Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Шу-Гуан Лю, Хун-И Фань, Вывод теоремы о свертке для трехмерного запутанного дробного преобразования Фурье с помощью представления трехчастичного запутанного состояния, *ТМФ*, 2009, том 161, номер 3, 459–468

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6452>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:29:14

© 2009 г.

Шу-Гуан Лю*, Хун-И Фань†

ВЫВОД ТЕОРЕМЫ О СВЕРТКЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЗАПУТАННОГО ДРОБНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С ПОМОЩЬЮ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТРЕХЧАСТИЧНОГО ЗАПУТАННОГО СОСТОЯНИЯ

Показано, что путем построения двух взаимно сопряженных представлений трехчастичного запутанного состояния можно естественным образом прийти к запутанному преобразованию Фурье. Доказана теорема о свертке для трехмерного запутанного дробного преобразования Фурье в контексте квантовой механики.

Ключевые слова: трехмерное запутанное дробное преобразование Фурье, теорема о свертке, представление трехчастичного запутанного состояния.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы квантовое запутывание и запутанные состояния привлекли большой интерес физиков. Впервые идею квантового запутывания между двумя частицами предложили Эйнштейн, Подольский и Розен [1]. В работах [2], [3] построено представление двухчастичного запутанного состояния, очень полезное для объяснения явления запутывания. Для трехчастичной системы также было выведено представление трехчастичного запутанного состояния [4], [5], и на его основе найдено трехмерное запутанное преобразование Фурье (ЗПФ), отличное от обычного трехмерного преобразования Фурье (ПФ). Другими словами, трехмерное ЗПФ не есть прямое произведение трех одномерных. Для одномерного ПФ Намиас [6] предложил обобщение, называемое дробным преобразованием Фурье (ДПФ). ДПФ и связанные с ним операторы Бозе впервые были использованы в теории открытых резонаторов в шестидесятых годах (см. ссылки в книге [7]) и позднее в работе МакБрайда и Керра [8]. Обычное ДПФ активно использовалось в оптике Фурье и информационной оптике, но не имело большого значения для оптики, пока не было

*Department of Applied Mathematics and Physics, Anhui University of Technology and Science, Wuhu, Anhui 241000, China. E-mail: sgliu@mail.ustc.edu.cn

†Department of Material Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China

дано физическое определение ДПФ, основанное на распространении света в квадратичной градиентной среде. В работах [9]–[11] ДПФ дробного порядка α (α -ДПФ) определено следующим образом: пусть заданная функция вводится с одной стороны квадратичной градиентной среды в точке $z = 0$, тогда распределение света, наблюдаемое на плоскости $z = z_0$, соответствует α -ДПФ введенной функции ($\alpha = z_0/L$, где $L \equiv (\pi/2)(n_1/n_2)^{1/2}$ – характеристическая длина).

Другой подход к введению ДПФ был предложен Лохманом [12], отметившим алгоритмический изоморфизм между поворотом образа, поворотом функции распределения Вигнера и ДПФ. Лохман описал ДПФ как производимое над функцией преобразование, ведущее к повороту ассоциированной функции распределения Вигнера. Для трехмерного ЗПФ можно также предложить трехмерное запутанное дробное преобразование Фурье (ЗДПФ). Цель данной работы – изучить теорему о свертке для трехмерного ЗДПФ. Напомним теорему о свертке ПФ [13].

Если F_i – ПФ $f_i \in L^1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, то $F_1 F_2$ – ПФ $(f_1 * f_2)$, где свертка двух функций определяется интегралом

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x - y) dy, \quad (1)$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(y) e^{-i\omega y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) F_2(\omega - x) dx. \quad (2)$$

В последнее время разные авторы обобщали теорему о свертке ПФ в одномерном случае на дробные области исходя из других подходов [14], [15]. Таким образом, естественно возникает вопрос: каков формализм теоремы о свертке трехмерного ЗДПФ? Можно ли вывести ее в контексте квантовой оптики? Ответ утвердительный. В настоящей работе использовано преобразование между двумя взаимно сопряженными представлениями трехчастичного запутанного состояния для вывода теоремы о свертке. Это связано с тем, что представления запутанных состояний в квантовой механике полные и ортонормированные, а их взаимное преобразование представляет собой просто ЗПФ. Вывод теоремы строг и достаточно краток.

2. КРАТКИЙ ОБЗОР ТРЕХЧАСТИЧНЫХ ЗАПУТАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Одномерное ПФ дробного порядка α определяется так, что обычное ПФ является его особым случаем, т.е.

$$F_\alpha[g(x)] = \frac{1}{(2\pi \sin \alpha)^{1/2}} e^{i(\alpha - \pi/2)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i(x^2 + p^2)}{2 \tan \alpha} - \frac{ixp}{\sin \alpha}\right] g(x) dx \equiv G(p), \quad (3)$$

где экспоненциальная функция – ядро интеграла. Это преобразование можно рассматривать как особое преобразование координатно-импульсного представления в контексте квантовой механики [16]. Для трехчастичного случая в работах [4], [5] построено два взаимно сопряженных трехмодовых запутанных состояния $|p, \chi_2, \chi_3\rangle$

и $|\chi, p_2, p_3\rangle$, где

$$\begin{aligned} |p, \chi_2, \chi_3\rangle = & \frac{1}{\sqrt{3}\pi^{3/4}} \exp \left[-\frac{p^2}{6} - \frac{1}{3}(\chi_2^2 + \chi_3^2 - \chi_2\chi_3) + \frac{\sqrt{2}ip}{3} \sum_{i=1}^3 a_i^\dagger + \right. \\ & + \frac{\sqrt{2}\chi_2}{3}(a_1^\dagger - 2a_2^\dagger + a_3^\dagger) + \frac{\sqrt{2}\chi_3}{3}(a_1^\dagger + a_2^\dagger - 2a_3^\dagger) + \\ & \left. + \frac{2}{3} \sum_{j>i=1}^3 a_i^\dagger a_j^\dagger - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 a_i^{\dagger 2} \right] |000\rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

что является общим собственным вектором трех совместимых операторов $X_{1j} = X_1 - X_j$, $j = 2, 3$, относительных координат двух частиц и оператора полного импульса $P = \sum_{i=1}^3 P_i$, т.е.

$$\begin{aligned} X_{1j}|p, \chi_2, \chi_3\rangle &= \chi_j|p, \chi_2, \chi_3\rangle, \quad j = 2, 3, \\ P|p, \chi_2, \chi_3\rangle &= p|p, \chi_2, \chi_3\rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $a_i^\dagger$, a_i , $i = 1, 2, 3$, – операторы Бозе, удовлетворяющие соотношению $[a_i, a_i^\dagger] = 1$, они связаны с X_i , P_i соотношениями

$$X_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_i + a_i^\dagger), \quad P_i = \frac{1}{\sqrt{2}i}(a_i - a_i^\dagger). \quad (6)$$

Сопряженное состояние $|p, \chi_2, \chi_3\rangle$ определяется выражением

$$\begin{aligned} |\chi, p_2, p_3\rangle = & \frac{1}{\sqrt{3}\pi^{3/4}} \exp \left[-\frac{\chi^2}{6} - \frac{1}{3}(p_2^2 + p_3^2 - p_2p_3) + \frac{\sqrt{2}\chi}{3} \sum_{i=1}^3 a_i^\dagger + \right. \\ & + \frac{i\sqrt{2}p_2}{3}(a_1^\dagger - 2a_2^\dagger + a_3^\dagger) + \frac{i\sqrt{2}p_3}{3}(a_1^\dagger + a_2^\dagger - 2a_3^\dagger) - \\ & \left. - \frac{2}{3} \sum_{j>i=1}^3 a_i^\dagger a_j^\dagger + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 a_i^{\dagger 2} \right] |000\rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

что является общим собственным вектором операторов $P_{1j} = P_1 - P_j$, $j = 2, 3$, и $X = \sum_{i=1}^3 X_i$,

$$\begin{aligned} X|\chi, p_2, p_3\rangle &= \chi|\chi, p_2, p_3\rangle, \\ P_{1j}|\chi, p_2, p_3\rangle &= P_j|\chi, p_2, p_3\rangle, \quad j = 2, 3. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2}[X_{1j}, P_{1j}] = i, \quad \frac{1}{3}[X, P] = i,$$

X_{1j} сопряжен к P_{1j} , X сопряжен к P , так что $|p, \chi_2, \chi_3\rangle$ сопряжен к $|\chi, p_2, p_3\rangle$. Оба полны и ортонормированны,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dp d\chi_2 d\chi_3 |p, \chi_2, \chi_3\rangle \langle p, \chi_2, \chi_3| &= 1, \\ \langle p, \chi_2, \chi_3 | p', \chi'_2, \chi'_3 \rangle &= \delta(p - p') \delta(\chi_2 - \chi'_2) \delta(\chi_3 - \chi'_3), \\ \int_{-\infty}^{\infty} d\chi dp_2 dp_3 |\chi, p_2, p_3\rangle \langle \chi, p_2, p_3| &= 1, \\ \langle \chi, p_2, p_3 | \chi', p'_2, p'_3 \rangle &= \delta(\chi - \chi') \delta(p_2 - p'_2) \delta(p_3 - p'_3). \end{aligned} \quad (9)$$

Пересечение между ними имеет вид

$$\langle p, \chi_2, \chi_3 | \chi, p_2, p_3 \rangle = \frac{1}{3(2\pi)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{i}{3} (p\chi + \chi_2 p_3 + \chi_3 p_2) + \frac{2i}{3} (p_2 \chi_2 + p_3 \chi_3) \right\}, \quad (10)$$

что можно подтвердить следующим интегрированием с использованием выражений (4) и (7):

$$\begin{aligned} \frac{1}{3(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dp d\chi_2 d\chi_3 |p, \chi_2, \chi_3\rangle \exp \left\{ -\frac{i}{3} (p\chi + \chi_2 p_3 + \chi_3 p_2) + \frac{2i}{3} (p_2 \chi_2 + p_3 \chi_3) \right\} = \\ = |\chi, p_2, p_3\rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Сравнив выражение (10) с традиционным трехмерным преобразованием координатно-импульсного представления

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} = \langle \vec{p} | \vec{x} \rangle, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{p} = (p_1, p_2, p_3), \quad (12)$$

можно заключить, что преобразование представления в (10) происходит запутанным образом. Это ясно из следующего наблюдения. Если мы положим

$$y_1 = \frac{\chi}{3}, \quad y_2 = \frac{-2p_2 + p_3}{3}, \quad y_3 = \frac{p_2 - 2p_3}{3} \quad (13)$$

в выражении (11), то оно примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{3(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dp d\chi_2 d\chi_3 |p, \chi_2, \chi_3\rangle e^{-i(y_1 p + y_2 \chi_2 + y_3 \chi_3)} = \\ = |3y_1, -(2y_2 + y_3), -(2y_3 + y_2)\rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Хотя левая часть кажется нормальным ПФ (y, y_2, y_3 независимы друг от друга), правая часть дает функцию от $-(2y_2 + y_3)$ и $-(2y_3 + y_2)$. Другими словами, когда мы имеем дело с преобразованием представления для двух взаимно сопряженных запутанных состояний, неминуемо приходится производить преобразование запутанным образом, так что мы называем преобразование

$$\begin{aligned} \frac{1}{3(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dp dp_2 dp_3 g(\chi, p_2, p_3) \exp \left\{ -\frac{i}{3} (p\chi + \chi_2 p_3 + \chi_3 p_2) + \frac{2i}{3} (p_2 \chi_2 + p_3 \chi_3) \right\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} d\chi dp_2 dp_3 \langle p, \chi_2, \chi_3 | \chi, p_2, p_3 \rangle \langle \chi, p_2, p_3 | g \rangle = \langle p, \chi_2, \chi_3 | g \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

трехмерным ЗПФ, где $g(\chi, p_2, p_3)$ – волновая функция $|g\rangle$ в $\langle \chi, p_2, p_3 |$ -представлении, $g(\chi, p_2, p_3) = \langle \chi, p_2, p_3 | g \rangle$, и волновая функция состояния $|g\rangle$ в $\langle \chi, p_2, p_3 |$ -представлении превращается в волновую функцию $|g\rangle$ в $\langle p, \chi_2, \chi_3 |$ -представлении. Очевидно, оно отличается от обычного трехмерного ПФ.

3. ТРЕХМЕРНОЕ ЗДПФ

Напомним, что одномерное ДПФ – это просто матричный элемент

$$\left\langle p \left| \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \left(a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2} \right) \right] \right| x \right\rangle,$$

где $\langle p|$ – одномодовое собственное состояние импульса, $|x\rangle$ – одномодовое собственное состояние координаты, мы предполагаем, что ядро трехмерного ЗДПФ представляет собой просто следующий матричный элемент:

$$\langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | \chi, p_2, p_3 \rangle, \quad (16)$$

$$e^O \equiv \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)^3 \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Основываясь на преобразовании (15) и используя соотношения (4) и (7), вычислим матричный элемент (16). Введем операторы

$$\begin{aligned} J_+ &= \frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 (a_i^2 + a_i^{\dagger 2}) - \frac{1}{3} \sum_{j>i=1}^3 (a_i a_j + a_i^\dagger a_j^\dagger) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{6} [P^2 + 2(X_{12}^2 - X_{12}X_{13} + X_{13}^2)], \\ J_- &= -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 (a_i^2 + a_i^{\dagger 2}) + \frac{1}{3} \sum_{j>i=1}^3 (a_i a_j + a_i^\dagger a_j^\dagger) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{6} [X^2 + 2(P_{12}^2 - P_{12}P_{13} + P_{13}^2)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Мы видим, что

$$[J_-, J_+] = -2J_0,$$

где

$$J_0 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 (a_i^2 - a_i^{\dagger 2}) + \frac{1}{3} \sum_{j>i=1}^3 (a_i^\dagger a_j^\dagger - a_i a_j). \quad (18)$$

Очевидно,

$$J_+ + J_- = \sum_{i=1}^3 \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right). \quad (19)$$

С учетом равенства $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$ получаем отношение замыкания

$$[J_-, J_0] = J_-, \quad [J_+, J_0] = -J_+. \quad (20)$$

Заметим, что операторы J_+ и J_- не являются взаимно эрмитово сопряженными, поэтому J_+ , J_- , J_0 составляют новую неунитарную бозонную реализацию Ли алгебры $SU(2)$ в трехмодовом пространстве Фока.

Напомним формулу распутывания оператора преобразованием смежных классов $SU(2)$ [17]:

$$e^{\zeta J_+ - \zeta^* J_-} = e^{\tau J_+} e^{J_0 \ln(1+|\tau|^2)} e^{-\tau^* J_-}, \quad (21)$$

где $\zeta = \theta e^{-i\varphi}$, $\tau = e^{-i\varphi} \operatorname{tg} \theta$ и $1 + |\tau|^2 = \sec^2 \theta$, так что если ζ – чисто мнимое число, $\zeta = i\theta = \theta e^{i\pi/2}$, $\tau = i \operatorname{tg} \theta$, формула (21) сводится к

$$e^{i\theta(J_+ + J_-)} = e^{iJ_+ \operatorname{tg} \theta} e^{J_0 \ln \sec^2 \theta} e^{iJ_- \operatorname{tg} \theta}. \quad (22)$$

Отсюда с учетом выражений (17), (18) имеем

$$\begin{aligned}
 \exp \left[i\theta \sum_{i=1}^3 \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) \right] &= e^{i\theta(J_+ + J_-)} = \\
 &= \exp \left\{ \frac{i}{6} [P^2 + 2(X_{12}^2 - X_{12}X_{13} + X_{13}^2)] \operatorname{tg} \theta \right\} \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ \left[\frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 (a_i^2 - a_i^{\dagger 2}) + \frac{1}{3} \sum_{j>i=1}^3 (a_i^\dagger a_j^\dagger - a_i a_j) \right] \ln \sec^2 \theta \right\} \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{6} [X^2 + 2(P_{12}^2 - P_{12}P_{13} + P_{13}^2)] \operatorname{tg} \theta \right\}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Согласно формулам (10) и (23), а также с учетом выражений (5) и (8) для собственных векторов получаем следующий матричный элемент:

$$\begin{aligned}
 \left\langle p, \chi_2, \chi_3 \left| \exp \left[i\theta \sum_{i=1}^3 \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) \right] \right| \chi, p_2, p_3 \right\rangle &= \\
 &= \exp \left\{ i \operatorname{tg} \theta \frac{\chi^2 + 2p_2^2 + 2p_3^2 - 2p_2p_3 + p^2 + 2\chi_2^2 + 2\chi_3^2 - 2\chi_2\chi_3}{6} \right\} \times \\
 &\quad \times \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^{2J_0 \ln \sec \theta} | \chi, p_2, p_3 \rangle. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Заметим, что выражение для J_0 (18) можно разбить на две части:

$$2J_0 = W - W^\dagger, \quad e^{2\lambda J_0} = e^{\lambda(W - W^\dagger)}, \quad (25)$$

где

$$W^\dagger = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 a_i^{\dagger 2} - \frac{2}{3} \sum_{j>i=1}^3 a_i^\dagger a_j^\dagger,$$

так что $e^{\lambda(W - W^\dagger)}$ – трехмодовый сжимающий оператор. Как показано в работе [4], он действует следующим образом:

$$e^{\lambda(W - W^\dagger)} |\chi, p_2, p_3\rangle = \mu^{3/2} |\mu\chi, \mu p_2, \mu p_3\rangle,$$

$\mu = e^\lambda$ – параметр сжатия. Таким образом, имеем

$$e^{2J_0 \ln \sec \theta} |\chi, p_2, p_3\rangle = (\sec \theta)^{3/2} |\chi \sec \theta, p_2 \sec \theta, p_3 \sec \theta\rangle. \quad (26)$$

Используя формулы (10) и (26), получаем

$$\begin{aligned}
 \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^{2J_0 \ln \sec \theta} | \chi, p_2, p_3 \rangle &= \\
 &= \frac{1}{3(2\pi \cos \theta)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{i}{3 \cos \theta} (p\chi + p_2\chi_3 + \chi_2p_3 - 2p_2\chi_2 - 2p_3\chi_3) \right\}. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Подставляя выражение (27) в (24) и положив $\theta \rightarrow \pi/2 - \alpha$, выводим

$$\begin{aligned} \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | \chi, p_2, p_3 \rangle = \\ = \frac{1}{3(2\pi \sin \alpha)^{3/2}} \exp \left\{ \frac{i}{6 \operatorname{tg} \alpha} (\chi^2 + 2p_2^2 - 2p_2 p_3 + 2p_3^2 + p^2 + 2\chi_2^2 - 2\chi_2 \chi_3 + 2\chi_3^2) - \right. \\ \left. - \frac{i}{3 \sin \alpha} (p\chi + p_2 \chi_3 + \chi_2 p_3 - 2p_2 \chi_2 - 2p_3 \chi_3) \right\} \equiv A(\alpha). \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, вычисление матричного элемента (16) завершено. Взяв $A(\alpha)$ за ядро преобразования, можно определить следующее α -ЗДПФ функции $g(\chi, p_2, p_3)$:

$$\mathfrak{F}_\alpha [g(\chi, p_2, p_3)] = e^{i3(\alpha - \pi/2)/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi dp_2 dp_3 A(\alpha) g(\chi, p_2, p_3). \quad (29)$$

Из формулы (28) и отношения полноты (9) видим, что на самом деле ЗДПФ $\langle \chi, p_2, p_3 | g \rangle$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha [g(\chi, p_2, p_3)] = \\ = e^{i3(\alpha - \pi/2)/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi dp_2 dp_3 \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | \chi, p_2, p_3 \rangle \langle \chi, p_2, p_3 | g \rangle = \\ = \left\langle p, \chi_2, \chi_3 \left| \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sum_{i=1}^3 a_i^\dagger a_i \right] \right| g \right\rangle \equiv G(p, \chi_2, \chi_3). \end{aligned} \quad (30)$$

Далее, пусть $G(p, \chi_2, \chi_3) \equiv \langle p, \chi_2, \chi_3 | G \rangle$; из (30) следует

$$|G\rangle = e^{-i3(\alpha - \pi/2)/2} e^O |g\rangle \equiv |g\rangle. \quad (31)$$

Таким образом, $|G\rangle$ – преобразованное с помощью ЗДПФ состояние $|g\rangle$, и e^O называется оператором ЗДПФ. Тем самым ЗДПФ $g(\chi, p_2, p_3)$ было переформулировано в контексте квантовой механики, что может помочь легко вычислять ЗДПФ квантово-механических волновых функций.

4. ТЕОРЕМА О СВЕРТКЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЗДПФ

Теперь мы сформулируем теорему о свертке для ЗДПФ, продолжающую теорему о свертке для ПФ.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathfrak{F}_\alpha [f(\chi, p_2, p_3)](p, \chi_2, \chi_3) \equiv \mathfrak{F}_\alpha(p, \chi_2, \chi_3)$ – ЗДПФ функции $f(\chi, p_2, p_3)$ и $\mathcal{G}_\alpha [g(\chi, p_2, p_3)](p, \chi_2, \chi_3) \equiv \mathcal{G}_\alpha(p, \chi_2, \chi_3)$ – ЗДПФ функции $g(\chi, p_2, p_3)$. Тогда $\mathfrak{F}_\alpha(p, \chi_2, \chi_3) \mathcal{G}_\alpha(p, \chi_2, \chi_3) e^{-ik(\alpha)[p^2 + 2(\chi_2^2 - \chi_2 \chi_3 + \chi_3^2)]} = \text{ЗДПФ}^1 (f \star g)(\chi, p_2, p_3) \equiv h(\chi, p_2, p_3)$, где свертка двух функций в смысле ЗДПФ определяется как

$$(f \star g)(\chi, p_2, p_3) = \frac{1}{3(2\pi \sin \alpha)^{3/2}} e^{-ik(\alpha)\Upsilon} (\tilde{f} \star \tilde{g})(\chi, p_2, p_3) \equiv h(\chi, p_2, p_3), \quad (32)$$

и

$$(\tilde{f} \star \tilde{g})(\chi, p_2, p_3) = \int d\beta d\gamma d\omega \tilde{f}(\beta, \gamma, \omega) \tilde{g}(\chi - \beta, p_2 - \gamma, p_3 - \omega), \quad (33)$$

¹⁾Здесь $\star$ обозначает операцию свертки для ЗДПФ, отличную от $*$ в (1).

где

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\chi, p_2, p_3) &= f(\chi, p_2, p_3)e^{ik(\alpha)\Upsilon}, \\ \Upsilon &= \chi^2 + 2(p_2^2 - p_2p_3 + p_3^2), \quad k(\alpha) = \frac{1}{6 \operatorname{tg} \alpha}.\end{aligned}\quad (34)$$

Это утверждение можно сформулировать так: ЗДПФ функции $h(\chi, p_2, p_3)$ – это $H_\alpha(p, \chi_2, \chi_3)$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_\alpha[h(\chi, p_2, p_3)] &= e^{i3(\alpha-\pi/2)/2} \int d\chi dp_2 dp_3 A(\alpha)h(\chi, p_2, p_3) = \\ &= e^{i3(\alpha-\pi/2)/2} \int d\chi dp_2 dp_3 \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | \chi, p_2, p_3 \rangle \langle \chi, p_2, p_3 | h \rangle = \\ &= \mathfrak{F}_\alpha(p, \chi_2, \chi_3) \mathcal{G}_\alpha(p, \chi_2, \chi_3) e^{-ik(\alpha)[p^2+2(\chi_2^2-\chi_2\chi_3+\chi_3^2)]} \equiv \\ &\equiv H_\alpha(p, \chi_2, \chi_3).\end{aligned}\quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этой теоремы мы используем дираковские обозначения бра- и кет-состояний, вводя

$$\begin{aligned}h(\chi, p_2, p_3) &= \langle \chi, p_2, p_3 | h \rangle = \langle \chi, p_2, p_3 | f \star g \rangle, \\ (\tilde{f} \star \tilde{g})(\chi, p_2, p_3) &= \langle \chi, p_2, p_3 | \tilde{f} \star \tilde{g} \rangle.\end{aligned}\quad (36)$$

Тогда согласно (30), (31) и (9), а также (32) имеем

$$\begin{aligned}H_\alpha(p, \chi_2, \chi_3) &= \langle p, \chi_2, \chi_3 | H \rangle = B \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | h \rangle = \\ &= B \int d\chi dp_2 dp_3 \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | \chi, p_2, p_3 \rangle \langle \chi, p_2, p_3 | f \star g \rangle = \\ &= \frac{B}{3\Omega^{3/2}} \int d\chi dp_2 dp_3 \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | \chi, p_2, p_3 \rangle \times \\ &\quad \times \{ \langle \chi, p_2, p_3 | \tilde{f} \star \tilde{g} \rangle e^{-ik(\alpha)\Upsilon} \},\end{aligned}\quad (37)$$

где $B = e^{-i3(\alpha-\pi/2)/2}$, $\Omega = 2\pi \sin \alpha$. Из (33) и (34) получаем

$$\begin{aligned}\langle \chi, p_2, p_3 | \tilde{f} \star \tilde{g} \rangle &= \int d\beta d\gamma d\omega \tilde{f}(\beta, \gamma, \omega) \tilde{g}(\chi - \beta, p_2 - \gamma, p_3 - \omega) = \\ &= \int d\beta d\gamma d\omega \langle \beta, \gamma, \omega | f \rangle e^{ik(\alpha)[\beta^2+2(\gamma^2-\gamma\omega+\omega^2)]} \langle \chi - \beta, p_2 - \gamma, p_3 - \omega | g \rangle \times \\ &\quad \times e^{ik(\alpha)[(\chi-\beta)^2+2(p_2-\gamma)^2-2(p_2-\gamma)(p_3-\omega)+2(p_3-\omega)^2]},\end{aligned}\quad (38)$$

где вектор состояния $\langle \beta, \gamma, \omega |$ принадлежит множеству $\langle \chi, p_2, p_3 |$, т.е. $\langle \beta, \gamma, \omega |$ обозначает $\langle \chi = \beta, p_2 = \gamma, p_3 = \omega |$, так что соотношение (37) принимает вид

$$\begin{aligned}H_\alpha(p, \chi_2, \chi_3) &= \frac{B}{3\Omega^{3/2}} \int d\chi dp_2 dp_3 \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | \chi, p_2, p_3 \rangle e^{-ik(\alpha)\Upsilon} \times \\ &\quad \times \int d\beta d\gamma d\omega \langle \beta, \gamma, \omega | f \rangle e^{ik(\alpha)[\beta^2+2(\gamma^2-\gamma\omega+\omega^2)]} \times \\ &\quad \times \langle \chi - \beta, p_2 - \gamma, p_3 - \omega | g \rangle \times\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{ik(\alpha)[(\chi-\beta)^2+2(p_2-\gamma)^2-2(p_2-\gamma)(p_3-\omega)+2(p_3-\omega)^2]} = \\
& = \frac{B}{3\Omega^{3/2}} \int d\chi dp_2 dp_3 d\beta d\gamma d\omega \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | \chi + \beta, p_2 + \gamma, p_3 + \omega \rangle \times \\
& \times \langle \beta, \gamma, \omega | f \rangle \langle \chi, p_2, p_3 | g \rangle e^{-2ik(\alpha)(\beta\chi+2\gamma p_2+2\omega p_3-\omega p_2-\gamma p_3)}, \quad (39)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
& \frac{B}{3\Omega^{3/2}} \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | \chi + \beta, p_2 + \gamma, p_3 + \omega \rangle e^{-2ik(\alpha)(\beta\chi+2\gamma p_2+2\omega p_3-\omega p_2-\gamma p_3)} = \\
& = \frac{1}{3\Omega^{3/2}} \exp \left\{ \frac{i}{6 \operatorname{tg} \alpha} (p^2 + 2\chi_2^2 - 2\chi_2\chi_3 + 2\chi_3^2 + \beta^2 + 2\gamma^2 - 2\gamma\omega + 2\omega^2) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{i}{3 \sin \alpha} (\beta p - 2\gamma\chi_2 - 2\omega\chi_3 + \omega\chi_2 + \gamma\chi_3) \right\} \times \\
& \times \frac{1}{3\Omega^{3/2}} \exp \left\{ \frac{i}{6 \operatorname{tg} \alpha} (p^2 + 2p_2^2 - 2p_2p_3 + 2p_3^2 + \chi^2 + 2\chi_2^2 - 2\chi_2\chi_3 + 2\chi_3^2) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{i}{3 \sin \alpha} (\chi p - 2p_2\chi_2 - 2\gamma\chi_2 + p_3\chi_2 + p_2\chi_3) \right\} e^{-ik(\alpha)[p^2+2(\chi_2^2-\chi_2\chi_3+\chi_3^2)]} = \\
& = B^2 \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | \beta, \gamma, \omega \rangle \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | \chi, p_2, p_3 \rangle e^{-ik(\alpha)[p^2+2(\chi_2^2-\chi_2\chi_3+\chi_3^2)]}. \quad (40)
\end{aligned}$$

Подставляя (40) в (39), имеем

$$\begin{aligned}
H_\alpha(p, \chi_2, \chi_3) & = B^2 \int d\chi dp_2 dp_3 d\beta d\gamma d\omega \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | \beta, \gamma, \omega \rangle \langle \beta, \gamma, \omega | f \rangle \times \\
& \times \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | \chi, p_2, p_3 \rangle \langle \chi, p_2, p_3 | g \rangle e^{-ik(\alpha)[p^2+2(\chi_2^2-\chi_2\chi_3+\chi_3^2)]} = \\
& = B^2 \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | f \rangle \langle p, \chi_2, \chi_3 | e^O | g \rangle e^{-ik(\alpha)[p^2+2(\chi_2^2-\chi_2\chi_3+\chi_3^2)]}, \quad (41)
\end{aligned}$$

а это просто символ Дирака для $\mathfrak{F}_\alpha(p, \chi_2, \chi_3) \mathcal{G}_\alpha(p, \chi_2, \chi_3) e^{-ik(\alpha)[p^2+2(\chi_2^2-\chi_2\chi_3+\chi_3^2)]}$. Таким образом, мы получили равенство (35), что завершает доказательство.

Обратное преобразование выражения (35) имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_{-\alpha}[H_\alpha(p, \chi_2, \chi_3)] & = B^* \int dp d\chi_2 d\chi_3 \langle \chi, p_2, p_3 | e^{O^\dagger} | p, \chi_2, \chi_3 \rangle H_\alpha(p, \chi_2, \chi_3) = \\
& = B^* \int dp d\chi_2 d\chi_3 \langle \chi, p_2, p_3 | e^{O^\dagger} | p, \chi_2, \chi_3 \rangle \langle p, \chi_2, \chi_3 | H \rangle = \\
& = \langle \chi, p_2, p_3 | e^{O^\dagger} e^O h \rangle = \langle \chi, p_2, p_3 | h \rangle = h(\chi, p_2, p_3). \quad (42)
\end{aligned}$$

Итак, мы определили свертку двух функций в контексте ЗДПФ и вывели соответствующую теорему о свертке, используя представления запутанных состояний и оператор ЗДПФ. Вывод теоремы оказался строгим и кратким благодаря использованию дираковской теории представлений.

Список литературы

- [1] А. Эйнштейн, Б. Подольский, Н. Розен, *УФН*, **16**:4 (1936), 440–446.
- [2] Hong-yi Fan, J. R. Klauder, *Phys. Rev. A*, **49**:2 (1994), 704–707.
- [3] Hong-yi Fan, Liang Fu, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **44**:4 (2005), 529–538.
- [4] Hong-yi Fan, Nian-quan Jiang, *J. Opt. B Quantum Semiclass. Opt.*, **5**:3 (2003), 283–288.
- [5] Hong-yi Fan, Nian-quan Jiang, *Chinese Phys. Lett.*, **19**:10 (2002), 1403–1406.
- [6] V. Namias, *J. Inst. Math. Appl.*, **25**:3 (1980), 241–265.
- [7] В. П. Быков, О. О. Силичев, *Лазерные резонаторы*, Физматлит, М., 2004.
- [8] A. C. McBride, F. H. Kerr, *IMA J. Appl. Math.*, **39**:2 (1987), 159–175.
- [9] D. Mendlovic, H. M. Ozaktas, *J. Opt. Soc. Amer. A*, **10**:9 (1993), 1875–1881.
- [10] D. Mendlovic, H. M. Ozaktas, A. W. Lohmann, *Appl. Opt.*, **33**:26 (1994), 6188–6193.
- [11] H. M. Ozaktas, D. Mendlovic, *J. Opt. Soc. Amer. A*, **10**:12 (1993), 2522–2531.
- [12] A. W. Lohmann, *J. Opt. Soc. Amer. A*, **10**:10 (1993), 2181–2186.
- [13] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [14] L. B. Almeida, *IEEE Signal Processing Lett.*, **4**:1 (1997), 15–17.
- [15] A. I. Zayed, *IEEE Signal Processing Lett.*, **5**:4 (1998), 101–103.
- [16] Hong-yi Fan, Yue Fan, *Commun. Theor. Phys. (Beijing)*, **39**:4 (2003), 417–420.
- [17] F. T. Arrechi, E. Courtens, R. Gilmore, H. Thomas, *Phys. Rev. A*, **6**:6 (1972), 2211–2237.

Поступила в редакцию 7.11.2008,
после доработки 14.02.2009