = \frac{2}{1 + Z_0^4/a}, \quad (2.22)$$

$$\sigma_{0c} = \frac{2V_0}{1 + Z_0^4/a}, \quad (2.23)$$

$$\sigma_{0\theta} = \frac{2Q(Z_0^i)}{1 + Z_0^4/a}, \quad (2.24)$$

$$\sigma_{1c} = 2 \left(\frac{V_1}{1 + Z_0^4/a} - \frac{Z_1^4}{a} \frac{V_0}{(1 + Z_0^4/a)^2} \right), \quad (2.25)$$

$$\sigma_{1\theta} = 2 \left(\frac{R(Z_0^i)}{1 + Z_0^4/a} - \frac{Q(Z_0^i) Z_1^4}{a(1 + Z_0^4/a)^2} - \frac{QS^4(Z_0^i)}{a(1 + Z_0^4/a)^2} - \frac{S^4(Z_0^i)}{a} \frac{V_0}{(1 + Z_0^4/a)^2} \right), \quad (2.26)$$

$$\zeta_{0c} = \frac{\sqrt{2} z_0}{1 + Z_0^4/a}, \quad (2.27)$$

$$\zeta_{0\theta} = 0, \quad (2.28)$$

$$\zeta_{1c} = \frac{\sqrt{2} z_1}{1 + Z_0^4/a} - \frac{Z_1^4}{a} \frac{\sqrt{2} z_0}{(1 + Z_0^4/a)^2}, \quad (2.29)$$

$$\zeta_{1\theta} = \frac{\sqrt{2} S(Z_0^i)}{1 + Z_0^4/a} - \frac{S^4}{a} \frac{\sqrt{2} z_0}{(1 + Z_0^4/a)^2}. \quad (2.30)$$

Комплексные переменные $\mathcal{S}$, z_0 , z_1 здесь связаны с S^i , Z_0^i , Z_1^i формулами

$$\mathcal{S}(Z_0^i) = S^2(Z_0^i) + iS^3(Z_0^i), \quad (2.31)$$

$$z_0 = Z_0^2 + iZ_0^3, \quad z_1 = Z_1^2 + iZ_1^3. \quad (2.32)$$

Видно, что разрыв вдоль геодезической имеет место лишь для переменной σ .

2.4. Гладкие координаты. Чтобы исключить $\delta(U)$ из метрики, мы используем замену координат, аналогичную той, что была проведена в статье [39]:

$$\begin{aligned} w &= W, \\ \sigma &= \Sigma + H(\Upsilon, \bar{\Upsilon}) \theta(W) + W \theta(W) H_{\Upsilon} H_{\bar{\Upsilon}}, \\ \zeta &= \Upsilon + W \theta(W) H_{\bar{\Upsilon}}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Здесь $H_\Upsilon = \partial_\Upsilon H(\Upsilon, \bar{\Upsilon})$. В новых координатах получаем следующую метрику:

$$ds^2 = \frac{-2 dW d\Sigma + 2|d\Upsilon + W\theta(W)(H_{\Upsilon\bar{\Upsilon}} d\Upsilon + H_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}} d\bar{\Upsilon})|^2}{[1 + (W\Sigma - \Upsilon\bar{\Upsilon} + W\theta(W)G)/(2a^2)]^2}, \quad (2.34)$$

где $H(\Upsilon, \bar{\Upsilon})$ зависят от $\Upsilon, \bar{\Upsilon}$ так же, как $H(\zeta, \bar{\zeta})$, определенная формулой (2.8), зависит от $\zeta, \bar{\zeta}$, и

$$G = H - \Upsilon H_\Upsilon - \bar{\Upsilon} H_{\bar{\Upsilon}}. \quad (2.35)$$

Перепишем метрику (2.34) в виде

$$ds^2 = 2g_{W\Sigma} dW d\Sigma + g_{\Upsilon\Upsilon} d\Upsilon d\Upsilon + 2g_{\Upsilon\bar{\Upsilon}} d\Upsilon d\bar{\Upsilon} + g_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}} d\bar{\Upsilon} d\bar{\Upsilon}, \quad (2.36)$$

где

$$g_{W\Sigma} = -\frac{1}{\mathcal{N}}, \quad (2.37)$$

$$g_{\Upsilon\Upsilon} = \frac{2}{\mathcal{N}} \theta(W) W H_{\Upsilon\Upsilon} (1 + W H_{\Upsilon\bar{\Upsilon}}), \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} g_{\Upsilon\bar{\Upsilon}} &= \frac{1}{\mathcal{N}} [(1 + \theta(W) W H_{\Upsilon\bar{\Upsilon}})(1 + \theta(W) W H_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}}) + \theta(W) W^2 H_{\Upsilon\Upsilon} H_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}}] = \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}} [1 + 2\theta(W) W H_{\Upsilon\bar{\Upsilon}} + \theta(W) W^2 (H_{\Upsilon\Upsilon}^2 + H_{\Upsilon\Upsilon} H_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}})], \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$g_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}} = \frac{2}{\mathcal{N}} \theta(W) W H_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}} (1 + W H_{\bar{\Upsilon}\Upsilon}); \quad (2.40)$$

здесь

$$\mathcal{N} = \left[1 + \frac{1}{2a^2} (W\Sigma - \bar{\Upsilon}\Upsilon + \theta(W) W (H - H_\Upsilon \Upsilon - H_{\bar{\Upsilon}} \bar{\Upsilon})) \right]^2. \quad (2.41)$$

2.5. Две ударные волны. В случае двух ударных волн мы имеем дело с метрикой

$$ds^2 = 2g_{W\Sigma}^{(2)} dW d\Sigma + g_{\Upsilon\Upsilon}^{(2)} d\Upsilon d\Upsilon + 2g_{\Upsilon\bar{\Upsilon}}^{(2)} d\Upsilon d\bar{\Upsilon} + g_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}}^{(2)} d\bar{\Upsilon} d\bar{\Upsilon}, \quad (2.42)$$

где

$$g_{W\Sigma}^{(2)} = -\frac{1}{\mathcal{N}^{(2)}}, \quad (2.43)$$

$$g_{\Upsilon\Upsilon}^{(2)} = \frac{2H_{\Upsilon\Upsilon}}{\mathcal{N}^{(2)}} [\theta(W) W (1 + W H_{\Upsilon\bar{\Upsilon}}) + \theta(\Sigma) \Sigma (1 + \Sigma H_{\Upsilon\bar{\Upsilon}})], \quad (2.44)$$

$$g_{\Upsilon\bar{\Upsilon}}^{(2)} = \frac{1}{\mathcal{N}^{(2)}} [1 + 2(\theta(W) W + \theta(\Sigma) \Sigma) H_{\Upsilon\bar{\Upsilon}} + (\theta(W) W^2 + \theta(\Sigma) \Sigma^2) (H_{\Upsilon\Upsilon}^2 + H_{\Upsilon\Upsilon} H_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}})], \quad (2.45)$$

$$g_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}}^{(2)} = \frac{2H_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}}}{\mathcal{N}^{(2)}} [\theta(W) W (1 + W H_{\bar{\Upsilon}\Upsilon}) + \theta(\Sigma) \Sigma (1 + \Sigma H_{\bar{\Upsilon}\Upsilon})]; \quad (2.46)$$

здесь

$$\mathcal{N}^{(2)} = \left[1 + \frac{1}{2a^2} (W\Sigma - \bar{\Upsilon}\Upsilon + (\theta(W) W + \theta(\Sigma) \Sigma) (H - H_\Upsilon \Upsilon - H_{\bar{\Upsilon}} \bar{\Upsilon})) \right]^2. \quad (2.47)$$

Данная форма метрики является верной для трех регионов пространства-времени: $(\Sigma < 0, W < 0)$, $(\Sigma < 0, W > 0)$ и $(\Sigma > 0, W < 0)$, и должна быть модифицирована в области $(\Sigma > 0, W > 0)$ в связи с гравитационным взаимодействием (попытка найти модификацию метрики в четвертом регионе $(\Sigma > 0, W > 0)$ была принята в недавней статье [40]). Далее мы планируем представить основные шаги вывода явного выражения для ловушечной поверхности, лежащей в той области пространства-времени, где формула (2.42) верна.

2.6. Вывод уравнения для ловушечной поверхности. Ловушечная поверхность в четырехмерном пространстве-времени – это двумерная замкнутая пространственноподобная поверхность, определяемая тем условием, что сходимости нуль-геодезических на ней равна нулю. Напомним, что сходимости геодезических, проходящих через заданную поверхность, определяется выражением [18], [41], [42]

$$\theta = h^{MN} \nabla_M \xi_N, \quad (2.48)$$

где ξ_N – касательный вектор к геодезической, ∇_M – ковариантная производная, и h^{MN} – четырехмерный тензор, ассоциированный с двумерной метрикой, индуцированной на поверхности (его точное определение приведено ниже).

В данной системе координат (2.33) ловушечная поверхность, явное выражение которой мы хотим найти, состоит из двух частей. Обозначим их как $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$. Эти части ловушечной поверхности лежат в регионах $\Sigma < 0$ и $W < 0$ соответственно и определяются в терминах двух функций $\Psi_1(\Upsilon, \bar{\Upsilon})$ и $\Psi_2(\Upsilon, \bar{\Upsilon})$ как

$$\mathcal{S}_1: \begin{cases} W = 0 \\ \Sigma = -\Psi_1(\Upsilon, \bar{\Upsilon}) \end{cases}, \quad \mathcal{S}_2: \begin{cases} \Sigma = 0 \\ W = -\Psi_2(\Upsilon, \bar{\Upsilon}) \end{cases} \quad (2.49)$$

с дополнительным граничным условием на пересечении ударных волн $\mathcal{C} \subset \{W = \Sigma = 0\}$:

$$\mathcal{S}_1|_{\mathcal{C}} = \mathcal{S}_2|_{\mathcal{C}} \quad (2.50)$$

и

$$\partial_{\vec{n}} \mathcal{S}_1|_{\mathcal{C}} = \partial_{\vec{n}} \mathcal{S}_2|_{\mathcal{C}}, \quad (2.51)$$

где через $\partial_{\vec{n}}$ обозначена нормальная производная к поверхности.

Условие (2.50) означает, что

$$\Psi_1(\Upsilon, \bar{\Upsilon})|_{\mathcal{C}} = 0, \quad \Psi_2(\Upsilon, \bar{\Upsilon})|_{\mathcal{C}} = 0, \quad (2.52)$$

а следствие условия (2.51) в явном виде будет представлено ниже (см. (2.73)).

Поскольку $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ лежат в регионах $W < 0$ и $\Sigma < 0$ соответственно, также справедливо условие $\Psi_1(\Upsilon, \bar{\Upsilon}) > 0$, $\Psi_2(\Upsilon, \bar{\Upsilon}) > 0$.

Теперь выведем уравнения для функций $\Psi_1(\Upsilon, \bar{\Upsilon})$ и $\Psi_2(\Upsilon, \bar{\Upsilon})$, определяемые тем условием, что поверхность, которую они задают, является маргинально ловушечной [18], [41], [42], т.е. сходимости исходящих нуль-геодезических, ортогональных к этой поверхности, имеет нулевое расхождение. Наши вычисления будут очень близки к соответствующим вычислениям, проведенным в обзорном разделе статьи [22].

Нуль-геодезические, пересекающие ловушечную поверхность, могут быть описаны в терминах касательных к ним векторов ξ , компоненты которых при $W < 0$ имеют вид

$$\xi^W = w_1 = 1 - \frac{\Upsilon\bar{\Upsilon}}{2a^2}, \quad \xi^\Sigma = \sigma_1, \quad \xi^\Upsilon = \zeta_1, \quad \xi^{\bar{\Upsilon}} = \bar{\zeta}_1. \quad (2.53)$$

В силу условия изотропности геодезических $g_{MN}\xi^M\xi^N = 0$ мы получаем

$$2g_{W\Sigma}\sigma_1 w_1 + g_{\Upsilon\Upsilon}\zeta_1^2 + 2g_{\Upsilon\bar{\Upsilon}}\zeta_1\bar{\zeta}_1 + g_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}}\bar{\zeta}_1^2 = 0. \quad (2.54)$$

Это условие фиксирует параметр σ_1 :

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2g_{W\Sigma}w_1}(g_{\Upsilon\Upsilon}\zeta_1^2 + 2g_{\Upsilon\bar{\Upsilon}}\zeta_1\bar{\zeta}_1 + g_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}}\bar{\zeta}_1^2). \quad (2.55)$$

Кроме того, мы полагаем, что вектор ξ ортогонален к поверхности $\mathcal{S}_1$, т.е.

$$(\xi, K_a) = 0, \quad a = \zeta, \bar{\zeta}, \quad (2.56)$$

где K_a^M – два независимых четырехкомпонентных вектора, касательных к данной поверхности:

$$K_a^M = (0, -\partial_a\Psi, \delta_a^b). \quad (2.57)$$

Это приводит нас к соотношению

$$-g_{W\Sigma}\partial_a\Psi w_1 + g_{ab}\zeta^b = 0. \quad (2.58)$$

Отсюда легко получить, что

$$\zeta^a = w_1 g^{ab} g_{W\Sigma} \partial_b \Psi. \quad (2.59)$$

Для ξ_M имеем

$$\xi_M = g_{MN}\xi^N, \quad (2.60)$$

где

$$\xi^W = w_1, \quad (2.61)$$

$$\xi^\Sigma = \sigma_1 = -\frac{1}{2}g_{W\Sigma}w_1(\partial_\Upsilon\Psi g^{\Upsilon\Upsilon}\partial_\Upsilon\Psi + 2\partial_{\bar{\Upsilon}}\Psi g^{\bar{\Upsilon}\Upsilon}\partial_\Upsilon\Psi + \partial_{\bar{\Upsilon}}\Psi g^{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}}\partial_{\bar{\Upsilon}}\Psi), \quad (2.62)$$

$$\xi^\Upsilon = \zeta_1 = w_1 g_{W\Sigma}(g^{\Upsilon\Upsilon}\partial_\Upsilon\Psi + g^{\Upsilon\bar{\Upsilon}}\partial_{\bar{\Upsilon}}\Psi), \quad (2.63)$$

$$\xi^{\bar{\Upsilon}} = \bar{\zeta}_1 = w_1 g_{W\Sigma}(g^{\bar{\Upsilon}\Upsilon}\partial_\Upsilon\Psi + g^{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}}\partial_{\bar{\Upsilon}}\Psi). \quad (2.64)$$

Здесь мы можем использовать приближенное выражение для метрики. В матричных обозначениях с точностью до первых степеней по W

$$\begin{pmatrix} 0 & g_{W\Sigma} & 0 & 0 \\ g_{\Sigma W} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\Upsilon\Upsilon} & g_{\Upsilon\bar{\Upsilon}} \\ 0 & 0 & g_{\bar{\Upsilon}\Upsilon} & g_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}} \end{pmatrix} \approx \frac{1}{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2H_{\Upsilon\Upsilon}\theta(W)W & 1 + 2H_{\Upsilon\bar{\Upsilon}}\theta(W)W \\ 0 & 0 & 1 + 2H_{\bar{\Upsilon}\Upsilon}\theta(W)W & 2H_{\bar{\Upsilon}\bar{\Upsilon}}\theta(W)W \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в точке $W = 0$ получаем

$$\xi_M = - \left(\frac{\partial_Y \Psi \partial_{\bar{Y}} \Psi}{1 - Y\bar{Y}/(2a^2)}, \frac{1}{1 - Y\bar{Y}/(2a^2)}, \frac{\partial_Y \Psi}{1 - Y\bar{Y}/(2a^2)}, \frac{\partial_{\bar{Y}} \Psi}{1 - Y\bar{Y}/(2a^2)} \right), \quad (2.65)$$

$$h^{MN} = K_a^M K_b^N g^{ab} = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\partial_Y \Psi \partial_{\bar{Y}} \Psi & \partial_{\bar{Y}} \Psi & \partial_Y \Psi \\ 0 & \partial_{\bar{Y}} \Psi & 0 & -1 \\ 0 & \partial_Y \Psi & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

Компоненты соответствующей связности можно записать как

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{\partial_\Sigma \mathcal{N}}{\mathcal{N}}, \quad \Gamma_{12}^1 = -\frac{\partial_Y \mathcal{N}}{2\mathcal{N}}, \quad \Gamma_{12}^2 = -\frac{\partial_\Sigma \mathcal{N}}{2\mathcal{N}}, \quad (2.67)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{H_{Y\bar{Y}}}{2}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{\partial_Y \mathcal{N}}{\mathcal{N}}, \quad \Gamma_{13}^1 = -\frac{\partial_{\bar{Y}} \mathcal{N}}{2\mathcal{N}}, \quad (2.68)$$

$$\Gamma_{13}^3 = -\frac{\partial_\Sigma \mathcal{N}}{2\mathcal{N}}, \quad \Gamma_{23}^1 = -\frac{1}{2\mathcal{N}}(\partial_W \mathcal{N} - H_{Y\bar{Y}} \mathcal{N}), \quad \Gamma_{23}^0 = -\frac{\partial_\Sigma \mathcal{N}}{2\mathcal{N}}, \quad (2.69)$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{H_{\bar{Y}\bar{Y}}}{2}, \quad \Gamma_{33}^3 = -\frac{\partial_{\bar{Y}} \mathcal{N}}{\mathcal{N}}. \quad (2.70)$$

Будучи подставленными в соотношение (2.48), вкупе с условием (2.66) они дают уравнение нулевой сходимости (уравнение для ловушечной поверхности):

$$\left(1 - \frac{Y\bar{Y}}{2a^2}\right) \partial_{Y\bar{Y}}^2 (2\Psi - H) + \left(\frac{Y}{2a^2} \partial_Y + \frac{\bar{Y}}{2a^2} \partial_{\bar{Y}}\right) (2\Psi - H) - \frac{1}{2a^2} (2\Psi - H) = 0. \quad (2.71)$$

Геометрический смысл этого уравнения становится ясен, если переписать (2.71) в форме

$$\left(\Delta_{\mathbb{H}^2} - \frac{2}{a^2}\right) \left(\frac{\Psi - \kappa H}{1 - \rho^2/(2a^2)}\right) = 0, \quad (2.72)$$

где $\rho^2 = Y\bar{Y}$; $\Delta_{\mathbb{H}^2}$ на ударной волне задается формулой (2.12) (на ударной волне $Y = \zeta$, $\bar{Y} = \bar{\zeta}$); $\kappa = 1/2$, и это частное значение κ обусловлено нашим выбором $\theta(0) = 1/2$.

Напомним, что формфактор гравитационной ударной волны H , поделенный на величину $1 - \rho^2/(2a^2)$, $F = 2H/(1 - \rho^2/(2a^2))$, является фундаментальным решением уравнения (2.11).

Это означает, что функция Ψ , описывающая ловушечную поверхность, будучи также поделенной на $1 - \rho^2/(2a^2)$, с точностью до решения однородного аналога уравнения (2.4) является фундаментальным решением этого уравнения.

Легко видеть, что условие (2.51) может быть представлено в виде

$$\partial_Y \Psi_1 \partial_{\bar{Y}} \Psi_2|_C = 1. \quad (2.73)$$

В самом деле, это граничное условие может быть записано в терминах векторов $\vec{\xi}$ как

$$\vec{\xi}_1 = \vec{\xi}_2, \quad (2.74)$$

поскольку вектор $\vec{\xi}$, касательный к нуль-геодезической, является также нормальным к ловушечной поверхности, и

$$\xi_1^M = (1, \partial_\Upsilon \Psi \partial_{\bar{\Upsilon}} \Psi, -\partial_\Upsilon \Psi, -\partial_{\bar{\Upsilon}} \Psi) \left(1 - \frac{\Upsilon \bar{\Upsilon}}{2a^2} \right), \quad (2.75)$$

$$\xi_2^M = (\partial_\Upsilon \Psi \partial_{\bar{\Upsilon}} \Psi, 1, -\partial_\Upsilon \Psi, -\partial_{\bar{\Upsilon}} \Psi) \left(1 - \frac{\Upsilon \bar{\Upsilon}}{2a^2} \right). \quad (2.76)$$

Достаточным условием для формирования черной дыры в асимптотически плоском пространстве-времени является существование замкнутой маргинальной ловушечной поверхности на гиперповерхности $\{W \leq 0, \Sigma = 0\} \cup \{W = 0, \Sigma \leq 0\}$ [9], [15], [37], [39], [43]. Заметим, что в асимптотически неплоском случае подобных общих теорем нет. Однако есть широко распространенное мнение, что существование маргинальной ловушечной поверхности может служить указанием на рождение черных дыр.

3. ЛОВУШЕЧНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ В AdS_4 В СЛУЧАЕ ЛОБОВОГО СТОЛКНОВЕНИЯ

3.1. Решение уравнения для ловушечной поверхности. В данной работе мы рассматриваем лобовое столкновение, сохраняющее симметрию по отношению к вращению вокруг оси движения безмассовых частиц, т.е. $O(2)$ -симметрию в случае $D = 4$. $O(2)$ -Симметрия лобового столкновения приводит к тому, что функции $\Psi_1(\Upsilon, \bar{\Upsilon})$, $\Psi_2(\Upsilon, \bar{\Upsilon})$, описывающие ловушечную поверхность, тождественны друг другу и зависят только от параметра $\rho^2 = \Upsilon \bar{\Upsilon}$, $\Psi_1(\Upsilon, \bar{\Upsilon}) = \Psi_2(\Upsilon, \bar{\Upsilon}) = \Psi(\rho^2)$. В этом случае удобно ввести новую функцию

$$\phi(\rho) = \frac{2\Psi(\rho) - H(\rho)}{1 - \rho^2/(2a^2)}, \quad (3.1)$$

которая зависит только от ρ . Уравнение (2.71) при этом преобразуется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left(1 - \frac{\rho^2}{2a^2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) - \frac{4\phi}{a^2} = 0, \quad (3.2)$$

общий вид решения которого

$$\phi(\rho) = \frac{A(\rho^2 + 2a^2) + B((\rho^2 + 2a^2) \ln \rho + 4a^2)}{\rho^2 - 2a^2}. \quad (3.3)$$

Поскольку мы заинтересованы в регулярном решении однородного уравнения, то необходимо положить $B = 0$. При этом для ловушечной поверхности мы получаем следующее выражение:

$$\Psi(\rho) = \sqrt{2} p \left(1 - \frac{\rho^2}{2a^2} \right) \left(-2 + \frac{2a^2 + \rho^2}{2a^2 - \rho^2} \ln \left(\frac{2a^2}{\rho^2} \right) \right) - \frac{1}{2a^2} A(\rho^2 + 2a^2). \quad (3.4)$$

Рис. 3. График функции $\Psi(\rho)/(p\sqrt{2})$ для различных значений ρ_0 ; показано, что $\Psi(\rho) > 0$ для $\rho < \rho_0$ (а). График функции $f(x)$, определяющей величину $\bar{\rho}_0$; линия 1 соответствует малым значениям a/p , линия 2 – большим значениям a/p (б).

Как было упомянуто выше, в случае лобового столкновения необходимо решить следующую краевую задачу для единственной функции Ψ :

$$\Psi|_C = 0, \quad (3.5)$$

$$\partial_\Gamma \Psi \partial_\Gamma \Psi|_C = 1, \quad (3.6)$$

являющуюся решением уравнения для ловушечной поверхности.

Очевидно, что граница C сшивки идентичных составляющих поверхности является окружностью

$$\rho = \rho_0 = \text{const}.$$

Таким образом, мы получаем систему двух уравнений для двух параметров A и ρ_0 :

$$\sqrt{2}p \left(1 - \frac{\rho_0^2}{2a^2} \right) \left(-2 + \frac{2a^2 + \rho_0^2}{2a^2 - \rho_0^2} \ln \left(\frac{2a^2}{\rho_0^2} \right) \right) - \frac{1}{2a^2} A(\rho_0^2 + 2a^2) = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{a^4 \rho_0^2} \left(2\sqrt{2}pa^2 - \rho_0^2(\sqrt{2}p - A) - \sqrt{2}p\rho_0^2 \ln \left(\frac{2a^2}{\rho_0^2} \right) \right)^2 = 4. \quad (3.8)$$

Подставляя A из формулы (3.7) в выражение (3.4), получим (см. рис. 3)

$$\Psi(\rho) = \sqrt{2}p \left(4 \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{2a^2 + \rho_0^2} + \left(1 + \frac{\rho^2}{2a^2} \right) \ln \left(\frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) \right). \quad (3.9)$$

Чтобы увидеть явную связь наших результатов и результатов статьи [15], полезно представить условие для ρ в терминах исходного формфактора F , заданного в плоских координатах. Из формул (2.4) и (3.4) имеем

$$\Psi = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\rho^2}{2a^2} \right) F(\rho) - \frac{1}{2a^2} A(\rho^2 + 2a^2). \quad (3.10)$$

Поскольку Ψ зависит только от ρ , условие (3.6) может быть переписано как $d\Psi/d\rho = \pm 2$ (чтобы избежать нефизических корней, мы выбираем знак “–”):

$$\Psi'(\rho) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\rho^2}{2a^2} \right) F'(\rho) - \frac{\rho}{4a^2} F(\rho) - \frac{\rho}{a^2} A. \quad (3.11)$$

На поверхности $\mathcal{C}$

$$\Psi'(\rho)|_{\mathcal{C}} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{2a^2} \right) F'(\rho_0) - \frac{\rho_0}{2a^2 + \rho_0^2} F(\rho_0), \quad (3.12)$$

и мы получаем выражение (3.6) в терминах исходного формфактора:

$$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{2a^2} \right) F'(\rho_0) - \frac{\rho_0}{2a^2 + \rho_0^2} F(\rho_0) + 2 = 0. \quad (3.13)$$

Параметр ρ_0 может быть определен из условия (3.13). Введем новый безразмерный параметр $\bar{\rho}_0 = \rho_0/a$. Из уравнений (3.9) и (3.13) получаем, что $\bar{\rho}_0$ удовлетворяет уравнению

$$f(\bar{\rho}_0) = \sqrt{2} \frac{a}{p}, \quad (3.14)$$

где

$$f(x) \equiv \frac{1}{x} \frac{(2 - x^2)^2}{2 + x^2}. \quad (3.15)$$

Данное уравнение решается для любого значения отношения a/p , и поэтому в отличие от случая пространства-времени dS здесь не имеет места критический эффект. Поскольку значение $\rho = \sqrt{2}a$ отвечает пространственной бесконечности (горизонту dS), нас интересуют только решения, принадлежащие интервалу $0 < \rho_0 < \sqrt{2}a$, и для каждого заданного отношения a/p уравнение (3.14) имеет единственное решение в этом интервале.

Для малых значений a/p (что имеет место в случае высокой энергии частиц и/или сильно искривленного пространства-времени; в дальнейшем мы будем называть этот случай высокоэнергетическим пределом) решение уравнения (3.14) близко к $\bar{\rho}_0 \sim \sqrt{2}$:

$$\rho_0^{\text{HE}} = \sqrt{2}a - \sqrt{\frac{a^3}{p}}. \quad (3.16)$$

Для больших значений a/p (случай низкоэнергетических частиц и/или слабо искривленного пространства-времени; его назовем низкоэнергетическим пределом) решение (3.14) имеет величину порядка $\bar{\rho}_0 \sim \sqrt{2}p/a$, т.е.

$$\rho_0^{\text{LE}} \approx \sqrt{2}p. \quad (3.17)$$

3.2. Площадь ловушечной поверхности. Теперь площадь ловушечной поверхности может быть легко вычислена. Поскольку метрика пространства-времени с двумя ударными волнами задается формулой (2.42), индуцированная метрика на одной из половинок ловушечной поверхности (для определенности положим $W = 0$, $\Sigma = -\Psi(\Upsilon, \bar{\Upsilon})$) представляется как

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Поэтому общая площадь двух частей ловушечной поверхности может быть записана в виде

$$\mathcal{A} = 2 \int_{\rho < \rho_0} 2 \sqrt{|\det g_{\alpha\beta}|} 2\pi\rho d\rho = 2 \int_0^{\rho_0} \frac{4\pi\rho d\rho}{\mathcal{N}} = 8\pi a^2 \frac{\rho_0^2/(2a^2)}{1 - \rho_0^2/(2a^2)}. \quad (3.19)$$

Как было показано ранее, для больших значений a/p имеет место $\rho_0 \approx \sqrt{2}p$, т.е. ρ_0^2/a^2 мало, и

$$\mathcal{A} \approx 4\pi\rho_0^2 + 2\pi\frac{\rho_0^4}{a^2} \approx 8\pi p^2 \left(1 + \frac{p^2}{a^2} + \dots\right). \quad (3.20)$$

Первый член здесь воспроизводит результат, отвечающий плоскому случаю.

Для малых отношений a/p имеем $\rho_0 \approx \sqrt{2}a - \sqrt{a^3/p}$, и

$$\mathcal{A} \approx 4\pi a \sqrt{2pa}. \quad (3.21)$$

Таким образом, мы получаем, что присутствие малой отрицательной космологической постоянной приводит к небольшому росту площади ловушечной поверхности, образующейся при столкновениях ультрарелятивистских частиц, и соответственно, может быть, к увеличению сечения рождения черных дыр.

3.3. Сравнение с полученными недавно результатами. Уравнение, описывающее ловушечную поверхность в пространстве-времени AdS , также представлено в недавно изданных работах [14], [15], [44], где используются в основном координаты Пуанкаре. Может оказаться полезным сравнить наши результаты с результатами, представленными в работе [15], и показать их эквивалентность.

Для этого мы должны показать, что уравнения для ловушечной поверхности и граничные условия, полученные в нашей статье и в работе [15], совпадают.

Напомним соотношение между плоскими координатами (2.1) и координатами Пуанкаре:

$$Z^0 = a \frac{t}{\sqrt{2}z}, \quad (3.22)$$

$$Z^1 = a \frac{x^1}{\sqrt{2}z}, \quad (3.23)$$

$$Z^2 = a \frac{x^2}{z}, \quad (3.24)$$

$$Z^3 = \frac{z}{2} \left(-1 + \frac{a^2 - \vec{x}^2 + t^2}{z^2} \right), \quad (3.25)$$

$$Z^4 = \frac{z}{2} \left(1 + \frac{a^2 + \vec{x}^2 - t^2}{z^2} \right). \quad (3.26)$$

Ударная волна, локализованная на пересечении гиперболоида (2.1) и одной из двух плоскостей $Z^0 \pm Z^1 = 0$, в координатах Пуанкаре расположена на $x^\pm \equiv t \pm x^1 = 0$. Метрика (2.2) в новых координатах может быть переписана как

$$ds^2 = ds_{AdS_4}^2 + \frac{a}{z} \Phi_-(z, x^2) \delta(x^-) dx^{-2}, \quad (3.27)$$

где функция $\Phi_-(z, x^2)$ является решением уравнения

$$\left(\Delta_{\mathbb{H}^2} - \frac{2}{a^2}\right)\Phi_-(z, x^2) = -16\pi G_4 p \delta(z - a)\delta(x^2), \quad (3.28)$$

а оператор Бельтрами–Лапласа $\Delta_{\mathbb{H}^2}$ на гиперboloиде H^2 в координатах (x^2, z) может быть получен исходя из метрики на H^2 :

$$ds_{\mathbb{H}^2}^2 = \frac{a^2}{z^2} ((dx^2)^2 + dz^2). \quad (3.29)$$

Он имеет вид

$$\Delta_{\mathbb{H}^2} = \frac{z^2}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{z^2}{a^2} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)^2. \quad (3.30)$$

Авторы работ [15], [44] используют так называемую хордовую дистанцию, являющуюся расстоянием в метрике объемлющего пространства между выбранной точкой (x^2, z) и фиксированной точкой $(0, a)$,

$$q \equiv \frac{(z - a)^2 + x_2^2}{4az}. \quad (3.31)$$

Метрика (3.29) в терминах этих координат имеет вид

$$ds^2 = a^2 \left(\frac{dq^2}{q(q+1)} + 4q(q+1) d\varphi^2 \right). \quad (3.32)$$

Здесь введена угловая переменная $\operatorname{tg} \varphi = -Z_3/Z_2$. Оператор Бельтрами–Лапласа можно записать как

$$\Delta_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{a^2} \left(q(q+1) \frac{\partial^2}{\partial q^2} + (1+2q) \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{4q(q+1)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (3.33)$$

Связь хордовой дистанции q с параметром ρ выражается формулой

$$q = \frac{\rho^2/(2a^2)}{1 - \rho^2/(2a^2)}. \quad (3.34)$$

Граничное условие (3.13) может быть записано в терминах q_0 , связанного с ρ_0 посредством (3.34):

$$F'(q_0) - \frac{2}{1+2q_0} F(q_0) + \frac{8a}{\sqrt{2q_0(1+q_0)}} = 0. \quad (3.35)$$

Теперь легко видеть, что это уравнение с точностью до некоторого отличия в коэффициентах совпадает с подобным уравнением, полученным ранее в работе [15]. Разница же обусловлена выбором иного соглашения для $\theta(0)$. Если мы положим в наших вычислениях $\theta(0) = 1$ и проведем перемасштабирование формфактора $F(q) = \sqrt{2} \Phi(q)$, которое необходимо потребовать в силу различия координатных систем, то это приведет к уравнению

$$\Phi'(q_0) - \frac{2}{1+2q_0} \Phi(q_0) + \frac{2a}{\sqrt{q_0(1+q_0)}} = 0, \quad (3.36)$$

которое в точности воспроизводит результат работы [15].

Теперь заметим, что если мы будем использовать произвольную регуляризацию $\theta(0) = \kappa$, то вместо уравнения (2.71) получится

$$\left(\Delta_{\mathbb{H}^2} - \frac{2}{a^2}\right) \left(\frac{\Psi - \kappa H}{1 - \rho^2/(2a^2)}\right) = 0. \quad (3.37)$$

Нетрудно понять, как от параметра κ зависит площадь ловушечной поверхности. Если $\theta(0) = \kappa$, то уравнение (3.14) заменяется на

$$f(\rho_0) = \frac{a}{\sqrt{2} p \kappa}, \quad (3.38)$$

что приводит к

$$\rho_0^{\text{LE}} \approx 2\sqrt{2} p \kappa, \quad (3.39)$$

$$\rho_0^{\text{HE}} \approx \sqrt{2} a - \sqrt{\frac{a^3}{2 p \kappa}}. \quad (3.40)$$

В первом случае для площади ловушечной поверхности имеем

$$\mathcal{A}_{\text{LE}} = \frac{8\pi a^2 \rho_0^2}{2a^2 - \rho_0^2} \approx 4\pi \rho_0^2 + 2\pi \frac{\rho_0^4}{a^2} \approx 32\pi p^2 \kappa^2 \left(1 + \kappa^2 \frac{p^2}{a^2}\right), \quad (3.41)$$

а во втором случае –

$$\mathcal{A}_{\text{HE}} = \frac{8\pi a^2 \rho_0^2}{2a^2 - \rho_0^2} \approx \frac{4\sqrt{2} \pi a^3}{\sqrt{2} a - \rho_0} \approx 8\pi \sqrt{\kappa p a^3}. \quad (3.42)$$

Таким образом, можно видеть, что в обоих энергетических режимах влияние параметра κ , зависящего от выбранного типа регуляризации исходной сингулярности метрики, очень существенно. И только детальный анализ проблемы может показать, какой выбор является физически осмысленным.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучен процесс формирования маргинальной ловушечной поверхности при лобовом столкновении двух ударных волн в пространстве-времени AdS_4 и установлена зависимость физических характеристик поверхности от отношения a и p . Мультипликативные поправки к площади ловушечной поверхности (по сравнению с плоским случаем) зависят от данного отношения скейлинговым образом. В отличие от случая пространства-времени dS_4 , в AdS_4 не наблюдается критического эффекта. Отмечено, что наш результат отличается от предыдущих неким численным фактором, обусловленным выбором типа регуляризации исходной сингулярности метрики волны. Более детальный анализ регуляризации требует дальнейших рассмотрений и составит материал отдельной статьи.

Благодарности. И. Арефьева выражает свою признательность Е. Гусевой и И. Воловичу за ценные дискуссии. Данная работа частично была поддержана грантом РФФИ № 08-01-00798, а также Федеральным агентством по науке и инновациям (контракт № 02.740.11.5057). Кроме того, участие И. Арефьевой в данной работе было частично поддержано Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-795.2008.1).

Список литературы

- [1] G. 't Hooft, "Gravitational collapse and particle physics", *6th Topological Workshop on Proton-Antiproton Collider Physics* (Aachen, Germany, June 30–July 4, 1986), eds. K. Egger, H. Faissner, E. Radermacher, World Sci., Singapore, 1987, 669–688; *Phys. Lett. B*, **198**:1 (1987), 61–63; *Nucl. Phys. B*, **304**:4 (1988), 867–876.
- [2] D. Amati, M. Ciafaloni, G. Veneziano, *Phys. Lett. B*, **197**:1–2 (1987), 81–88; **216**:1–2 (1989), 41–47; **289**:1–2 (1992), 87–91; *Internat. J. Modern Phys. A*, **3**:7 (1988), 1615–1661; *Nucl. Phys. B*, **347**:3 (1990), 550–580.
- [3] I. Ya. Aref'eva, K. S. Viswanathan, I. V. Volovich, *Nucl. Phys. B*, **452**:1–2 (1995), 346–366; Erratum **462**:2–3 (1996), 613–617; [arXiv: hep-th/9412157](#); *Internat. J. Modern Phys. D*, **5**:6 (1996), 707–721; [arXiv: hep-th/9512170](#).
- [4] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. R. Dvali, *Phys. Lett. B*, **429**:3–4 (1998), 263–272; [arXiv: hep-ph/9803315](#); I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. R. Dvali, *Phys. Lett. B*, **436**:3–4 (1998), 257–263; [arXiv: hep-ph/9804398](#).
- [5] G. F. Giudice, R. Rattazzi, J. D. Wells, *Nucl. Phys. B*, **544**:1–2 (1999), 3–38; [arXiv: hep-ph/9811291](#); **630**:1–2 (2002), 293–325; [arXiv: hep-ph/0112161](#).
- [6] T. Banks, W. Fischler, *A model for high energy scattering in quantum gravity*, [arXiv: hep-th/9906038](#).
- [7] I. Ya. Aref'eva, *ЭЧАЯ*, **31**:7a (2000), 169–180; [arXiv: hep-th/9910269](#).
- [8] S. Dimopoulos, G. Landsberg, *Phys. Rev. Lett.*, **87**:16 (2001), 161602; [arXiv: hep-ph/0106295](#).
- [9] S. B. Giddings, S. Thomas, *Phys. Rev. D*, **65**:5 (2002), 056010; [arXiv: hep-ph/0106219](#); D. M. Eardley, S. B. Giddings, *Phys. Rev. D*, **66**:4 (2002), 044011; [arXiv: gr-qc/0201034](#).
- [10] A. Ringwald, H. Tu, *Phys. Lett. B*, **525**:1–2 (2002), 135–142; [arXiv: hep-ph/0111042](#); E.-J. Ahn, M. Cavaglià, A. V. Olinto, *Phys. Lett. B*, **551**:1–2 (2003), 1–6; [arXiv: hep-th/0201042](#); S. N. Solodukhin, *Phys. Lett. B*, **533**:1–2 (2002), 153–161; [arXiv: hep-ph/0201248](#); E. Kohlprath, G. Veneziano, *JHEP*, **06** (2002), 057; [arXiv: gr-qc/0203093](#); H. Yoshino, Ya. Nambu, *Phys. Rev. D*, **67**:2 (2003), 024009; [arXiv: gr-qc/0209003](#); O. I. Vasilenko, *Trap surface formation in high-energy black holes collision*, [arXiv: hep-th/0305067](#); H. Yoshino, V. S. Rychkov, *Phys. Rev. D*, **71**:10 (2005), 104028; Erratum: **77**:8 (2008), 089905; [arXiv: hep-th/0503171](#); M. Cavaglià, *Internat. J. Modern Phys. A*, **18**:11 (2003), 1843–1882; [arXiv: hep-ph/0210296](#); P. Kanti, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:29 (2004), 4899–4951; [arXiv: hep-ph/0402168](#); S. B. Giddings, V. S. Rychkov, *Phys. Rev. D*, **70**:10 (2004), 104026; [arXiv: hep-th/0409131](#); V. Cardoso, E. Berti, M. Cavaglià, *Class. Quant. Grav.*, **22**:12 (2005), L61–L69; [arXiv: hep-ph/0505125](#); G. L. Landsberg, *J. Phys. G*, **32**:9 (2006), R337–R365; [arXiv: hep-ph/0607297](#); D. M. Gingrich, *Internat. J. Modern Phys. A*, **21**:32 (2006), 6653–6676; [arXiv: hep-ph/0609055](#); H. Stöcker, *J. Phys. G*, **32**:12 (2006), S429–S437; B. Koch, M. Bleicher, H. Stöcker, *J. Phys. G*, **34**:8 (2007), S535–S542; [arXiv: hep-ph/0702187](#); N. Kaloper, J. Terning, *Internat. J. Modern Phys. D*, **17**:3–4 (2008), 665–672; *Gen. Rel. Grav.*, **39**:10 (2007), 1525–1532; [arXiv: 0705.0408](#); M. Cavaglià, R. Godang, L. M. Cremaldi, D. J. Summers, *JHEP*, **06** (2007), 055; [arXiv: 0707.0317](#); P. Meade, L. Randall, *JHEP*, **05** (2008), 003; [arXiv: 0708.3017](#); S. B. Giddings, "High-energy black hole production", *Particles, Strings, and Cosmology*, AIP Conf. Proc., **957**, №1, eds. A. Rajantie, P. Dauncey, C. Contaldi, H. Stoica, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2007, 69–78; [arXiv: 0709.1107](#).
- [11] I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **5**:4 (2008), 641–651; [arXiv: 0710.2696](#).
- [12] A. Mironov, A. Morozov, T. N. Tomaras, *Facta Univ. Ser. Phys. Chem. Tech.*, **4**:2 (2006), 381–404; [arXiv: 0710.3395](#).

- [13] P. Nicolini, E. Spallucci, *Noncommutative geometry inspired wormholes and dirty black holes*, [arXiv: 0902.4654](#).
- [14] L. Alvarez-Gaume, C. Gomez, A. S. Vera, A. Tavanfar, M. A. Vazquez-Mozo, *JHEP*, **02** (2009), 009; [arXiv: 0811.3969](#).
- [15] S. S. Gubser, S. S. Pufu, A. Yarom, *Phys. Rev. D*, **78**:6 (2008), 066014; [arXiv: 0805.1551](#).
- [16] I. Aref'eva, A. Bagrov, E. Guseva, *Critical formation of trapped surfaces in the collision of non-expanding gravitational shock waves in de Sitter space-time*, [arXiv: 0905.1087](#).
- [17] S. W. Hawking, R. Penrose, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **314**:1519 (1970), 529–548.
- [18] S. W. Hawking, G. R. F. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monogr. Math. Phys., **1**, Cambridge Univ. Press, London–New York, 1973.
- [19] G. W. Gibbons, *Class. Quant. Grav.*, **16**:6 (1999), 1677–1687; [arXiv: hep-th/9809167](#).
- [20] R. Penrose, *J. Astrophys. Astron.*, **20**:3–4 (1999), 233–248.
- [21] H. Nastase, *On high energy scattering inside gravitational backgrounds*, [arXiv: hep-th/0410124](#).
- [22] H. Nastase, *The RHIC fireball as a dual black hole*, [arXiv: hep-th/0501068](#).
- [23] E. Shuryak, S.-J. Sin, I. Zahed, *J. Korean Phys. Soc.*, **50**:2 (2007), 384–397; [arXiv: hep-th/0511199](#).
- [24] A. J. Amsel, D. Marolf, A. Virmani, *JHEP*, **04** (2008), 025; [arXiv: 0712.2221](#).
- [25] D. Grumiller, P. Romatschke, *JHEP*, **08** (2008), 027; [arXiv: 0803.3226](#).
- [26] P. C. Aichelburg, R. U. Sexl, *Gen. Rel. Grav.*, **2**:4 (1971), 303–312.
- [27] T. Dray, G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B*, **253**:1 (1985), 173–188.
- [28] V. Ferrari, P. Pendenza, G. Veneziano, *Gen. Rel. Grav.*, **20**:11 (1988), 1185–1191.
- [29] M. Hotta, M. Tanaka, *Class. Quant. Grav.*, **10**:2 (1993), 307–314.
- [30] K. Sfetsos, *Nucl. Phys. B*, **436**:3 (1995), 721–745; [arXiv: hep-th/9408169](#).
- [31] J. Podolský, J. B. Griffiths, *Class. Quant. Grav.*, **15**:2 (1998), 453–463; [arXiv: gr-qc/9710049](#).
- [32] G. T. Horowitz, N. Itzhaki, *JHEP*, **02** (1999), Paper 10; [arXiv: hep-th/9901012](#).
- [33] J. Podolský, J. B. Griffiths, *Phys. Lett. A*, **261**:1–2 (1999), 1–4; [arXiv: gr-qc/9908008](#); J. Podolský, *Exact impulsive gravitational waves in spacetimes of constant curvature*, [arXiv: gr-qc/0201029](#).
- [34] J. Podolský, M. Ortaggio, *Class. Quant. Grav.*, **18**:14 (2001), 2689–2706; [arXiv: gr-qc/0105065](#).
- [35] R. Emparan, *Phys. Rev. D*, **64**:2 (2001), 024025; [arXiv: hep-th/0104009](#).
- [36] G. Esposito, R. Pettorino, P. Scudellaro, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **4**:3 (2007), 361–372; [arXiv: gr-qc/0606126v3](#).
- [37] K. Kang, H. Nastase, *Phys. Rev. D*, **72**:10 (2005), 106003; [arXiv: hep-th/0410173](#); **71**:12, 124035; [arXiv: hep-th/0409099](#).
- [38] J. B. Griffiths, *Colliding Plane Waves in General Relativity*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, New York, 1991.
- [39] P. D. D'Eath, P. N. Payne, *Phys. Rev. D*, **46**:2 (1992), 658–674; 675–693; 694–701.
- [40] D. Grumiller, P. Romatschke, *JHEP*, **08** (2008), 027; [arXiv: 0803.3226](#).
- [41] R. M. Wald, *General Relativity*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [42] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [43] R. Penrose, *Results Presented at the Cambridge University Seminar*, 1974 (unpublished).
- [44] S. S. Gubser, S. S. Pufu, A. Yarom, *Off-center collisions in AdS_5 with applications to multiplicity estimates in heavy-ion collisions*, [arXiv: 0902.4062](#).