Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Свижович, Функции
Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна отрицательного це-
лого порядка, *ТМФ*, 2009, том 161, номер 3, 400–405

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6449>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 18:33:31

© 2009 г.

Д. Свижович*

ФУНКЦИИ ФЕРМИ–ДИРАКА И БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Найдены простые явные формулы в замкнутой форме для функций Ферми–Дирака $\mathcal{F}_{-n}(z)$ и функций Бозе–Эйнштейна $\mathcal{B}_{-n}(z)$, верные для произвольных $n \in \mathbb{N}$. В полученных формулах используются высшие тангенциальные числа, определенные Карлицем и Сковиллом. Приведены несколько примеров и прямых следствий применения основных результатов.

Ключевые слова: функция Ферми–Дирака, функция Бозе–Эйнштейна, интеграл Ферми–Дирака, интеграл Бозе–Эйнштейна, тангенциальные числа высшего порядка, тангенциальные числа порядка k .

1. ВВЕДЕНИЕ

Функции Ферми–Дирака $\mathcal{F}_\alpha(z)$ и Бозе–Эйнштейна $\mathcal{B}_\alpha(z)$ порядка α от аргумента z определяются формулой [1], [2]

$$\left. \begin{matrix} \mathcal{F}_\alpha(z) \\ \mathcal{B}_\alpha(z) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{e^{t-z} \pm 1} dt, \quad \operatorname{Re} \alpha > -1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

везде, где эти интегралы, в которых $\Gamma(\dots)$ обозначает гамма-функцию, а знаки плюс и минус соответственно относятся к $\mathcal{F}_\alpha(z)$ и $\mathcal{B}_\alpha(z)$, сходятся, и аналитическим продолжением на остальной части плоскости α -. Один из способов такого продолжения в полуплоскости $\operatorname{Re}(\alpha) \leq -1$ состоит в использовании следующих (легко выводимых) дифференциально-разностных уравнений:

$$\frac{d}{dz} \mathcal{F}_\alpha(z) = \mathcal{F}_{\alpha-1}(z), \quad \frac{d}{dz} \mathcal{B}_\alpha(z) = \mathcal{B}_{\alpha-1}(z). \quad (2)$$

Следует заметить, что в физических приложениях $\mathcal{F}_\alpha(z)$ и $\mathcal{B}_\alpha(z)$, как правило, трактуются как функции действительного порядка и действительного аргумента.

Функции Ферми–Дирака возникают во множестве физических задач, в особенности в теории полупроводников и металлов. Впервые с ними столкнулись в 1920-х годах, когда Паули и Зоммерфельд использовали их при описании вырожденного электронного газа металла. С тех пор их математические свойства, отношение к другим

*Atomic Physics Laboratory, Vinča Institute of Nuclear Sciences, Belgrade, Republic of Serbia. E-mail: djurdje@vinca.rs

функциям, аналитическое продолжение с помощью контурных интегралов, асимптотические разложения, численные вычисления и таблицы значений, обобщения и другие сходные вопросы широко обсуждались (см., к примеру, работы [1] и [3]–[15]). Функции Бозе–Эйнштейна, для которых также хорошо разработана математическая теория [2], [8], [16]–[18], широко используются в теории газа Бозе–Эйнштейна выше его температуры перехода и в теории ферромагнетизма.

Из литературы можно узнать, что если порядок α – неположительное целое число, то функции $\mathcal{F}_\alpha(z)$ и $\mathcal{B}_\alpha(z)$ должны быть элементарными функциями (см. работы [12] и [18]). Собственно говоря, легко видеть, что $\mathcal{F}_0(z)$ и $\mathcal{B}_0(z)$ – элементарные функции (см. уравнение (8) ниже). Таким образом, в силу уравнений (2) получается, что $\mathcal{F}_{-n}(z)$ и $\mathcal{B}_{-n}(z)$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, выражаются через элементарные функции. Однако нам не удалось найти в литературе каких-либо подробностей о функциях $\mathcal{F}_{-n}(z)$ и $\mathcal{B}_{-n}(z)$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

В настоящей работе выводятся простые явные формулы в замкнутой форме для $\mathcal{F}_{-n}(z)$ и $\mathcal{B}_{-n}(z)$, $n \in \mathbb{N}$ (см. ниже уравнения (14)–(17)), и в полученных формулах используются высшие тангенциальные числа, определенные Карлицем и Сковиллом [19], [20]. В дополнение приводятся несколько примеров и прямых следствий применения основных результатов.

2. ПРОИЗВОДНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТАНГЕНСА

В этом разделе мы рассмотрим последовательность многочленов $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, которые называют производными многочленами для гиперболического тангенса. Их введение мотивировано простым наблюдением:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{th} x &= \operatorname{sech}^2 x = 1 - \operatorname{th}^2 x, \\ \frac{d^2}{dx^2} \operatorname{th} x &= 2 \operatorname{th} x (\operatorname{th}^2 x - 1), \end{aligned}$$

а это свидетельствует в пользу того, что $\operatorname{th} x^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, – многочлен от $\operatorname{th} x$. Аналогично можно ожидать, что $\operatorname{cth} x^{(n)}$ – многочлен от $\operatorname{cth} x$.

Мы определяем производные многочлены для гиперболического тангенса $P_n(x)$ посредством экспоненциальной производящей функции (ср. с определением производных многочленов для тангенса [21])

$$P(x, t) = \frac{x + \operatorname{th} t}{1 + x \operatorname{th} t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (3)$$

или, что эквивалентно, формулой

$$\frac{d^n}{dx^n} \operatorname{th} x = P_n(\operatorname{th} x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4)$$

так как легко видеть, что

$$P_n(\operatorname{th} x) = \frac{d^n}{dt^n} P(\operatorname{th} x, t) \Big|_{t=0} = \frac{d^n}{dt^n} \operatorname{th}(x + t) \Big|_{t=0} = \frac{d^n}{dx^n} \operatorname{th}(x + t) \Big|_{t=0} = \frac{d^n}{dx^n} \operatorname{th} x,$$

где используется равенство

$$P(x, t) = \frac{x + \operatorname{th} t}{1 + x \operatorname{th} t} = \operatorname{th}(\operatorname{th}^{-1} x + t).$$

Заметим, что нетрудно показать

$$\frac{d^n}{dx^n} \operatorname{cth} x = P_n(\operatorname{cth} x), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5)$$

Кроме того, если использовать цепное правило, из формулы (4) следует, что $P_n(x)$ также порождаются рекуррентными соотношениями:

$$P_0(x) = x, \quad P_n(x) = (1 - x^2)P'_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Для фиксированного n многочлен $P_n(x)$ имеет степень $n + 1$ и состоит из четных степеней с целыми коэффициентами, когда n нечетно, и из нечетных степеней с целыми коэффициентами, когда n четно, и удовлетворяет соотношению симметрии

$$P_n(-x) = (-1)^{n+1} P_n(x). \quad (7)$$

Приведем несколько первых примеров $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x, & P_1(x) &= -x^2 + 1, & P_2(x) &= 2x^3 - 2x, \\ P_3(x) &= -6x^4 + 8x^2 - 2, & P_4(x) &= 24x^5 - 40x^3 + 16x, \\ P_5(x) &= -120x^6 + 240x^4 - 136x^2 + 16, \\ P_6(x) &= 720x^7 - 1680x^5 + 1232x^3 - 272x, \\ P_7(x) &= -5040x^8 + 13440x^6 - 12096x^4 + 3968x^2 - 272, \\ P_8(x) &= 40320x^9 - 120960x^7 + 129024x^5 - 56320x^3 + 7936x. \end{aligned}$$

3. $\mathcal{F}_\alpha(X)$ И $\mathcal{B}_\alpha(X)$ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ ПОРЯДКОВ

Получим сначала следующую явную замкнутую формулу для $P_n(x)$:

$$P_n(x) = (-1)^{(n-1)/2} T(n, 1) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{(n+k-1)/2}}{k} T(n+1, k) x^k, \quad (8)$$

где n -е тангенциальное число порядка k — $T(n, k)$ — определяется разложением в степенной ряд (см. работы [19], [20])

$$\operatorname{tg}^k t = \sum_{n=k}^{\infty} T(n, k) \frac{t^n}{n!}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Чтобы доказать формулу (8), заметим, что производящую функцию многочленов $P_n(x)$ в выражении (3) можно переписать как

$$P(x, t) = (x + \operatorname{th} t) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x \operatorname{th} t)^k = x + (1 - x^2) \sum_{k=1}^{\infty} (-x)^{k-1} \operatorname{th}^k t,$$

что, в свою очередь, превращается в

$$\begin{aligned}
 P(x, t) &= x + (1 - x^2) \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} (-1)^k \operatorname{tg}^k t = \\
 &= x + (1 - x^2) \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} (-1)^{n+k} \sum_{n=k}^{\infty} T(n, k) \frac{t^n}{n!} = \\
 &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - x^2) \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{(n+k-2)/2} T(n, k) x^{k-1} \right) \frac{t^n}{n!}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

если учесть, что $\operatorname{th} t = -i \operatorname{tg}(it)$, $i = \sqrt{-1}$, и использовать определение $T(n, k)$ (см. формулу (9)), а также элементарные равенства для двойных рядов [22]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n A(k, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A(k, n+k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} A(k, n).$$

С другой стороны, из выражений (3) и (6) имеем

$$P(x, t) = P_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!} = P_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - x^2) P'_{n-1}(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (11)$$

Сравнивая (10) и (11), получаем

$$P'_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{(n+k-2)/2} T(n, k) x^{k-1}$$

и, интегрируя, находим

$$P_n(x) = P_n(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{(n+k-1)/2}}{k} T(n+1, k) x^k. \quad (12)$$

Наконец, желаемый результат (8) следует из выражения (12) и соотношения

$$P_n(0) = (-1)^{(n+1)/2} T(n, 1),$$

которое получается с помощью формул (3) и (9).

Завершая этот раздел, мы воспользуемся формулой (8) и выведем явные замкнутые формулы для $\mathcal{F}_n(x)$ и $\mathcal{B}_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, интегралы, заданные формулой (1) для $\alpha = 0$, существуют, и можно заключить, что

$$\mathcal{F}_0(x) = \ln(1 + e^x), \quad B_0(x) = -\ln(1 - e^x). \quad (13)$$

Таким образом, в силу уравнений (2) имеем

$$\mathcal{F}_{-1}(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2}, \quad (14)$$

$$\mathcal{B}_{-1}(x) = \frac{e^x}{1 - e^x} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2}. \quad (15)$$

Далее, повторно используя уравнения (2) вместе с формулой (4) или (5), получаем

$$\mathcal{F}_{-n-1}(x) = \frac{1}{2} \frac{d^n}{dx^n} \operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{1}{2^{n+1}} P_n \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (16)$$

$$\mathcal{B}_{-n-1}(x) = -\frac{1}{2} \frac{d^n}{dx^n} \operatorname{cth} \frac{x}{2} = -\frac{1}{2^{n+1}} P_n \left(\operatorname{cth} \frac{x}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

Отсюда видно, что в случае, когда $\alpha = -1, -2, -3, \dots$, функции $\mathcal{F}_\alpha(z)$ и $\mathcal{B}_\alpha(z)$ – многочлены от $\operatorname{th}(x/2)$ и $\operatorname{cth}(x/2)$ соответственно, и эти многочлены в точности те же, что мы полностью охарактеризовали с помощью производящей функции, рекуррентных соотношений и явной замкнутой формулы (см. формулы (3)–(6), (8)).

Более того, для $n \in \mathbb{N}$ как прямое следствие из формул (6) и (16) или (17) соответственно, получаем главные результаты настоящей работы:

$$\mathcal{F}_{-n-1}(x) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{n+1}} \left[T(n, 1) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k/2}}{k} T(n+1, k) \operatorname{th}^k \frac{x}{2} \right], \quad (18)$$

$$\mathcal{B}_{-n-1}(x) = -\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{n+1}} \left[T(n, 1) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k/2}}{k} T(n+1, k) \operatorname{cth}^k \frac{x}{2} \right], \quad (19)$$

где $T(n, k)$ – тангенциальные числа высшего порядка (9).

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Заметим, что из соображений четности очевидно, что $T(n, k) \neq 0$ только тогда, когда $1 \leq k \leq n$ и либо и n , и k четны, либо и n , и k нечетны (см. таблицу). Другими словами, $T(2m, 2r+1) = 0$ и $T(2m+1, 2r) = 0$, $m, r \in \mathbb{N}_0$. Благодаря этому вышеприведенные формулы можно записать в несколько упрощенном виде:

$$P_{2m-1}(x) = (-1)^{m-1} T(2m-1, 1) + \sum_{r=1}^m \frac{(-1)^{r+m-1}}{2^r} T(2m, 2r) x^{2r}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (20)$$

$$P_{2m}(x) = \sum_{r=0}^m \frac{(-1)^{r+m}}{2^{r+1}} T(2m+1, 2r+1) x^{2r+1}, \quad m \in \mathbb{N}_0. \quad (21)$$

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	0	2							
3	2	0	6						
4	0	16	0	24					
5	16	0	120	0	120				
6	0	272	0	960	0	720			
7	272	0	3696	0	8400	0	5040		
8	0	7936	0	48384	0	80640	0	40320	
9	7396	0	168960	0	645120	0	846720	0	362880

Чтобы продемонстрировать другие возможные приложения наших результатов, перечислим некоторые $\mathcal{F}_{-n}(x)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{-2}(x) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}, \\ \mathcal{F}_{-3}(x) &= -\frac{1}{4} \operatorname{th} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{th}^3 \frac{x}{2}, \\ \mathcal{F}_{-4}(x) &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \operatorname{th}^2 \frac{x}{2} - \frac{3}{8} \operatorname{th}^4 \frac{x}{2}, \\ \mathcal{F}_{-5}(x) &= \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{5}{4} \operatorname{th}^3 \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \operatorname{th}^5 \frac{x}{2}, \\ \mathcal{F}_{-6}(x) &= \frac{1}{4} - \frac{17}{8} \operatorname{th}^2 \frac{x}{2} + \frac{15}{4} \operatorname{th}^4 \frac{x}{2} - \frac{15}{8} \operatorname{th}^6 \frac{x}{2}, \\ \mathcal{F}_{-7}(x) &= -\frac{17}{8} \operatorname{th} \frac{x}{2} + \frac{77}{8} \operatorname{th}^3 \frac{x}{2} - \frac{105}{8} \operatorname{th}^5 \frac{x}{2} + \frac{45}{8} \operatorname{th}^7 \frac{x}{2}, \\ \mathcal{F}_{-8}(x) &= -\frac{17}{16} + \frac{31}{2} \operatorname{th}^2 \frac{x}{2} - \frac{189}{4} \operatorname{th}^4 \frac{x}{2} + \frac{105}{2} \operatorname{th}^6 \frac{x}{2} - \frac{315}{16} \operatorname{th}^8 \frac{x}{2}.\end{aligned}$$

В заключение отметим особые значения, следующие из полученных результатов:

$$\mathcal{F}_{-2m}(0) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{n+1}} T(n, 1), \quad \mathcal{F}_{1-2m}(0) = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Благодарности. Автор отмечает финансовую поддержку со стороны Министерства науки Сербской республики (исследовательские проекты № 142025, 144004).

Список литературы

- [1] R. B. Dingle, *Appl. Sci. Res. B*, **6** (1957), 225–239.
- [2] R. B. Dingle, *Appl. Sci. Res. B*, **6** (1957), 240–244.
- [3] J. McDougall, E. C. Stoner, *Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, **237** (1938), 67–104.
- [4] E. C. Stoner, *Philos. Magazine B*, **28**:188 (1939), 257–286.
- [5] P. Rhodes, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, **204**:1078 (1950), 396–405.
- [6] M. L. Glasser, *J. Math. Phys.*, **5**:8 (1964), 1150–1152.
- [7] W. J. Cody, H. C. Thacher, Jr., *Math. Comput.*, **21**:97 (1967), 30–40.
- [8] R. J. Swenson, *Phys. Lett. A*, **26**:12 (1968), 632–633.
- [9] A. Wesserman, *Phys. Lett. A*, **27**:6 (1968), 360–361.
- [10] S. D. Jog, *Phys. Lett. A*, **72**:4–5 (1979), 303–305.
- [11] J. S. Blakemore, *Solid-State Electron.*, **25**:11 (1982), 1067–1076.
- [12] F. J. Fernández Velicia, *Phys. Rev. A*, **30**:3 (1984), 1194–1207.
- [13] P. Van Halen, D. L. Pulfrey, *J. Appl. Phys.*, **57**:12 (1985), 5271–5274.
- [14] F. J. Fernández Velicia, *Phys. Rev. A*, **34**:5 (1986), 4387–4395.
- [15] I. J. Ohsugi, T. Kojima, I. Nishida, *J. Appl. Phys.*, **63**:10 (1988), 5179–5181.
- [16] J. E. Robinson, *Phys. Rev.*, **83**:3 (1951), 678–679.
- [17] J. Clunie, *Proc. Phys. Soc. A*, **67**:7 (1954), 632–636.
- [18] E. W. Ng, C. J. Devine, R. F. Tooper, *Math. Comput.*, **23**:107 (1969), 639–643.
- [19] L. Carlitz, R. Scoville, *Duke Math. J.*, **39**:3 (1972), 413–429.
- [20] L. Carlitz, *SIAM Rev.*, **17**:2 (1975), 298–322.
- [21] M. E. Hoffman, *Amer. Math. Monthly*, **102**:1 (1995), 23–30.
- [22] E. D. Rainville, *Special Functions*, Macmillan, New York, 1960.