Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. В. Лисицын, А. В. Шаповалов, Интегрируемые N -мерные системы на алгебре Хопфа и q -деформации, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 3, 373–390

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf645>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 10:58:20

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ N -МЕРНЫЕ СИСТЕМЫ НА АЛГЕБРЕ ХОПФА И q -ДЕФОРМАЦИИ

Построен класс интегрируемых классических и квантовых систем на алгебрах Хопфа, описывающих n взаимодействующих частиц. Получена общая структура интегрируемой гамильтоновой системы для алгебры Хопфа $A(g)$ простой алгебры Ли g , из которой следует, что интегралы движения зависят от линейных комбинаций k координат фазового пространства, $2 \cdot \text{ind } g \leq k \leq \mathbf{g} \cdot \text{ind } g$, где $\text{ind } g$ и $\mathbf{g}$ – индекс и число Кокстера алгебры Ли g . Проведена стандартная процедура q -деформации и получена соответствующая интегрируемая система. Общая схема проиллюстрирована на примерах алгебр $sl(2)$, $sl(3)$ и $o(3, 1)$. Для квантового аналога N -мерной гамильтоновой системы на алгебре Хопфа $A(sl(2))$ построено точное решение с помощью метода некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В основе концепции интегрируемости гамильтоновых систем лежит факт существования полного набора сохраняющихся величин, находящихся в инволюции относительно скобки Пуассона. Среди различных подходов к построению интегрируемых систем методами теории алгебр Ли отметим метод некоммутативного интегрирования, метод изоспектральной деформации, основанный на представлении Лакса, и методы теории алгебр Хопфа.

В теории некоммутативного интегрирования гамильтоновых систем [1–3] гамильтониан H принадлежит коммутативной подалгебре размерности $\text{ind } g$ алгебры Ли $g = \{f_i\}$ функций фазового пространства M^{2n} относительно скобки Ли–Пуассона. Выполнение условия

$$\text{ind } g + \dim g = 2n$$

влечет интегрируемость гамильтоновой системы. Полный набор интегралов в инволюции строится из элементов алгебры Ли и операторов Казимира, образующих центр обертывающей алгебры.

Другой подход к построению динамических систем, обладающих инволютивным набором, основан на представлении Лакса и r -матричных алгебрах (см., например, [4, 5]).

*Томский государственный университет, Томск, Россия. E-mail: lisitsyn@phys.tsu.ru; shpv@phys.tsu.ru

В r -матричном методе построения интегрируемых гамильтоновых систем предполагается существование $(n \times n)$ -матрицы Лакса $L(u)$, зависящей от спектрального параметра u . Скобки Ли–Пуассона элементов матрицы $L(u)$ удовлетворяют условию

$$\{(L(u) \times \text{id}), (\text{id} \times L(v))\} = [r(u - v), (L(u) \times \text{id}) + (\text{id} \times L(v))], \quad (1)$$

где $[\cdot, \cdot]$ – обычный коммутатор матриц, а $r(u)$ есть $(n^2 \times n^2)$ -матрица, удовлетворяющая классическому уравнению Янга–Бакстера. Согласно теореме Бабелона и Вайалле [6] спектральные инварианты $\tau_k(u)$ матрицы Лакса

$$\{\tau_k(u), \tau_p(v)\} = 0$$

находятся в инволюции. Последнее свойство лежит в основе доказательства интегрируемости широкого класса гамильтоновых систем. Отметим, что был получен целый ряд соотношений типа (1), которые приводят к инволютивности спектральных инвариантов матрицы Лакса, а также существуют квантовые обобщения этих соотношений (см., например, [7–9]).

Метод построения интегрируемых систем на алгебрах Хопфа был предложен недавно в работах [10, 11]. Он позволяет генерировать интегрируемые гамильтоновы системы n взаимодействующих частиц (начиная с гамильтониана одночастичной задачи) с помощью операции коумножения, определенной в алгебре Хопфа. Дальнейшее развитие метода основано на теории q -деформации алгебр Хопфа, что значительно расширяет множество интегрируемых систем [10, 11].

Анализ интегрируемой системы предполагает не только установление факта интегрируемости, но и построение решения системы в явном виде. Эта задача существенно усложняется для квантово-механических аналогов классических гамильтоновых систем, поскольку не существует универсального метода решения совместной задачи на собственные значения для полного набора коммутирующих операторов сложной структуры (например, для дифференциальных операторов высоких порядков или нелокальных операторов). Для некоторых классов операторов такие методы известны. В частности, для дифференциальных операторов не выше второго порядка точное решение можно найти с помощью “обычной” теории разделения переменных. Теорема о необходимых и достаточных условиях в этом случае доказана в работе [12]. В ряде других случаев применим метод некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений [13, 14].

В теории r -матричных алгебр для отыскания точного решения спектральной задачи используют развитый в последние два десятилетия метод функционального анзаца Бете (ФБА), сформулированный в работе [15], который также позволяет провести разделение переменных, однако, в отличие от “обычной” теории разделения переменных [12], переход к разделяющимся переменным осуществляется каноническим (в общем случае координатно-импульсным) преобразованием фазового пространства. С помощью метода ФБА были получены точные решения для ряда систем n взаимодействующих частиц, например для XX - и XXZ -магнетиков Годена и некоторых видов цепочек Тоды (см.,

например, [16, 17]). В теории алгебр Хопфа пока не предложен систематический подход к отысканию точных решений, что определяет актуальность исследования данной проблемы.

В настоящей работе получены условия на одночастичное представление алгебры Ли g , приводящее к интегрируемости n -частичной модели на алгебре Хопфа $A(g)$. Найден общий вид одночастичного представления для простой алгебры Ли – наиболее интересного случая с точки зрения проблемы интегрируемости. Построена и исследована гамильтонова система на алгебре Хопфа простой алгебры Ли g общего вида. Проведена стандартная процедура q -деформации и получена гамильтонова система для соответствующей квантовой (q -деформированной) алгебры. Все найденные системы являются интегрируемыми по построению. В явном виде найдены N -мерные интегрируемые системы для комплексных алгебр $sl(2)$, $sl(3)$ и вещественной алгебры $o(3, 1)$. Для квантово-механического (квантового¹⁾) аналога $sl(2)$ -магнетика Годена в явном виде построено точное решение с помощью метода некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений [13, 14].

2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ НА АЛГЕБРАХ ХОПФА

Приведем необходимые в дальнейшем сведения из теории алгебр Хопфа, следуя [18]. Алгебра Хопфа определяется как ассоциативная алгебра A со следующими операциями:

$m: A \otimes A \rightarrow A$ – умножение,

$\eta: \mathbb{C} \rightarrow A$ – единичное отображение,

$\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ – коумножение,

$\epsilon: A \rightarrow \mathbb{C}$ – коединичное отображение,

$\gamma: A \rightarrow A$ – антипод,

удовлетворяющими условиям

$$(\text{id} \otimes \Delta)\Delta(a) = (\Delta \otimes \text{id})\Delta(a), \quad (2)$$

$$(\text{id} \otimes \epsilon)\Delta(a) = (\epsilon \otimes \text{id})\Delta(a) = a, \quad (3)$$

$$m((\text{id} \otimes \gamma)\Delta(a)) = m((\gamma \otimes \text{id})\Delta(a)) = \epsilon(a)\mathbf{1}, \quad (4)$$

где m – операция обычного умножения, $m(a \otimes b) = a \cdot b$.

Простейший пример алгебры Хопфа $A(g)$ строится с помощью универсальной обертывающей алгебры $U(g)$ алгебры Ли g с генераторами X_i . Алгебра $U(g)$ наделяется структурой алгебры Хопфа следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta(X_i) &= \mathbf{1} \otimes X_i + X_i \otimes \mathbf{1}, & \Delta(\mathbf{1}) &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \\ \epsilon(X_i) &= 0, & \epsilon(\mathbf{1}) &= 1, \\ \gamma(X_i) &= -X_i, & \gamma(\mathbf{1}) &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

¹⁾ Для квантово-механических систем мы используем термин “квантовая система”, его отличие от термина “квантовая алгебра” (q -деформированная алгебра) следует из контекста и не вызывает недоразумений.

Из определения, в частности, следует совместность коумножения Δ со скобкой Ли:

$$[\Delta(X_i), \Delta(X_j)]_{A \otimes A} = \Delta([X_i, X_j]_A), \quad \forall X_i, X_j \in g. \quad (6)$$

Построим $\Delta_s(X_i)$, $s = 1, 2, \dots, N$, как результат s -го коумножения. Определим функции $\Delta_s K_p = K_p(\Delta_s(X_i))$, где $K_p(X_j)$ – функции Казимира алгебры Ли g , $p = 1, \dots, r = \text{ind } g$. Тогда из (6) следует

$$[\Delta_N(X_i), \Delta_s K_p] = \Delta[X_i, K_p(X_j)] = 0, \quad \forall s = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

$$[\Delta_s K_p, \Delta_m K_q] = 0, \quad \forall s, m = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

Определим гамильтонову систему на алгебре Хопфа $A(g)$ следующим образом. Реализуем генераторы X_i алгебры Ли g функциями некоторого фазового пространства M^{2l} со стандартной скобкой Ли–Пуассона

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial X_i} \frac{\partial G}{\partial X_j} C_{ij}^k X_k, \quad (9)$$

здесь $F, G \in C^\infty(M^{2l})$, где $C^\infty(M^{2l})$ – пространство гладких функций на фазовом пространстве M^{2l} , C_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли g . В результате s -го коумножения генераторов $\Delta_s(X_i)$, $s = 2, 3, \dots$, получаем соответствующую функцию фазового пространства $M_1^{2l} \otimes M_2^{2l} \otimes \dots \otimes M_s^{2l} = M^{2s \cdot l}$. В качестве гамильтониана в фазовом пространстве $M^{2N \cdot l}$ выберем произвольную функцию $H = H(\Delta_N(X_i))$ (в частности, $H = \Delta_N K_p$). Из (7), (8) следует (см. [10])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функция Гамильтона H коммутирует относительно скобки Ли–Пуассона пространства $M^{2N \cdot l}$ с $N \cdot r$ объектами $\Delta_s K_p$, $\Delta_N H_t$, где $s = 2, 3, \dots, N$, $p, t = 1, 2, \dots, r = \text{ind } g$, $\{H_t\}$ – r -мерная коммутативная подалгебра алгебры g .*

Из предложения 1 непосредственно получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для интегрируемости гамильтоновой системы на алгебре Хопфа $A(g)$ достаточно реализовать представление алгебры Ли g в фазовом пространстве M^{2r} , где $r = \text{ind } g$.*

Можно значительно расширить класс интегрируемых систем, если перейти от универсальной обертывающей алгебры $U(g)$ к квантовой алгебре $U_q(g)$. Под квантовой, или q -деформированной алгеброй Ли g мы понимаем новую алгебру g_q , которая в пределе $q \rightarrow 1$ переходит в алгебру Ли g . Для q -деформированной алгебры также можно ввести операцию коумножения, отличающуюся от определенной в (5), причем так, чтобы сохранялось основное свойство (6), приводящее к коммутативности (7), (8) (подробно о q -деформации полупростых алгебр Ли см. ниже раздел 5).

3. ОДНОЧАСТИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Чтобы получить интегрируемую систему, согласно предложению 2 необходимо построить представление алгебры Ли g в классе функций $2r$ -мерного фазового пространства.

Одночастичное представление алгебры Ли $g = \{X_i\}$ определим как неприводимое представление в классе линейных по импульсам функций

$$X_i = \sum_{k=1}^r a_i^k(x) p^k + b_i(x, J) \quad (10)$$

$2r$ -мерного фазового пространства M^{2r} , $r = \text{ind } g$. Скобка Ли–Пуассона определяется выражением (9), переменные p^k , x^j являются каноническими, $\{p^k, x^j\} = \delta^{kj}$. Условие неприводимости требует, чтобы функции Казимира в одночастичном представлении были постоянными:

$$K_p(X_i) = J_p, \quad (11)$$

где J_p – комплексные числа, включая нуль.

С помощью операции коумножения построим k -частичное представление алгебры Ли по формуле (5):

$$\Delta_k(X_i) = \sum_{s=1}^k X_{(s)i} = \sum_{s=1}^k X_i(x_s, p_s), \quad (12)$$

где $X_i(x_s, p_s)$ – генераторы одночастичного представления (10), зависящие от s -го набора координат и импульсов.

Согласно результатам раздела 2 функция Гамильтона $H = H(\Delta_N(X_i))$ и сохраняющиеся величины $\Delta_s K_p$ находятся в инволюции относительно скобки Ли–Пуассона, причем нетрудно убедиться, что $\Delta_s K_p$, $s > 1$, в отличие от (11), являются нетривиальными функциями переменных фазового пространства.

Отметим, что при каноническом координатном преобразовании $x' = x'(x)$ одночастичное представление (10) остается линейным по импульсам. При каноническом координатно-импульсном преобразовании общего вида $x' = x'(x, p)$ линейность по импульсам нарушается. Канонические преобразования порождают классы эквивалентных гамильтоновых систем.

4. УНИВЕРСАЛЬНАЯ ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРА ПРОСТОЙ КОМПЛЕКСНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ОБЩЕГО ВИДА

Построим одночастичное представление и соответствующую гамильтонову систему, используя схему предыдущего раздела для обертывающей алгебры $U(g)$, где g – простая комплексная алгебра Ли. Выбор простой алгебры Ли обусловлен тем, что ее операторы Казимира являются полиномами не ниже второго порядка по генераторам алгебры. Следовательно, в представлении (10) операторы Казимира квадратичны по импульсам и не могут быть приведены каноническим преобразованием к линейным по импульсам интегралам движения. Линейные по импульсам интегралы движения не представляют

интереса с точки зрения проблемы интегрируемости. Гамильтонова система в случае полупростой алгебры Ли строится как сумма независимых гамильтоновых систем простых алгебр Ли.

Простая комплексная алгебра Ли общего вида определяется $3r$ генераторами $\{H^i, E_+^i, E_-^i, \quad i = 1, 2, \dots, r = \text{ind } g\}$, соответствующими простым корням $\{\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(r)}\}$. Эти генераторы удовлетворяют соотношениям

$$[H^i, H^j] = 0, \quad (13)$$

$$[H^i, E_\pm^j] = \pm A^{ij} E_\pm^j, \quad (14)$$

$$[E_+^i, E_-^j] = \delta^{ij} H^i, \quad (15)$$

и соотношениям Серра

$$(\text{ad}_{E_\pm^i})^{1-A^{ji}} E_\pm^j = 0 \quad (i \neq j). \quad (16)$$

Здесь A^{ij} — матрица Картана алгебры g , ad — оператор присоединенного представления.

Построим одночастичное представление алгебры g . Для простой алгебры Ли $\text{ind } g$ равен размерности подалгебры Картана $\{H_i\}$. Выберем генераторы подалгебры Картана в виде независимых импульсов, полагая

$$H^i = p^i, \quad (17)$$

что автоматически удовлетворяет требованию (13). Генераторы $E_\pm^i$ выберем в виде линейных по импульсам функций:

$$E_\pm^i = \sum_k a_\pm^{ik}(x) p^k + b_\pm^i(x, J).$$

Интегрируя (14), получим

$$E_\pm^i = \exp \left[\pm \sum_k A^{ik} x^k \right] \left(\sum_s T_{\pm s}^i p^s + T_{\pm 0}^i \right), \quad (18)$$

где $T_{\pm s}^i, T_{\pm 0}^i$ — числовые параметры, удовлетворяющие некоторым алгебраическим соотношениям, вытекающим из (15), (16). Генераторы, соответствующие сложным корням β , определяются из соотношений Серра (16) и имеют вид

$$E_\pm^\beta = \exp \left[\pm \sum_k \tilde{A}^{\beta k} x^k \right] \left(\sum_s \tilde{T}_{\pm s}^\beta p^s + \tilde{T}_{\pm 0}^\beta \right),$$

где $\tilde{A}^{\beta k}, \tilde{T}_{\pm s}^\beta, \tilde{T}_{\pm 0}^\beta$ определяются из (16).

Построим прямоугольную матрицу

$$B^{\alpha i} = (A^{ji} \mid \tilde{A}^{\beta i}),$$

где i пробегает значения $1, 2, \dots, r$, а $\alpha \in \Phi$, Φ — множество всех корней. Тогда

$$E_{\pm}^{\alpha} = \exp \left[\pm \sum_k B^{\alpha k} x^k \right] \left(\sum_s T_{\pm s}^{\alpha} p^s + T_{\pm 0}^{\alpha} \right). \quad (19)$$

Условие неприводимости (11) выполнено для любого представления, реализованного в фазовом пространстве с числом координат не более чем $(\dim g - \text{ind } g)/2$ [13]. Таким образом, получаем одночастичное представление в пространстве $r = \text{ind } g$ координат. Для любой простой алгебры Ли справедливо соотношение $\text{ind } g \leq (\dim g - \text{ind } g)/2$, что обеспечивает выполнение условия (11). Таким образом, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Одночастичное представление простой алгебры Ли общего вида определяется выражениями (17), (19).*

Соответствующее m -частичное представление алгебры g построим по формуле (12), получим

$$\begin{aligned} \Delta_m H^i &= \sum_{s=1}^m H_{(s)}^i = \sum_{s=1}^m p_s^i, \\ \Delta_m E_{\pm}^{\alpha} &= \sum_{s=1}^m E_{\pm(s)}^{\alpha} = \sum_{s=1}^m \exp \left[\pm \sum_k A^{\alpha k} x_s^k \right] \left(\sum_c T_{\pm c}^{\alpha} p_s^c + T_{\pm 0}^{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Количество независимых функций Казимира равно индексу алгебры, $r = \text{ind } g$. Независимые функции Казимира простой алгебры Ли являются полиномами различных степеней по генераторам алгебры (кроме D_2). Будем нумеровать функции Казимира индексом q , равным степени полинома. Функции Казимира простой алгебры Ли имеют вид

$$K_q = \sum_{a_1, a_2, \dots, a_q} d_{a_1 a_2 \dots a_q} X^{a_1} \dots X^{a_q},$$

где $d_{a_1 a_2 \dots a_q}$ — инвариантный тензор присоединенного представления: $d_{a_1 a_2} = \sum_{d, e} C_{a_1 d}^e C_{a_2 e}^d$, $d_{a_1 a_2 a_3} = \sum_{d, e, k} C_{a_1 d}^e C_{a_2 e}^k C_{a_3 k}^d$ и т.д.

В базисе Картана функции Казимира имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} K_q &= \sum_{p=0}^q \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^r \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_{q-p} \in \Phi \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{q-p} = 0}} a_{i_1 \dots i_p \alpha_1 \dots \alpha_{q-p}} H^{i_1} \dots H^{i_p} E^{\alpha_1} \dots E^{\alpha_{q-p}} = \\ &= \sum_{p=0}^q \sum_{i_1, \dots, i_q=1}^r a_{i_1 \dots i_q} H^{i_1} \dots H^{i_q} + \\ &+ \sum_{i_1, \dots, i_{q-2}=1}^r \sum_{\alpha \in \Phi} a_{i_1 \dots i_{q-2} \alpha (-\alpha)} H^{i_1} \dots H^{i_{q-2}} E^{\alpha} E^{-\alpha} + \\ &+ \sum_{i_1, \dots, i_{q-3}=1}^r \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Phi \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0}} a_{i_1 \dots i_{q-3} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} H^{i_1} \dots H^{i_{q-3}} E^{\alpha_1} E^{\alpha_2} E^{\alpha_3} + \dots \\ &\dots + \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \Phi \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q = 0}} a_{\alpha_1 \dots \alpha_q} E^{\alpha_1} \dots E^{\alpha_q}. \end{aligned}$$

Здесь Φ – множество всех корней, $a_{i_1 \dots i_q}, a_{i_1 \dots i_{q-1} \alpha_1}, \dots, a_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ – числа, определяемые структурными константами алгебры g .

Квадратичная функция Казимира простой алгебры имеет вид

$$K_2(X_i) = \sum_{i,j=1}^r G_{ij} H^i H^j + \sum_{\alpha \in \Phi} E^{-\alpha} E^{\alpha},$$

где G_{ij} – матрица квадратичной формы алгебры Ли. Кубичная функция Казимира (если существует) имеет вид

$$\begin{aligned} K_3(X_i) = & \sum_{i,j,k=1}^r a_{ijk} H^i H^j H^k + \sum_{i=1}^r \sum_{\alpha \in \Phi} a_{i\alpha} H^i E^{\alpha} E^{-\alpha} + \\ & + \sum_{\substack{\alpha \in \Phi \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0}} a_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} E^{\alpha_1} E^{\alpha_2} E^{\alpha_3}. \end{aligned}$$

Построим интегралы движения $\Delta_m K_q = K_q(\Delta_m(X_i))$:

$$\begin{aligned} \Delta_m K_q = & \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^m \sum_{p=0}^q \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^r \times \\ & \times \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_{q-p} \in \Phi \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{q-p} = 0}} a_{i_1 \dots i_p \alpha_1 \dots \alpha_{q-p}} H_{(j_1)}^{i_1} \dots H_{(j_p)}^{i_p} E_{(j_{p+1})}^{\alpha_1} \dots E_{(j_q)}^{\alpha_{q-p}} = \\ = & \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^m \sum_{i_1, \dots, i_q=1}^r a_{i_1 \dots i_q} H_{(j_1)}^{i_1} \dots H_{(j_q)}^{i_q} + \\ & + \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^m \sum_{i_1, \dots, i_{q-2}=1}^r \sum_{\alpha \in \Phi} a_{i_1 \dots i_{q-2} \alpha} H_{(j_1)}^{i_1} \dots H_{(j_{q-2})}^{i_{q-2}} E_{(j_{q-1})}^{\alpha} E_{(j_q)}^{-\alpha} + \\ & + \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^m \sum_{i_1, \dots, i_{q-3}=1}^r \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Phi \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0}} a_{i_1 \dots i_{q-3} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \times \\ & \times H_{(j_1)}^{i_1} \dots H_{(j_{q-3})}^{i_{q-3}} E_{(j_{q-2})}^{\alpha_1} E_{(j_{q-1})}^{\alpha_2} E_{(j_q)}^{\alpha_3} + \dots \\ & \dots + \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^m \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_q \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q = 0}} a_{\alpha_1 \dots \alpha_q} E_{(j_1)}^{\alpha_1} \dots E_{(j_q)}^{\alpha_q}. \end{aligned}$$

Подставляя (20), получим для $\Delta_m K_q$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta_m K_q = & \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^m \sum_{i_1, \dots, i_q=1}^r a_{i_1 \dots i_q} p_{j_1}^{i_1} \dots p_{j_q}^{i_q} + \\ & + \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^m \sum_{i_1, \dots, i_{q-2}=1}^r \sum_{\alpha \in \Phi} a_{i_1 \dots i_{q-2} \alpha} (-\alpha) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left[\sum_{k=1}^r (B^{\alpha k} (x_{q-1}^k - x_q^k)) \right] p_{j_1}^{i_1} \dots p_{j_{q-2}}^{i_{q-2}} \times \\
& \times \left(\sum_{s=1}^r T_{+s}^{\alpha} p_q^s + T_{+0(j_q)}^{\alpha} \right) \left(\sum_{s=1}^r T_{-s}^{\alpha} p_{q-1}^s + T_{-0(j_{q-1})}^{\alpha} \right) + \\
& + \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^m \sum_{i_1, \dots, i_{q-3}=1}^r \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Phi \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0}} a_{i_1 \dots i_{q-3} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \times \\
& \times \exp \left[\sum_{k=1}^r (B^{\alpha_1 k} x_{j_{q-2}}^k + B^{\alpha_2 k} x_{j_{q-1}}^k + B^{\alpha_3 k} x_{j_q}^k) \right] p_{j_1}^{i_1} \dots p_{j_{q-3}}^{i_{q-3}} \times \\
& \times \left(\sum_{s=1}^r T_s^{\alpha_1} p_{j_{q-2}}^s + T_{0(j_{q-2})}^{\alpha_1} \right) \left(\sum_{s=1}^r T_s^{\alpha_2} p_{j_{q-1}}^s + T_{0(j_{q-1})}^{\alpha_2} \right) \times \\
& \times \left(\sum_{s=1}^r T_s^{\alpha_3} p_{j_q}^s + T_{0(j_q)}^{\alpha_3} \right) + \dots + \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^m \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \Phi \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q = 0}} a_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \times \\
& \times \exp \left[\sum_{k=1}^r (B^{\alpha_1 k} x_{j_1}^k + \dots + B^{\alpha_q k} x_{j_q}^k) \right] \times \\
& \times \left(\sum_{s=1}^r T_s^{\alpha_1} p_{j_1}^s + T_{0(j_1)}^{\alpha_1} \right) \times \dots \times \left(\sum_{s=1}^r T_s^{\alpha_q} p_{j_q}^s + T_{0(j_q)}^{\alpha_q} \right). \quad (21)
\end{aligned}$$

Функции $\Delta_N H_q$ и $\Delta_s K_q$, $s = 2, 3, \dots, N$, $q = 1, 2, \dots, r$, находятся в инволюции и образуют полный набор интегралов движения гамильтоновой системы согласно предложению 2. В качестве функции Гамильтона можно выбрать произвольную функцию $H = H(\Delta_N H_s)$ или $H = \Delta_N K_q$.

Выражение (21) показывает, что в интегралы $\Delta_m K_q$ входят лишь вполне определенные линейные комбинации координат фазового пространства. Количество координат, входящих в эти линейные комбинации, изменяется в пределах от $2 \cdot \text{ind } g$ до $l \cdot \text{ind } g$, которые задаются структурой простой алгебры Ли g . Здесь $l = \max_p \left\{ p \mid \sum_{i=1}^p \alpha_i = 0, \alpha_i \in \Phi \right\}$, причем в сумму $\sum_{i=1}^l \alpha_i = 0$ не должны входить суммы $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$, $p < l$. Заметим, что число l совпадает с числом Кокстера $\mathbf{g}$ [18].

В частности, интеграл, квадратичный по импульсам, имеет вид

$$\begin{aligned}
\Delta_s K_2 = K_2(\Delta_s(X_i)) &= \sum_{m,n}^s \sum_{i,j}^r G_{ij} p_n^i p_m^j + \sum_{\alpha \in \Phi} \exp \left(\sum_k B^{\alpha k} (q_{k(m)} - q_{k(n)}) \right) \times \\
&\times \left(\sum_s T_{+s}^{\alpha} p_m^s + T_{+0}^{\alpha} \right) \left(\sum_s T_{-s}^{\alpha} p_n^s + T_{-0}^{\alpha} \right).
\end{aligned}$$

5. q -ДЕФОРМИРОВАННАЯ УНИВЕРСАЛЬНАЯ ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРА ПРОСТОЙ КОМПЛЕКСНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

Для полупростых алгебр известна стандартная процедура q -деформации [18]. Квантовая (q -деформированная) алгебра g_q (g – простая комплексная алгебра Ли) определяется $3r$ генераторами $\{E_{\pm}^i, H^i, i = 1, 2, \dots, r\}$, удовлетворяющими (13), (14) и

$$[E_+^i, E_-^j] = \delta^{ij} [H^i]_q, \quad (22)$$

$$\sum_{p=0}^{1-A^{ji}} (-1)^p (E_{\pm}^i)^p (E_{\pm}^j) (E_{\pm}^i)^{1-A^{ji}-p} = 0, \quad (23)$$

где введено обозначение

$$[x]_q = \frac{q^{\frac{x}{2}} - q^{-\frac{x}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}. \quad (24)$$

Выражение (23) есть аналог соотношения Серра для квантовых алгебр.

Обертывающую алгебру квантовой алгебры, или квантовую универсальную обертывающую алгебру $U_q(g)$ можно наделить структурой алгебры Хопфа, если следующим образом ввести коумножение:

$$\Delta(H^i) = H^i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H^i, \quad (25)$$

$$\Delta(E^i) = E^i \otimes q^{\frac{H^i}{4}} + q^{-\frac{H^i}{4}} \otimes E^i. \quad (26)$$

Коумножение $\Delta_n(X_i)$ для $n > 2$ строится по индукции. При этом сохраняется основное свойство интегрируемых систем – инволютивность величин $\Delta_s \tilde{K}$ относительно скобки Ли:

$$[\Delta_m \tilde{K}, \Delta_n \tilde{K}] = 0, \quad (27)$$

где $\tilde{K}(X_i)$ – центр алгебры $U_q(g)$. Выбрав генераторы одночастичного представления в виде

$$H^i = p^i, \quad (28)$$

удовлетворяющем (13) и условию

$$E_{\pm}^i = a_{i\pm}(x) \left[\frac{p^i}{2} \right]_q + b_{\pm}(x, J), \quad (29)$$

проинтегрируем соотношения (14) и получим одночастичное представление квантовой алгебры следующего вида:

$$E_{\pm}^{\alpha} = \exp \left[\pm \sum_k A^{\alpha k} x^k \right] \left(\sum_s T_{\pm s}^{\alpha} \left[\frac{p^s}{2} \right]_q + T_{\pm 0}^{\alpha} \right). \quad (30)$$

Здесь $T_{\pm s}^{\alpha}, T_{\pm 0}^{\alpha}$ те же, что и для недеформированной алгебры.

По индукции из (25), (26) с учетом (28) и (30) получим m -частичное представление, которое будет иметь существенно другой вид:

$$\begin{aligned}\Delta_m H^i &= \sum_{s=1}^m p_s^i, \\ \Delta_m E_{\pm}^{\alpha} &= \sum_{s=1}^m \exp \left[\pm \sum_k A^{\alpha k} x_s^k \right] \left(\sum_c T_{+c}^{\alpha} \pi_s^c + \tilde{T}_{+0}^{\alpha} \right),\end{aligned}\tag{31}$$

где

$$\pi_k^s = \left[\frac{p_k^s}{2} \right]_q \left(\prod_{i=1}^{k-1} q^{-\frac{p_i}{4}} \right) \left(\prod_{j=k+1}^N q^{\frac{p_j}{4}} \right),\tag{32}$$

$$\tilde{T}_k^i = T_k^i \left(\prod_{i=1}^{k-1} q^{-\frac{p_i}{4}} \right) \left(\prod_{j=k+1}^N q^{\frac{p_j}{4}} \right).\tag{33}$$

Центр алгебры $U_q(g)$ образуют q -деформированные функции Казимира $[K_p]_q$. Алгоритм деформации функций Казимира известен (см., например, [18]). В частности, для алгебры $sl(2)$ квадратичная функция Казимира имеет вид

$$K_2 = \frac{1}{2} H^2 + E^- E^+ + E^+ E^- = 2E^- E^+ + \frac{1}{2} (H+1)^2 - \frac{1}{2},$$

а для $U_q(sl(2))$ имеем

$$[K_2]_q = 2E^- E^+ + \frac{1}{2} [(H+1)^2]_q.$$

Подобный ответ может быть получен и для произвольной простой алгебры Ли.

Интегрируемая модель на $U_q(g)$ строится с помощью величин $\Delta_m [K_p]_q$, которые по построению находятся в инволюции. Чтобы найти эти величины, следует подставить (31)–(33) в

$$\Delta_m [K_p]_q = [K_p(\Delta_m X_i)]_q.$$

Результат вычислений для произвольной простой алгебры Ли имеет громоздкий вид и здесь не приводится.

6. ПРИМЕРЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ ДЛЯ АЛГЕБР $sl(2)$, $sl(3)$, $so(3,1)$

6.1. Алгебра $sl(2)$. В качестве простейшего примера построения интегрируемой системы рассмотрим алгебру Ли $sl(2)$ ранга $r = 1$:

$$[H, E_{\pm}] = \pm 2E_{\pm}, \quad [E_+, E_-] = 0.\tag{34}$$

Одночастичное представление имеет вид

$$\begin{aligned} H &= p, \\ E_+ &= \frac{i}{2} e^{2x} (p + J), \\ E_- &= \frac{i}{2} e^{-2x} (p - J). \end{aligned}$$

Функция Казимира

$$K_2 = \frac{1}{2} H^2 + E_+ E_- + E_- E_+$$

в одночастичном представлении принимает вид $K_2 = (1/2)J^2$. Соответствующая интегрируемая N -мерная гамильтонова система определяется интегралами движения

$$\Delta_s K_2 = \sum_{m,n}^s \frac{1}{2} p_m p_n - \frac{1}{2} e^{2(x_m - x_n)} (p_m + J_m)(p_n - J_n).$$

В качестве функции Гамильтона можно взять произвольную функцию от генераторов N -частичного представления. Можно, например, выбрать $\Delta_N K_2 = K_2(\Delta_N X_i)$. Такая система является системой типа системы Калоджеро и, в частности, описывает XXX -магнетик Годена.

6.2. Алгебра $sl(3)$. Алгебра $sl(3)$ является 8-мерной простой алгеброй Ли с двумерной подалгеброй Картана. Матрица Картана имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Из соотношений Серра следует, что корневое пространство формируется линейными комбинациями α^1, α^2 и $\alpha^1 + \alpha^2$ простых корней α^1, α^2 .

Решая алгебраические уравнения, получаем следующее одночастичное представление алгебры $sl(3)$:

$$\begin{aligned} H^1 &= p^1, & H^2 &= p^2, \\ E_+^1 &= \frac{1}{3} \exp[2x^1 - x^2](2p^1 + p^2 - J), \\ E_-^1 &= \frac{1}{3} \exp[-2x^1 + x^2](-p^1 + p^2 - J), \\ E_+^2 &= -\frac{1}{3} \exp[-x^1 + 2x^2](p^1 - p^2 + J), \\ E_-^2 &= \frac{1}{3} \exp[x^1 - 2x^2](p^1 + 2p^2 + J), \\ E_+^3 &= -\frac{1}{3} \exp[x^1 + x^2](2p^1 + p^2 - J), \\ E_-^3 &= \frac{1}{3} \exp[-x^1 - x^2](p^1 + 2p^2 + J). \end{aligned}$$

Соответствующая интегрируемая $2N$ -мерная гамильтонова система определяется интегралами движения

$$\begin{aligned} \Delta_s K_2 = \sum_{m,n}^s & \left\{ 2p_m^1 p_n^1 + 2p_m^2 p_n^2 + p_m^1 p_n^2 + p_m^2 p_n^1 + \right. \\ & + \exp [2(x_m^1 - x_n^1) - (x_m^2 - x_n^2)] (2p_m^1 + p_m^2 - J_m)(2p_n^1 + p_n^2 - J_n) + \\ & + \exp [-(x_m^1 - x_n^1) + 2(x_m^2 - x_n^2)] (p_m^1 - p_m^2 + J_m)(p_n^1 - p_n^2 + J_n) - \\ & \left. - \exp [(x_m^1 - x_n^1) + (x_m^2 - x_n^2)] (2p_m^1 + p_m^2 - J_m)(2p_n^1 + p_n^2 - J_n) \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Delta_s K_3 = \sum_{m,n,l}^s & \left\{ \sum_{i,j,k=1}^2 a_{ijk} p_m^i p_n^j p_l^k + \right. \\ & + \sum_{i=1}^2 a_{i1} \exp [2(x_m^1 - x_n^1) - (x_m^2 - x_n^2)] (2p_m^1 + p_m^2 - J_m)(2p_n^1 + p_n^2 - J_n) p_l^i + \\ & + \sum_{i=1}^2 a_{i2} \exp [-(x_m^1 - x_n^1) + 2(x_m^2 - x_n^2)] (p_m^1 - p_m^2 + J_m)(p_n^1 - p_n^2 + J_n) p_l^i + \\ & + \sum_{i=1}^2 a_{i3} \exp [(x_m^1 - x_n^1) + (x_m^2 - x_n^2)] (2p_m^1 + p_m^2 - J_m)(2p_n^1 + p_n^2 - J_n) p_l^i + \\ & + \exp [2x_m^1 - x_m^2 - x_n^1 + 2x_n^2 - x_l^1 - x_l^2] \times \\ & \times (2p_m^1 + p_m^2 - J_m)(p_n^1 - p_n^2 + J_n)(p_l^1 + 2p_l^2 + J_l) + \\ & + \exp [-(2x_m^1 - x_m^2 - x_n^1 + 2x_n^2 - x_l^1 - x_l^2)] \times \\ & \left. \times (-p_m^1 + p_m^2 - J_m)(p_n^1 + 2p_n^2 + J_n)(2p_l^1 + p_l^2 - J_l) \right\}. \end{aligned}$$

В качестве функции Гамильтона H можно выбрать произвольную функцию генераторов N -частичного представления:

$$\begin{aligned} \Delta_N H^1 &= \sum_{m=1}^N p_m^1, & \Delta_N H^2 &= \sum_{m=1}^N p_m^2, \\ \Delta_N E_+^1 &= \sum_{m=1}^N \frac{1}{3} \exp [2x_m^1 - x_m^2] (2p_m^1 + p_m^2 - J_m), \\ \Delta_N E_-^1 &= - \sum_{m=1}^N \frac{1}{3} \exp [-2x_m^1 + x_m^2] (-p_m^1 + p_m^2 - J_m), \\ \Delta_N E_+^2 &= \sum_{m=1}^N \frac{1}{3} \exp [-x_m^1 + 2x_m^2] (p_m^1 - p_m^2 + J_m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_N E_-^2 &= \sum_{m=1}^N \frac{1}{3} \exp [x_m^1 - 2x_m^2] (p_m^1 + 2p_m^2 + J_m), \\ \Delta_N E_+^3 &= - \sum_{m=1}^N \frac{1}{3} \exp [x_m^1 + x_m^2] (2p_m^1 + p_m^2 - J_m), \\ \Delta_N E_-^3 &= \sum_{m=1}^N \frac{1}{3} \exp [-x_m^1 - x_m^2] (p_m^1 + 2p_m^2 + J_m).\end{aligned}$$

6.3. Алгебра $o(3, 1)$. Выше мы рассмотрели простые алгебры Ли над полем комплексных чисел. Для вещественных алгебр Ли также можно построить по описанному алгоритму $(N \cdot r)$ -мерную интегрируемую систему. Представляет интерес случай комплексной алгебры Ли $D_2 = A_1 \times A_1$. Эта алгебра является прямой суммой простых алгебр $sl(2) \times sl(2)$ и поэтому полупроста. Примечательно, что вещественная форма алгебры D_2 , изоморфная $o(3, 1)$, является простой алгеброй Ли. Построим $2N$ -мерную интегрируемую систему для алгебры Ли $o(3, 1)$, $r = 2$. Обычно алгебра $o(3, 1)$ задается коммутационными соотношениями

$$[Y_i, Y_j] = \varepsilon_{ijk} Y_k, \quad [Y_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k, \quad [X_i, X_j] = -\varepsilon_{ijk} Y_k,$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный символ Леви-Чивита. Центр обертывающей алгебры образуют две функции Казимира второго порядка по генераторам X_i, Y_j :

$$L = Y_1 X_1 + Y_2 X_2 + Y_3 X_3, \quad A = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2.$$

Пусть $H^1, E_\pm^1$ и $H^2, E_\pm^2$ — генераторы двух экземпляров алгебры Ли $sl(2)$, тогда переход от $sl(2) \times sl(2)$ к $so(3, 1)$ можно осуществить с помощью замены

$$\begin{aligned}Y_1 &= -\frac{i}{2}(E_+^1 + E_-^1 + E_+^2 + E_-^2), \\ Y_2 &= -\frac{1}{2}(E_+^1 - E_-^1 + E_+^2 - E_-^2), \\ Y_3 &= -\frac{i}{2}(H^1 + H^2), \\ X_1 &= \frac{1}{2}(-E_+^1 - E_-^1 + E_+^2 + E_-^2), \\ X_2 &= \frac{i}{2}(E_+^1 - E_-^1 - E_+^2 + E_-^2), \\ X_3 &= -\frac{1}{2}(H^1 - H^2).\end{aligned}$$

Поиск вещественного одночастичного представления является самостоятельной задачей и ее решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \sin x^2 p^1 - \operatorname{tg} x^1 \cos x^2 + J^1 \frac{\cos x^2}{\cos x^1}, \\ Y_2 &= \cos x^2 p^1 + \operatorname{tg} x^1 \sin x^2 - J^1 \frac{\sin x^2}{\cos x^1}, \quad Y_3 = p^2, \\ X_1 &= -\sin x^1 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{\cos x^1} + J^1 \operatorname{tg} x^1 \sin x^2 + J^2 \cos x^1 \cos x^2, \\ X_2 &= \sin x^1 \sin x^2 - \frac{\cos x^2}{\cos x^1} + J^1 \operatorname{tg} x^1 \cos x^2 - J^2 \cos x^1 \sin x^2, \\ X_3 &= \cos x^1 p^1 + J^2 \sin x^1. \end{aligned}$$

Интегралы движения $2N$ -мерной гамильтоновой системы для алгебры $o(3, 1)$ определяются выражениями (для компактности записи мы положили $J_{(m)}^1 = J^1$ и $J_{(m)}^2 = J^2$)

$$\begin{aligned} \Delta_s L = \sum_{m,n}^s & \left\{ \sin(x_m^2 - x_n^2)(\sin x_m^1 - \sin x_n^1) \frac{1}{\cos x_n^1} p_m^1 p_n^2 + \right. \\ & + [(\sin x_m^1 \sin x_n^1 - 1) \cos(x_m^2 - x_n^2) + \cos x_m^1 \cos x_n^1] \times \\ & \times \left(-p_m^1 p_n^1 + \frac{1}{\cos x_m^1 \cos x_n^1} p_m^2 p_n^2 \right) + \\ & + J^1 \left[\sin(x_m^2 - x_n^2)(1 - \sin x_m^1 \sin x_n^1) \frac{1}{\cos x_n^1} p_m^1 + \right. \\ & + \left. \cos(x_m^2 - x_n^2)(\sin x_m^1 - \sin x_n^1) \frac{1}{\cos x_m^1 \cos x_n^1} p_m^2 \right] + \\ & + J^2 \left[(\sin x_m^1 \cos x_n^1 \cos(x_m^2 - x_n^2) - \cos x_m^1 \sin x_n^1) p_m^1 + \right. \\ & + \left. \sin(x_m^2 - x_n^2) \frac{\cos x_n^1}{\cos x_m^1} p_m^2 \right] + \\ & + (J^1)^2 (1 - \sin x_m^1 \sin x_n^1) \cos(x_m^2 - x_n^2) \frac{1}{\cos x_m^1 \cos x_n^1} - \\ & - (J^2)^2 \cos x_m^1 \cos x_n^1 \cos(x_m^2 - x_n^2) - \\ & \left. - J^1 J^2 [\operatorname{tg} x_m^1 \cos x_n^1 + \operatorname{tg} x_m^1 \cos x_n^1 \sin(x_m^2 - x_n^2)] \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Delta_s A = \sum_{m,n}^s & \left\{ (\sin x_m^1 - \sin x_n^1) \sin(x_m^2 - x_n^2) \left(p_m^1 p_n^1 - \frac{1}{\cos x_m^1 \cos x_n^1} p_m^2 p_n^2 \right) + \right. \\ & + \left(\cos(x_m^2 - x_n^2)(\sin x_m^1 \sin x_n^1 - 1) \frac{1}{\cos x_n^1} - \cos x_m^1 \right) p_m^1 p_n^2 + \\ & + J^1 \left[(\sin x_m^1 - \sin x_n^1) \frac{1}{\cos x_n^1} \cos(x_m^2 - x_n^2) p_m^1 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin(x_m^2 - x_n^2)(\sin x_m^1 \sin x_n^1 - 1) \frac{1}{\cos x_m^1 \cos x_n^1} p_m^2 \Big] + \\
& + J^2 [\cos x_n^1 \sin(x_m^2 - x_n^2) p_m^1 + (\sin x_n^1 - \operatorname{tg} x_m^1 \cos x_n^1 \cos(x_m^2 - x_n^2)) p_m^2] + \\
& + J^1 J^2 \cos(x_m^2 - x_n^2) \left(\frac{\cos x_m^1}{\cos x_n^1} - \frac{\cos x_n^1}{\cos x_m^1} \right) - \\
& - (J^1)^2 \sin(x_m^2 - x_n^2) \frac{\sin x_m^1 - \sin x_n^1}{\cos x_m^1 \cos x_n^1} \Big\}.
\end{aligned}$$

7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ $sl(2)$ -МАГНЕТИКА ГОДЕНА

В случае квантовых аналогов классических гамильтоновых систем, кроме вопроса об интегрируемости по Лиувиллю, нетривиальной оказывается проблема построения точного решения в явной форме – получение собственной функции оператора Гамильтона и соответствующего набора коммутирующих интегралов. Общий метод решения этой проблемы для соответствующих систем на алгебрах Хопфа отсутствует. Мы предлагаем подход к отысканию точного решения для квантового аналога XXX -магнетика Годена, который, возможно, удастся обобщить и для более сложных систем.

Пусть оператор Гамильтона имеет вид

$$H = \Delta_n K = \sum_{i \neq j}^n -(x_i - x_j)^2 \partial_{x_i} \partial_{x_j}, \quad (35)$$

где $\partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$. Воспользуемся для редукции исходной квантовой системы с гамильтонианом (35) к системе с меньшим числом независимых переменных методом некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений [13, 14]. Для этого составим следующую систему уравнений первого порядка:

$$(\Delta_n X_i - l(\mu_n, \partial_{\mu_n}, I_n)) \Phi(x, \mu) = 0, \quad (36)$$

где $\{l_i\}$ – одночастичное представление для алгебры, изоморфной $so(2, 1)$, $[l_i, l_j] = -C_{ij}^k$. Структурные коэффициенты взяты с обратным знаком, что обеспечивает совместность системы (36). Операторы $\{l_i\}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
l_1 &= -i\partial_\mu - \frac{iI}{\mu}, \\
l_2 &= -i\mu^2 \partial_\mu + iI\mu, \\
l_3 &= i\mu \partial_\mu.
\end{aligned}$$

В этом представлении оператор Казимира пропорционален единичному оператору, $K(l_i) = I \cdot \mathbf{1}$, поэтому решение системы

$$(\Delta_n X_i - l(\mu_n, \partial_{\mu_n}, I_n)) \Phi(x, \mu) = 0 \quad (37)$$

влечет

$$\Delta_n K \Phi(x, \mu) = I_n \Phi(x, \mu). \quad (38)$$

Введем новые обозначения, положив $x_i = u_i^n$. Решая систему

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l=1}^n \partial_{u_l^n} - \partial_\mu + \frac{I}{\mu} \right) \Psi_n(u^n, \mu_n) &= 0, \\ \left(\sum_{l=1}^n (u_l^n)^2 \partial_{u_l^n} - \mu^2 \partial_\mu - I\mu \right) \Psi_n(u^n, \mu_n) &= 0, \\ \left(\sum_{l=1}^n u_l^n \partial_{u_l^n} + \mu \partial_\mu \right) \Psi_n(u^n, \mu_n) &= 0, \end{aligned}$$

получим

$$\Psi_n = \Psi_{n-2}(u^{n-2}) \left[\frac{(u_n^n - u_{n-1}^n) \mu_n}{(u_n^n + \mu_n)(u_{n-1}^n + \mu_n)} \right]_n^I.$$

Здесь $\Psi_{n-2}(u^{n-2})$ — произвольная функция от $n-2$ переменных u_i^{n-2} ,

$$u_i^{n-2} = \frac{\frac{u_n^n + \mu_n}{u_i^n + \mu_n} - 1}{\frac{u_n^n + \mu_n}{u_{n-1}^n + \mu_n} - 1}. \quad (39)$$

В этих переменных имеем

$$\Delta_{n-2} K = \sum_{l,p=1}^{n-2} (u_l^n - u_p^n)^2 \partial_{u_l^n} \partial_{u_p^n} = \sum_{l,p=1}^{n-2} (u_l^{n-2} - u_p^{n-2})^2 \partial_{u_l^{n-2}} \partial_{u_p^{n-2}}. \quad (40)$$

Таким образом, исходная задача (38) редуцируется к аналогичной задаче, но с меньшим числом независимых переменных. Методом индукции получаем

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \left[\frac{(u_n^n - u_{n-1}^n) \mu_n}{(u_n^n + \mu_n)(u_{n-1}^n + \mu_n)} \right]^{I_n} \times \\ &\times \left[\frac{(u_{n-2}^{n-2} - u_{n-3}^{n-2}) \mu_{n-2}}{(u_{n-2}^{n-2} + \mu_{n-2})(u_{n-3}^{n-2} + \mu_{n-2})} \right]^{I_{n-2}} \cdots \left[\frac{(u_2^2 - u_1^2) \mu_2}{(u_2^2 + \mu_2)(u_1^2 + \mu_2)} \right]^{I_2}, \end{aligned}$$

где переменные u_l^k строятся по индукции (39). В решение входят $n/2$ параметров I_k и $n/2$ параметров μ_k . Таким образом, решение удовлетворяет условию локальной полноты и образует базис точных решений.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсудим некоторые характерные особенности построенных в работе интегрируемых систем на алгебрах Хопфа. Как показано в разделе 4, интегралы движения недеформированной системы (21) зависят только от определенных линейных комбинаций координат фазового пространства, количество которых определяется структурой алгебры

Ли g и изменяется в пределах от $2 \cdot \text{ind } g$ до $\mathbf{g} \cdot \text{ind } g$. Другими словами, число $\mathbf{g} \cdot \text{ind } g$ характеризует кратность взаимодействия элементов системы с координатами x_i .

В простейшем случае для алгебры $A(sl(2))$ ($\text{ind } g = 1$, $\mathbf{g} = 2$) получаем систему типа системы Калоджеро, интегралы которой имеют структуру $F = F((x_i - x_j), p_i, p_j)$ и описывают систему с парным взаимодействием. Для алгебры $sl(3)$ ($\text{ind } g = 2$, $\mathbf{g} = 3$) интегралы движения зависят от линейных комбинаций четырех и шести различных независимых координат, что означает соответствующую кратность взаимодействия элементов системы.

В качестве примеров в явном виде приведены интегрируемые системы на алгебрах Хопфа комплексных алгебр Ли $sl(2)$ и $sl(3)$ и вещественной простой алгебры $o(3, 1)$. Последняя выделяется тем, что является примером простой вещественной формы полупростой комплексной алгебры Ли $sl(2) \times sl(2)$ и требует отдельного рассмотрения.

В работе также рассмотрена задача отыскания точных решений для квантовых аналогов гамильтоновых систем на алгебрах Хопфа $A(g)$. Найдено точное решение для квантового аналога гамильтоновой системы на $A(sl(2))$ с помощью метода некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений. Возможно, такой подход удастся использовать в дальнейшем и для более сложных систем.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00087).

Список литературы

- [1] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. Функциональный анализ и его приложения. 1978. Т. 12. № 2. С. 46–56.
- [2] А. В. Браилов. ДАН СССР. 1983. Т. 271. № 2. С. 273–276.
- [3] А. Т. Фоменко. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [4] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [5] М. В. Карасев, В. П. Маслов. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [6] O. Babelon, C. M. Viallet. Phys. Lett. B. 1990. V. 237. P. 411–415.
- [7] Е. К. Склянин. Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16. № 4. С. 27–34.
- [8] Е. К. Склянин. Функциональный анализ и его приложения. 1983. Т. 17. № 4. С. 34–48.
- [9] В. Б. Кузнецов, А. В. Цыганов. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1989. Т. 172. С. 88–98.
- [10] A. Ballesteros, O. Ragnisco. A systematic construction of completely integrable Hamiltonians from coalgebras. solv-int/9802008.
- [11] A. Ballesteros, F. J. Herranz. Long range integrable oscillator chains from quantum algebras. solv-int/9805004.
- [12] В. Н. Шаповалов. Дифф. уравнения. 1980. Т. 16. С. 1864–1874.
- [13] А. В. Шаповалов, И. В. Широков. ТМФ. 1995. Т. 104. № 2. С. 195–213.
- [14] А. В. Шаповалов, И. В. Широков. ТМФ. 1996. Т. 106. № 1. С. 3–15.
- [15] Е. К. Склянин. Progr. Theor. Phys. Suppl. 1995. V. 118. P. 35–60.
- [16] Е. К. Склянин. Separation of variables in the quantum integrable models related to the Yangian $\mathcal{U}[sl(3)]$. hep-th/9212076.
- [17] J. C. Eilbeck, V. Z. Enol'skii, V. B. Kuznetsov, A. V. Tsiganov. J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 567–578.
- [18] J. Fuchs. Affine Lie Algebras and Quantum Groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

Поступила в редакцию 5.XI.1999 г.