Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Морозов, Унитарные интегралы и связанные с ними матричные модели, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 1, 3–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6453>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 08:38:59

© 2010 г.

А. Ю. Морозов*

УНИТАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ

Дан краткий обзор основных свойств интегралов по унитарным матрицам. Эти интегралы анализируются с помощью трех матричных моделей: обычной унитарной модели, модели Гросса–Брезана–Виттена и модели Хариш–Чандры–Ициксона–Зюбера. Особое внимание уделено нетривиальным аспектам теории, от аномалии 'т Хоофта–де Вита в унитарных интегралах до проблемы вычисления корреляторов с мерой Ициксона–Зюбера. Из технических средств особо отмечен метод разложения по характерам. Унитарные интегралы все еще недостаточно исследованы, и с ростом внимания к этой области теории следует ожидать множества новых результатов.

Ключевые слова: матричная модель, унитарная группа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегралы по неэрмитовым матрицам на протяжении всей истории матричных моделей пользовались значительно меньшим вниманием, чем интегралы по эрмитовым матрицам [1]–[27]. Это не вполне справедливо: неэрмитовы модели не менее важны в приложениях, чем эрмитовы, их можно успешно исследовать теми же методами, и они естественным образом включаются в объединенную М-теорию матричных моделей [16]. Тем не менее при недавней реинкарнации матричных моделей [6]–[18] неэрмитовым моделям снова не досталось должного внимания – серьезному анализу не подвергнуты ни их нетривиальная фазовая структура в духе работ [6], [11], ни теоретико-полевая переформулировка в духе статей [12], ни комбинаторное описание гауссовой (с одним разрезом) фазы в духе работы [18] несмотря на то, что все эти проблемы заведомо находятся в рамках применимости развиваемых методов.

Настоящий текст тоже слишком короток для того, чтобы подробно описать пути решения этих важных вопросов. Вместо этого мы сконцентрируем свое внимание на дополнении к этим универсальным предметам исследования: методах и результатах, которые специфичны для одной конкретной – и самой важной из всех неэрмитовых моделей – теории гауссовых *унитарных* ансамблей. Важность унитарных

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: morozov@itep.ru

интегралов очевидна уже с точки зрения теории Янга–Миллса: они описывают угловые (цветовые) степени свободы, являющиеся дополнением к диагональным (бесцветным или адронным) компонентам, которые адекватно описываются эрмитовыми моделями [4] и их “дуальными” партнерами из семейства обобщенных моделей Концевича (ОМК) [4], [21], [22]. Конечно, эта дополнительность не означает, что к задаче об унитарных интегралах неприменимы различные методы, использующие собственные значения матриц, от техники ортогональных полиномов [1] до решения условий Вирасоро [23] итерациями [24], [11] или с помощью квантовой теории поля [12]. Все эти методы могут применяться, и, как всегда, они весьма эффективны и плодотворны (см. работы [25], [26]). Дополнительность проявляется в другом: наибольший интерес представляют вопросы иного типа, относящиеся к корреляторам *недиагональных* матричных элементов, а не следов или детерминантов.

Мощную и частично адекватную технику исследования таких аспектов унитарных интегралов предоставляет теория разложений по характерам. Одна из основных интриг при этом связана с относительной ролью и взаимоотношением групп двух различных типов: линейных (GL) и симметрических (S). В настоящее время эти взаимоотношения привлекают возрастающее внимание из-за тесной связи между теорией Янга–Миллса, с одной стороны, и наилучшим образом представленной в контексте матричных теорий моделью Казакова–Мигдала [27]–[33] и описывающей разветвленные накрытия римановых поверхностей [34]–[40] теорией Гурвица, которая связана с производящими функциями Гурвица–Концевича [35]–[38] и довольно необычными матричными моделями [36], [37], с другой стороны.

Настоящая статья представляет собой не более чем краткое введение в эти аспекты теории унитарных интегралов. Наше изложение будет сосредоточено вокруг трех основных унитарных матричных моделей:

- исходной унитарной модели [25], предназначенной для описания корреляторов следов унитарных матриц стандартными матрично-модельными методами (по этой причине мы уделим этой теории не слишком много внимания);
- модели Брезана–Гросса–Виттена (БГВ) [41], описывающей корреляторы произвольных матричных элементов (а не только следов); эта модель была включена, в тот момент довольно неожиданно, в семейство ОМК в работах [32], [33] и в конце концов нашла свое значимое место в М-теории матричных моделей [16] в статье [42];
- модели Ицксона–Зюбера (ИЗ) [43], [44] – упрощенной однопакетной версии теории Казакова–Мигдала [27], которая тоже описывает произвольные корреляторы, только усредненные с нетривиальным, но точно решаемым весом (действием ИЗ), и является давним и сложным предметом исследования [29]–[31], недавно вновь привлечшим к себе внимание в работе [14].

В этой области, которая в отличие от теории эрмитовых интегралов находится на весьма ранней ступени развития, ожидается множество новых и значительно более глубоких результатов, возможно, уже в самом близком будущем. Из-за этого содержание настоящей статьи поневоле неполно и имеет лишь временную ценность – все это не более чем предварительное введение в предмет, который еще до конца не оформился. Тем не менее мы попытались сконцентрироваться на фактах и фор-

мулах, которые имеют непреходящее значение и серьезные шансы остаться в числе основополагающих, даже когда вся область приобретет черты завершенности и самосогласованности. Напротив, меньше внимания уделено сиюминутно важным аспектам теории, которые заведомо будут существенно улучшены и переформулированы в иных, пока неизвестных терминах. Некоторые из этих вопросов просто опущены, чтобы избежать излишней перегрузки текста.

2. УНИТАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И МОДЕЛЬ БГВ

2.1. Мера. Унитарные интегралы – это интегралы по унитарным матрицам U размера $N \times N$, удовлетворяющим нелинейным условиям $UU^\dagger = U^\dagger U = I$. Интегралы берутся по инвариантной мере Хаара $[dU]$. В отличие от случая эрмитовых матриц $H = H^\dagger$, где инвариантная мера – это просто $dH = \bigwedge_{i,j} dH_{ij}$, унитарная мера Хаара $[dU]$ нетривиальна и нелинейна по U . Если унитарные матрицы выражены в терминах эрмитовых, то меру $[dU]$ тоже можно выразить через dH , например

$$U = e^{iH} \implies \|\delta U\|^2 = \text{tr}(U^\dagger \delta U U^\dagger \delta U) = \text{tr}(\delta H)^2 \implies [dU] = dH,$$

$$U = \frac{I + iH}{I - iH} \implies \|\delta U\|^2 = 4 \text{tr} \left(\frac{I}{I + iH} \delta H \frac{I}{I - iH} \delta H \right) \implies [dU] \sim \frac{dH}{\det^N(1 + H^2)} \quad (1)$$

и аналогично для любых иных мыслимых параметризаций.

В качестве альтернативного подхода можно наложить условие унитарности на произвольную комплексную матрицу M [32], [33], [14]:

$$[dU] = \delta(MM^\dagger - I) d^2 M = d^2 M \int e^{i \text{tr} S(MM^\dagger - I)} dS, \quad (2)$$

где S – вспомогательная эрмитова матрица, введенная как множитель Лагранжа. Ниже мы будем часто включать множитель i в S , что превращает эту матрицу в антиэрмитову, т.е. изменяет контур интегрирования по S . Более того, часто можно поглотить, переопределяя S , целый нетривиальный матричный множитель, что полностью разрушает эрмитовость, тем не менее и это является зачастую не более чем невинной заменой контура интегрирования.

В дальнейшем мы нормируем меру $[dU]$ так, что $\int [dU] = 1$, т.е. делим $[dU]$ на объем унитарной группы V_N . Этот объем конечен, и его можно вычислить, например, используя ортогональные полиномы (см. раздел 3.9 в первом из обзоров в ссылке [4]). Формула для объема довольно сложная:

$$V_N = \frac{(2\pi)^{N(N+1)/2}}{\prod_{k=1}^N k!}. \quad (3)$$

Мы также предполагаем, что множитель V_N^{-1} включен в определение эрмитовых матричных интегралов.

2.2. Элементарные унитарные корреляторы в фундаментальном представлении. Имея такое соглашение о нормировках и пользуясь свойствами $SU(N)$ -симметрии, мы немедленно получаем

$$\langle U_{ij} U_{kl}^\dagger \rangle = \int U_{ij} U_{kl}^\dagger [dU] = \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int U_{ij} U_{i'j'} U_{kl}^\dagger U_{k'l'}^\dagger [dU] = \\ = \frac{N^2(\delta_{il}\delta_{i'l'}\delta_{jk}\delta_{j'k'} + \delta_{il'}\delta_{i'l}\delta_{jk'}\delta_{j'k}) - N(\delta_{il'}\delta_{i'l}\delta_{jk}\delta_{j'k'} + \delta_{il}\delta_{i'l'}\delta_{jk'}\delta_{j'k})}{N^2(N^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты в правых частях этих формул легко найти, сворачивая друг с другом разные индексы и пользуясь слева условием унитарности. Уже этого примера достаточно, чтобы убедиться, что корреляторы быстро усложняются с ростом числа матриц, и для их вычисления требуется какой-то систематический подход. Такой подход предоставляется теорией модели БГВ из работы [33].

Прежде чем мы займемся этим предметом в п. 2.4, заметим, что корреляторы резко упрощаются, когда мы сворачиваем индексы, т.е. рассматриваем корреляторы *следов*, а не отдельных матричных элементов. В самом деле, из (4) и (5) мы немедленно получаем, что

$$\begin{aligned} \int \text{tr} U \text{tr} U^\dagger [dU] = 1, \quad \int \text{tr} U^2 \text{tr} (U^\dagger)^2 [dU] = 2 - \delta_{N1}, \\ \int \text{tr} U^2 (\text{tr} U^\dagger)^2 [dU] = \delta_{N1}, \quad \int (\text{tr} U)^2 (\text{tr} U^\dagger)^2 [dU] = 2 - \delta_{N1} \end{aligned} \quad (6)$$

и т.д. (случай $N = 1$ в этих формулах требует отдельного анализа, см. ниже). Эти более простые *бесцветные* корреляторы изучаются в рамках обычной унитарной модели [26].

Отметим также, что уже в (5) видна нетривиальная зависимость унитарных корреляторов от N с фиктивными полюсами при некоторых целых значениях N . Это явление известно как аномалия 'т Хоофта–де Вита [45]. В корреляторах бесцветных величин (6) данные полюсы превращаются в специфические несингулярные поправки при тех же значениях N . В (5) этим специальным значением является $N = 1$, но чем больше матриц в корреляторе, тем больше диапазон затрагиваемых N .

2.3. Из теории унитарной модели. Мы опираемся в данном пункте на результаты работы [26].

Статистическая сумма¹⁾ унитарной матричной модели определена как производящая функция корреляторов бесцветных операторов (следов):

$$Z_U(t) = \int \exp\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k \text{tr} U^k\right) [dU]. \quad (7)$$

Ранее чем в работе [26] данная статистическая сумма изучалась также в работах [25]. Заметим, что $U^\dagger = U^{-1}$, так что матрицы, сопряженные степеням U , представлены здесь отрицательными степенями U . Условия Вирасоро в этой модели имеют вид [26]

$$\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} k t_k \left(\frac{\partial}{\partial t_{k+n}} - \frac{\partial}{\partial t_{k-n}} \right) + \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_{n-k}} + \frac{\partial^2}{\partial t_{-k} \partial t_{k-n}} \right) \right\} Z_U(t) = 0, \quad n \geq 1,$$

¹⁾Мы используем термин “статистическая сумма” как аналог английского “partition function”. Важно что это именно сама сумма, а не ее логарифм, для которого употребляется термин “свободная энергия”.

$$\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} kt_k \left(\frac{\partial}{\partial t_{k+n}} + \frac{\partial}{\partial t_{k-n}} \right) + \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_{n-k}} - \frac{\partial^2}{\partial t_{-k} \partial t_{k-n}} \right) \right\} Z_U(t) = 0, \quad n \geq 0.$$

Применение условий Вирасоро в этой модели немного необычно: здесь отсутствует сдвиг какой-либо временной переменной, и решение представимо в виде формально-го ряда непосредственно по степеням t , а не их отношений к какому-либо фоновому значению одной из переменных; выбор этой переменной определяет выбор одной из многих различных фаз, скажем, в эрмитовой модели [9]. В данном случае аналог L_0 -условия гласит, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} kt_k \frac{\partial Z_U}{\partial t_k} = 0,$$

и требует, чтобы мономиальные слагаемые в выражении для Z_U имели вид $\prod_k t_k^{n_k}$ с $\sum_{k \geq 1} kn_k = \sum_{k \geq 1} kn_{-k}$, т.е. разрешенными являются слагаемые вида $t_k t_{-k}$, $t_k t_l t_{-k-l}$ и т.п., но не t_k или $t_k t_{-k-l}$ с $l \neq 0$. При таком правиле отбора первые члены ряда для Z_U суть

$$Z_U = e^{Nt_0} (1 + a_{1|1} t_1 t_{-1} + a_{2|2} t_2 t_{-2} + a_{11|2} (t_1^2 t_{-2} + t_{-1}^2 t_2) + a_{11|11} t_1^2 t_{-1}^2 + \dots). \quad (8)$$

Они описывают корреляторы (6) и полностью определяются низшими условиями Вирасоро с $n = \pm 1, \pm 2$, но несколько необычным образом:

$$\begin{aligned} 0 &= e^{-Nt_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} kt_k \frac{\partial}{\partial t_{k+1}} + \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} \right) Z_U = \\ &= t_{-1}(-N + N\alpha_{1|1}) + t_1 t_{-2}(-2\alpha_{1|1} + \alpha_{2|2} + 2N\alpha_{2|11}) + \\ &\quad + t_1 t_{-1}^2(-N\alpha_{1|1} + \alpha_{2|11} + 2N\alpha_{11|11}) + \dots \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} 0 &= e^{-Nt_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} kt_k \frac{\partial}{\partial t_{k+2}} + \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_2} + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \right) Z_U = \\ &= t_{-2}(-2N + N\alpha_{2|2} + 2\alpha_{2|11}) + t_{-1}^2(-\alpha_{1|1} + N\alpha_{2|11} + 2\alpha_{11|11}) + \dots \end{aligned}$$

Условия Вирасоро требуют, чтобы каждая скобка в правой части обращалась в нуль, и из этого следует, что

$$\begin{aligned} \alpha_{1|1} &= 1, \\ (N^2 - 1)\alpha_{2|2} &= 2(N^2 - \alpha_{1|1}) = 2(N^2 - 1) \Rightarrow \alpha_{2|2} = 2 - s\delta_{N,1}, \\ (N^2 - 1)\alpha_{2|11} &= 0 \Rightarrow \alpha_{2|11} = s\delta_{N,1}, \\ 2(N^2 - 1)\alpha_{11|11} &= (N^2 - 1)\alpha_{1|1} = N^2 - 1 \Rightarrow \alpha_{11|11} = \frac{1}{4}(2 - s\delta_{N,1}), \\ &\dots \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, условия Вирасоро не определяют коэффициенты $\alpha_{2|2}$, $\alpha_{2|11}$ и $\alpha_{11|11}$ полностью – остается неопределенность при $N = 1$. На самом деле все три коэффициента зависят от одного неопределенного параметра s , который может быть

зафиксирован прямым вычислением корреляторов (6) при $N = 1$. Подобным образом коэффициенты α с более высоким уровнем градуировки $l = \sum_{k \geq 0} kn_k > 2$ остаются не до конца зафиксированными условиями Вирасоро при $N = 1, \dots, l$. Соответствующие свободные параметры являются аналогами свободных модулей в теории эрмитовых моделей [9], конкретным интегралам по унитарным матрицам отвечает конкретный выбор этих параметров (точка в пространстве модулей).

2.4. Из теории модели БГВ. Статистическая сумма модели БГВ [41] – это производящая функция для всех унитарных корреляторов:

$$\begin{aligned} Z_{\text{BGW}} &= \int e^{\text{tr}(J^\dagger U + JU^\dagger)} [dU] = \iint e^{iS(MM^\dagger - I)} e^{(\text{tr } J^\dagger M + JM^\dagger)} d^2 M dS \stackrel{(2)}{=} \\ &\stackrel{(2)}{=} \int e^{\text{tr}(JJ^\dagger/S) - \text{tr } S} \frac{dS}{\det S^N} \stackrel{[S \rightarrow 1/S]}{=} \int e^{\text{tr}(JJ^\dagger S) - \text{tr}(1/S)} \frac{dS}{\det S^N}. \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что Z_{BGW} зависит только от собственных значений матрицы $JJ^\dagger$, т.е. от временных переменных $t_k = k^{-1} \text{tr}(JJ^\dagger)^k$.

Модель имеет две кардинально различающиеся фазы, названные в работе [33] фазой Концевича и фазой характеров. Здесь мы рассмотрим только вторую из них, в которой Z_{BGW} является формальным рядом по *положительным* степеням t_k . Условия Вирасоро в этой фазе выводятся обычным образом – как тождества Уорда в духе работ [23], но в этом конкретном случае их можно получить и иначе – как прямое следствие тождества $UU^\dagger = I$ для унитарных матриц, выраженного в терминах переменных t . Из этого тождества следует, что

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{J}^\dagger} \frac{\partial}{\partial J} - I \right) Z_{\text{BGW}} = \sum_{n=1}^{\infty} (JJ^\dagger)^{n-1} \hat{L}_n Z_{\text{BGW}} - I Z_{\text{BGW}}, \quad (11)$$

т.е.

$$\hat{L}_n Z_{\text{BGW}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k t_k \frac{\partial}{\partial t_{k+n}} + \sum_{\substack{a+b=n, \\ a, b \geq 0}} \frac{\partial^2}{\partial t_a \partial t_b} \right) Z_{\text{BGW}}(t) = \delta_{n,1}, \quad n \geq 1, \quad (12)$$

что выглядит, как обычные дискретные условия Вирасоро [19], хорошо знакомые из теории эрмитовой модели, только с $n \geq 1$ вместо $n \geq -1$ и со слегка измененной правой частью при $n = 1$.

Поставляя анзац в виде формального ряда для $Z_{\text{BGW}}(t)$,

$$Z_N^+(t) = 1 + \sum_{M \geq 1} \left(\sum_{k_1 \geq \dots \geq k_M \geq 0} c_N \{k_a\} \frac{k_1 t_{k_1} \dots k_M t_{k_M}}{(k_1 + \dots + k_M)!} \right),$$

в эти условия Вирасоро, можно итеративно вычислить любой заданный коэффициент (см. п. 3.2.1 статьи [33]):

$$c_N \{k_a\} = \hat{c}_N \{k_a\} \prod_{l=0}^{k_1 + \dots + k_M - 1} \frac{1}{N^2 - l^2}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}
 \hat{c}_N(1) &= N, \\
 \hat{c}_N(2) &= -N, \quad \hat{c}_N(1, 1) = N^2, \\
 \hat{c}_N(3) &= 4N, \quad \hat{c}_N(2, 1) = -3N^2, \quad \hat{c}_N(1, 1, 1) = N(N^2 - 2), \\
 \hat{c}_N(4) &= -30N, \quad \hat{c}_N(3, 1) = 8(2N^2 - 1), \quad \hat{c}_N(2, 2) = 3(N^2 + 6), \\
 \hat{c}_N(2, 1, 1) &= -6N(N^2 - 4), \quad \hat{c}_N(1, 1, 1, 1) = N^4 - 8N^2 + 6, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{14}$$

Первые две строчки из этого списка воспроизводят выражения (4) и (5).

2.5. Аномалия 'т Хоофта–де Вита. Результаты, изложенные в данном пункте, можно найти в работах [45], [33].

Замечательным свойством формулы (13) является наличие полюсов при целых значениях размера матрицы N . Следует отметить, что их появление – это свойство фазы характеров. Ничего подобного в фазе Концевича в модели БГВ не происходит: как всегда, правильно определенная статистическая сумма Концевича фактически не зависит от N [21], [33]. Как мы видели в п. 2.3, эти полюсы связаны с произволом в решении условий Вирасоро в обычной унитарной модели.

Фактически полюсы 'т Хоофта–де Вита в корреляторах отсутствуют: одновременно со знаменателями обращаются в нуль и числители, так что сингулярности разрешаются по правилу Лопиталья. Это, однако, не означает, что в вычислениях не требуется осторожности. Например, в (5) можно рассмотреть

$$\int U_{11}^2 (U_{11}^\dagger)^2 [dU] = \frac{2(N^2 - N)}{N^2(N^2 - 1)} = \frac{2}{N(N+1)} \stackrel{[N=1]}{=} 1,$$

что полностью согласуется с (6). Однако, если сначала взять след в (5) и положить $N = 1$ уже после этого, то (6) не воспроизведется:

$$\int \text{tr } U^2 \text{tr } (U^\dagger)^2 [dU] \stackrel{(5)}{=} \frac{2(N^2 \cdot N^2 - N \cdot N)}{N^2(N^2 - 1)} = 2 \neq 2 - \delta_{N1}.$$

Аномалии подобного рода хорошо знакомы из применений размерной регуляризации, где вычисление следов и стремление размерности к критической часто оказываются некоммутирующими операциями.

2.6. Модель БГВ в контексте М-теории матричных моделей. Как объясняется в работах [16] (см. также более ранние результаты в [46] и [9]), статистическая сумма любой матричной модели в любой из ее фаз может быть разложена на элементарные составляющие, каждая из которых принадлежит семейству ОМК [21]. Наиболее важным строительным блоком в такой конструкции является исходная кубическая тау-функция Концевича τ_K , однако тау-функция τ_{BGW} , построенная из Z_{BGW} в фазе Концевича, оказывается второй по значимости (например, она возникает вместе с τ_K при разложении на элементарные составляющие комплексной матричной модели). И τ_K , и τ_{BGW} удовлетворяют одним и тем же непрерывным

условиям Вирасоро [23] с небольшой разницей: $n \geq -1$ в случае τ_K и $n \geq 0$ в случае τ_{BGW} . Второе, компенсирующее, отличие состоит в том, что вместо сдвига второй временной переменной в функции τ_K в функции τ_{BGW} сдвигается первая, в результате уменьшенный набор условий по-прежнему однозначно определяет статистическую сумму. Подробности этой важной конструкции изложены в недавней работе [42].

2.7. Другие корреляторы и представления. Модель БГВ можно слегка обобщить, сделав в (10) степень в $\det S^N$ дополнительным свободным параметром. На этом пути мы получаем знаменитый интеграл Лейтвилера–Смилги [47]

$$Z_{\text{BGW}}(\nu; t) = \int (\det U)^\nu e^{\text{tr}(J^\dagger U + JU^\dagger)} [dU], \quad (15)$$

который часто встречается в приложениях и широко рассматривается в литературе.

Другую модификацию можно получить, изменив представление. В формуле (10) статистическая сумма определена как генератор интегралов по унитарным матрицам в фундаментальном представлении размерности N группы $GL(N)$, но вместо этого можно рассмотреть произвольное представление R размерности $D_R(N)$. Все корреляторы, конечно, будут связаны с корреляторами в фундаментальном представлении, но связь будет не вполне тривиальной, и значения корреляторов будут совсем другими. Например, в произвольном представлении вместо (4) мы получим

$$\int \mathcal{U}_{ab} \mathcal{U}_{cd}^\dagger [dU] = \frac{\delta_{ad} \delta_{bc}}{D_R}. \quad (16)$$

Более того, различные представления ортогональны в том смысле, что

$$\int \mathcal{U}_R \mathcal{U}_{R'}^\dagger [dU] \sim \delta_{RR'}. \quad (17)$$

Важным методом работы с такого рода обобщениями является развитая теория разложений по характерам. Истоки этой теории можно найти в фундаментальных трудах Фробениуса, а сама она широко применяется в современных исследованиях, от чистой математики до прикладной физики. Что касается ссылок, то лучшее, что можно сделать, – это указать некоторые основные учебники [48] и лишь несколько связанных с этой темой работ в литературе по матричным моделям [2], [3]. Фактическое изложение этого предмета в следующем разделе в основном следует статье [40], а конкретные приложения теории характеров к модели БГВ и модели ИЗ в разделе 4 будут обсуждаться на материале работ [32], [33] и [49].

3. ОСНОВЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ХАРАКТЕРОВ

3.1. Три определения характеров. Характер зависит от представления R и от класса сопряженности группового элемента; он может быть представлен как функция либо “временных” переменных $t_1, t_2, \dots$, либо через вспомогательную матричную переменную Мивы X . В соответствии с этим мы будем пользоваться двумя обозначениями $\chi_R(t) = \chi_R[X]$.

Представления R группы $GL(\infty)$ нумеруются диаграммами Юнга, т.е. упорядоченными целочисленными разбиениями $R : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$, где все λ_j – неотрицательные целые числа, $|R|$ – число клеток в диаграмме, $\sum_j \lambda_j = |R|$.

Временные переменные образуют полубесконечную последовательность, которую можно при желании рассматривать как последовательность собственных значений полубесконечной матрицы из $GL(\infty)$. Переменные Мивы задают N -мерное подпространство в пространстве временных переменных

$$t_k = \frac{1}{k} \operatorname{tr} X^k = \frac{1}{k} \sum_i x_i^k,$$

параметризованное собственными значениями x_i матрицы X размера $N \times N$. Здесь и далее tr без дополнительных индексов обозначает след матрицы размера $N \times N$, т.е. след в первом фундаментальном представлении группы $GL(N)$, ассоциированном с одноклеточной диаграммой Юнга $R = [1]$. Та же матрица X может быть записана в произвольном представлении R группы $SL(N)$, мы будем обозначать этот ее образ $\mathcal{X}^{(R)}$. Хотя X можно считать не зависящей от N , т.е. определенной как элемент группы $GL(\infty)$ так, чтобы N было просто числом ненулевых собственных значений, ее образ $\mathcal{X}^{(R)}$ зависит от N довольно сильно, поэтому следует проявлять осторожность с формулами, включающими $\mathcal{X}^{(R)}$. Однако во многих случаях вся зависимость от N входит только через размерность D_R представления R группы $SL(N)$ (см. формулу (24) ниже в тексте). Иными словами, хотя и $\mathcal{X}^{(R)}$, и D_R существенно зависят от N , если переписать формулы в терминах этих величин, то N отдельно уже не появляется. С учетом этого обстоятельства мы опускаем индекс N в наших обозначениях для $\mathcal{X}^{(R)}$ и D_R .

Имеются три важных определения характеров:

- первая детерминантная формула Вейля

$$\chi_R(t) = \det_{ij} (s_{\lambda_i - i + j}(t)), \quad (18)$$

выражающая $\chi_R(t)$ через детерминант полиномов Шура, которые определены равенством

$$\exp\left(\sum_k t_k z^k\right) = \sum_k s_k(t) z^k;$$

- вторая детерминантная формула Вейля

$$\chi_R(t) = \chi_R[X] = \frac{\det_{ij} x_i^{\lambda_j + N - j}}{\Delta(X)} = \frac{\det_{ij} x_i^{\lambda_j - j}}{\det_{ij} x_i^{-j}}, \quad (19)$$

где $\Delta(X) = \prod_{i < j} (x_i - x_j) = \det_{ij} x_i^{N-j} = \det_{ij} x_i^{j-1}$ – определитель Вандермонда;

- формула следов

$$\chi_R(t) = \chi_R[X] = \text{Tr}_R \mathcal{X}^{(R)}. \quad (20)$$

На самом деле подобно Янусу характеры имеют два лица. Они являются характеристиками двух существенно различных универсальных групп $GL(\infty)$ и $S(\infty)$ (через S_N обозначена группа перестановок N элементов). Тесная связь между двумя группами отражена уже в определении переменных Мивы, выражающем времена как симметрические функции собственных значений матрицы X .

Важную роль в исчислении характеров играют две дополнительные функции – размерности представлений $SL(N)$ и S_N , связанных с данной диаграммой Юнга R :

$$D_R = \dim_R(GL(N)) = \chi_R(t_k) = \chi_R[I], \quad t_k = \frac{N}{k}, \quad N = |R|, \quad (21)$$

$$d_R = \frac{1}{N!} \dim_R(S(N)) = \chi_R(t_k), \quad t_k = \delta_{k1}, \quad N = |R|. \quad (22)$$

Величина d_R дается формулой крюков

$$d_R = \prod \frac{1}{\text{hook length}} = \det_{1 \leq i, j \leq |R|} \frac{1}{(\lambda_j + i - j)!}, \quad (23)$$

где произведение вычисляется по всем клеткам диаграммы Юнга R , причем

$$\frac{D_R}{d_R} = \prod_{i=1}^N \frac{(\lambda_i + N - i)!}{(N - i)!}. \quad (24)$$

Заметим, что величина d_R , полученная делением размерности на $N! = |R|!$, зависит только от параметров λ_i , в то время как сама размерность D_R содержит дополнительную явную зависимость от N .

Детерминант матрицы, т.е. произведение всех ее собственных значений, тоже равен характеру, а именно характеру абсолютно антисимметрического представления $R = \underbrace{[1, \dots, 1]}_N$:

$$\det X = \chi_{1\dots 1}[X], \quad \text{rank } X = N. \quad (25)$$

Более того, все целые степени детерминанта – это тоже характеры:

$$(\det X)^\nu = \chi_{\nu\dots\nu}[X]. \quad (26)$$

Если $\text{rank } X = N$, то выраженные через X времена t_k с $k > N$ являются алгебраическими функциями времен с $k \leq N$. Соотношение задается обычным итерационным правилом

$$\oint \det(1 - sX) \frac{ds}{s^{k+1}} = \oint \exp\left(-\sum_{m \geq 0} s^m t_m\right) \frac{ds}{s^{k+1}} = 0, \quad k > N. \quad (27)$$

Будучи ограниченными на это подпространство, характеры с $|R| > N$ также становятся алгебраическими функциями характеров с $|R| \leq N$.

3.2. Правила сумм и соотношения ортогональности. Характеры удовлетворяют различным “правилам сумм”: некоторые суммы по всем представлениям (т.е. по всем диаграммам Юнга или упорядоченным целочисленным разбиениям) равны каким-то иным известным величинам. К настоящему времени в приложениях возникают и широко используются следующие три правила сумм:

$$\sum_R d_R \chi_R(t) = e^{t_1} = e^{\text{tr } X}, \quad (28)$$

$$\sum_R \chi_R(t) \chi_R(t') = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k t_k t'_k\right) = \frac{1}{\text{Det}(I \otimes I - X \otimes X')}, \quad (29)$$

$$\sum_R \frac{d_R}{D_R} \chi_R[X] \chi_R[X'] = \int e^{\text{tr } X U X' U^\dagger} [dU]. \quad (30)$$

Первая сумма есть частный случай второй, поскольку $d_R = \chi_R(\delta_{k1})$. Третья сумма (30) фактически является разложением по характерам интеграла ИЗ, но она может эффективно использоваться и в качестве правила сумм.

Очень важную роль в формализме теории характеров играет условие ортогональности: если $|R| = |R'|$, то

$$\chi_R(\tilde{\partial}) \chi_{R'}(t) = \delta_{R,R'}. \quad (31)$$

Здесь в аргумент первого характера $\chi_R(t)$ (полинома от своих аргументов) вместо t_k подставлены производные по временам $\tilde{\partial}_k \equiv \partial/\partial p_k = k^{-1} \partial/\partial t_k$. Например (см. п. 3.3),

$$\begin{aligned} \chi_1(t) = t_1 & \implies \chi_1(\tilde{\partial}) = \frac{\partial}{\partial t_1}, \\ \chi_2(t) = t_2 + \frac{t_1^2}{2} & \implies \chi_2(\tilde{\partial}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \right), \\ \chi_{11}(t) = -t_2 + \frac{t_1^2}{2} & \implies \chi_{11}(\tilde{\partial}) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

и нетрудно проверить, как условие ортогональности (31) работает в этих простейших случаях с $|R| = 1, 2$. На этих же примерах легко убедиться, что при $|R| \neq |R'|$ соотношение ортогональности неверно.

3.3. Примеры характеров. Для иллюстрации мы приведем здесь в явном виде несколько первых характеров вместе с другими существенными характеристиками соответствующих представлений R двух групп GL и S .

R	χ_R	$d_R = \chi_R(\delta_{k,1})$	$\dim_R(S_{ R }) = R !d_R$	$\dim_R(SL(n)) = \chi_R\left(\frac{n}{k}\right)$	$\varphi_R(2) = \frac{\text{coeff } t_2 t_1^{ R -2}}{2d_R}$	$\varphi_R(3) = \frac{\text{coeff } t_3 t_1^{ R -3}}{3d_R}$	$\varphi_R(22) = \frac{\text{coeff } t_2^2 t_1^{ R -4}}{2^2 d_R}$
(0)	1	1	1	1	0	0	0
(1)	t_1	1	1	n	0	0	0
(2)	$t_2 + \frac{t_1^2}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{n(n+1)}{2}$	1	0	0
(1, 1)	$-t_2 + \frac{t_1^2}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{n(n-1)}{2}$	-1	0	0
(3)	$t_3 + t_2 t_1 + \frac{t_1^3}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$	3	2	0
(2, 1)	$-t_3 + \frac{t_1^3}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{n(n^2-1)}{3}$	0	-1	0
(1, 1, 1)	$t_3 - t_2 t_1 + \frac{t_1^3}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$	-3	2	0
(4)	$t_4 + t_3 t_1 + \frac{t_2^2}{2} + \frac{t_2 t_1^2}{2} + \frac{t_1^4}{24}$	$\frac{1}{24}$	1	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$	6	8	3
(3, 1)	$-t_4 - \frac{t_2^2}{2} + \frac{t_2 t_1^2}{2} + \frac{t_1^4}{8}$	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}$	2	0	-1
(2, 2)	$t_2^2 - t_3 t_1 + \frac{t_1^4}{12}$	$\frac{1}{12}$	2	$\frac{n^2(n^2-1)}{12}$	0	-4	3
(2, 1, 1)	$t_4 - \frac{t_2^2}{2} - \frac{t_2 t_1^2}{2} + \frac{t_1^4}{8}$	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{8}$	-2	0	-1
(1, 1, 1, 1)	$-t_4 + t_3 t_1 + \frac{t_2^2}{2} - \frac{t_2 t_1^2}{2} + \frac{t_1^4}{24}$	$\frac{1}{24}$	1	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$	-6	8	3
...							
(k)		$\frac{1}{k!}$	1	$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)! k!}$	$\frac{k(k-1)}{2}$	$\frac{k(k-1)(k-2)}{3}$	$\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{8}$
...							

3.4. Пример: уравнение (20) для $GL(2)$. Построение матрицы $\mathcal{X}^{(R)}$ в произвольном представлении по матрице X , заданной в фундаментальном представлении, является довольно хитрым упражнением. На самом деле в явной форме уравнение (20) – это соотношение между унитарными матрицами: $\chi_R[e^A] = \text{Tr}_R e^{\mathcal{A}^{(R)}}$. Соотношение между A и $\mathcal{A}^{(R)}$ устроено просто: это матрицы размеров $n \times n$ и $D_R \times D_R$ соответственно, выраженные через один и тот же набор параметров u_a :

$$A = i \sum_{a=0}^{n^2-1} u_a T_a^{(1)}, \quad \mathcal{A}^{(R)} = i \sum_{a=0}^{n^2-1} u_a T_a^{(R)}.$$

Здесь $T_a^{(R)}$ – это генераторы алгебры $GL(n)$ в представлении R , а $R = [1]$ отвечает первому фундаментальному представлению.

Например, в случае $GL(2)$

$$A = \begin{pmatrix} a+d & b \\ c & a-d \end{pmatrix},$$

и мы имеем

$$\begin{aligned} \chi_1[e^A] &= t_1 = \text{Tr}_{D_1} e^A = \text{Tr}_2 \left\{ \exp \begin{pmatrix} a+d & b \\ c & a-d \end{pmatrix} \right\}, \quad D_1 = 2, \\ \chi_2[e^A] &= t_2 + \frac{t_1^2}{2} = \frac{1}{2} \text{Tr}_2 e^{2A} + \frac{1}{2} (\text{Tr}_2 e^A)^2 = \\ &= \text{Tr}_{D_2} \left\{ \exp \begin{pmatrix} 2a+2d & b & 0 \\ 2c & 2a & 2b \\ 0 & c & 2a-2d \end{pmatrix} \right\}, \quad D_2 = 3, \\ \chi_{11}[e^A] &= -t_2 + \frac{t_1^2}{2} = -\frac{1}{2} \text{Tr}_2 e^{2A} + \frac{1}{2} (\text{Tr}_2 e^A)^2 = e^{2a}, \quad D_{11} = 1, \\ \chi_3[e^A] &= t_3 + t_2 t_1 + \frac{t_1^3}{6} = \frac{1}{3} \text{Tr}_2 e^{3A} + \frac{1}{2} (\text{Tr}_2 e^{2A})(\text{Tr}_2 e^A) + \frac{1}{6} (\text{Tr}_2 e^A)^3 = \\ &= \text{Tr}_{D_3} \left\{ \exp \begin{pmatrix} 3a+3d & b & 0 & 0 \\ 3c & 3a+d & 2b & 0 \\ 0 & 2c & 3a-d & 3b \\ 0 & 0 & c & 3a-3d \end{pmatrix} \right\}, \quad D_3 = 4, \\ \chi_{21}[e^A] &= -t_3 + \frac{t_1^3}{3} = -\frac{1}{3} \text{Tr}_2 e^{3A} + \frac{1}{3} (\text{Tr}_2 e^A)^3 = \\ &= \text{Tr}_{D_{21}} \left\{ \exp \begin{pmatrix} 3a+d & b \\ c & 3a-d \end{pmatrix} \right\}, \quad D_{21} = 2, \\ \chi_{111}[e^A] &= t_3 - t_2 t_1 + \frac{t_1^3}{6} = \\ &= \frac{1}{3} \text{Tr}_2 e^{3A} - \frac{1}{2} (\text{Tr}_2 e^{2A})(\text{Tr}_2 e^A) + \frac{1}{6} (\text{Tr}_2 e^A)^3 = 0, \quad D_{111} = 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Здесь следует обратить внимание на следующие обстоятельства:

- матрица A совершенно не обязательно должна быть антиэрмитовой, приведенные выше соотношения верны для произвольной A ;
- нормировка центрального (принадлежащего центру алгебры) $U(1)$ -генератора включает в себя зависящий от представления множитель $|R|$;
- в общем случае для представления $GL(2)$ матрицами размера $r \times r$ можно использовать генераторы

$$T_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ r-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} r-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r-3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 3-r & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1-r \end{pmatrix}, \quad T_0 = |R| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с коммутационными соотношениями $[T_+, T_-] = T_3$, $[T_3, T_\pm] = \pm 2T_\pm$.

3.5. Характеры и симметрические функции. Здесь мы опираемся на результаты работ [32], [49].

Многие приложения характеров основаны на том, что в параметризации Мивы они становятся симметрическими функциями (от собственных значений x_i матрицы X) и при этом сами являются собственными функциями и собственными значениями некоторых выделенных операторов.

В пространстве симметрических функций имеется три “очевидных” набора однородных генераторов: времена $p_k[X]$, полиномы Шура $s_k[X]$ и элементарные симметрические полиномы $\sigma_k[X]$,

$$\begin{aligned} p_k[X] &= \sum_i x_i^k = \text{tr } X^k, & k \geq 0, & & p_k[X] &= kt_k[X], \\ s_k[X] &= \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}, & k \geq 1, & & s_0[X] &= 1, \\ \sigma_k[X] &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}, & k \geq 1, & & \sigma_0[X] &= 1. \end{aligned}$$

Этим трем базисам отвечают три производящие функции

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k[X] z^k = \text{tr } \frac{I}{I - zX},$$

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k[X] z^k = \prod_i (1 - zx_i)^{-1} = \frac{1}{\det(I - zX)},$$

$$\Sigma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k[X] z^k = \prod_i (1 + zx_i) = \det(I + zX).$$

Они связаны друг с другом следующим образом:

$$S(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k[X] z^k\right) = \frac{1}{\det(I - zX)},$$

где в силу $p_k[X] = kt_k[X]$

$$P(z) = \text{tr } I + z \frac{\partial}{\partial z} \ln E(z), \quad \Sigma(z) = \frac{1}{S(-z)}.$$

Наборы $\{t_k\}$, $\{s_k\}$ и $\{\sigma_k\}$ доставляют генераторы симметрических функций: любая такая функция является *полилинейной* комбинацией генераторов из любого набора. *Линейные* базисы образованы всевозможными произведениями генераторов и нумеруются диаграммами Юнга R . Очевидный выбор линейного базиса, составленного из мультипликативных генераторов, выглядит следующим образом:

$$t^R \equiv \prod_j t_{\lambda_j} \equiv \prod_j t_j^{m_j} \quad \text{или} \quad p^R \equiv \prod_j p_{\lambda_j} \equiv \prod_j p_j^{m_j} = \left(\prod_j j^{m_j}\right) t^R = \text{const} \cdot t^R, \quad (34)$$

$t_{\emptyset} = p_{\emptyset} = 1$. Таким образом можно определить “ R -степень” любой полубесконечной последовательности $\{p_i\}$, не обязательно образованной временными переменными. Иногда полезен тот же базис, но с измененной нормировкой элементов:

$$\widetilde{p}^R \equiv \frac{p^R}{z_R}, \quad z_R \equiv \prod_j (m_j)! j^{m_j}. \quad (35)$$

Заметим, что широкая тильда в этой формуле не вполне тождественна тильде в соотношениях ортогональности (31).

Менее тривиальный линейный базис образован характерами, построенными из генераторов $\{s_k\}$ по правилу (18), $\chi_R = \det_{ij}(s_{\lambda_j - j + i})$. Оправданием для такого выбора базиса является следующее правило разложения [49]:

$$\prod_i \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k x_i^k \right) = \sum_R \chi_R[X] \cdot \det_{ij}(A_{\lambda_j - j + i}). \quad (36)$$

Посредством второй формулы Вейля (19) оно связано с базовым детерминантным разложением [32], [49]

$$\begin{aligned} \det_{ij} \left(\sum_k A_{ik} B_{jk} \right) &= \sum_{P \in S_N} (-1)^P \prod_{i=1}^N \sum_k A_{ik} B_{P(i)k} = \sum_{k_1, \dots, k_N} \sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N A_{ik_i} B_{P(i)k_i} = \\ &= \sum_{k_1 > \dots > k_N} \left(\sum_{P, P'} (-1)^P (-1)^{P'} \prod_{i=1}^N A_{P'(i)k_i} B_{P(i)k_i} \right) = \sum_{k_1 > \dots > k_N} \det_{ij} A_{ik_j} \det_{ij} B_{ik_j}, \end{aligned} \quad (37)$$

обобщающим равенство $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ для квадратных матриц на случай прямоугольных. В самом деле, для $k_j = \lambda_j - j$ (заметим, что из $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$ следует, что $k_1 = \lambda_1 - 1 > \dots > k_N = \lambda_N - N$) и при $\chi_R[X]$, заданным формулой (19), правая часть (36) в точности совпадает с правой частью (37). Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_R \chi_R[X] \cdot \det_{ij}(A_{\lambda_j-j+i}) &\stackrel{(19)}{=} \sum_{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N} \frac{\det_{ij}(x_i^{\lambda_j-j}) \det_{ij}(A_{\lambda_j-j+i})}{\det_{ij} x_j^{-i}} \stackrel{(37)}{=} \\ &\stackrel{(37)}{=} \frac{\det_{ij}(\sum_k A_{k+i} x_j^k)}{\det_{ij} x_j^{-i}} = \frac{\det_{ij}(A(x_j) x_j^{-i})}{\det_{ij} x_j^{-i}} = \prod_j A(x_j), \end{aligned} \quad (38)$$

где $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$, что завершает вывод (36) из (37). Отметим также, что пределы суммирования автоматически подбираются нужным образом.

3.6. Характеры как собственные функции и собственные значения.

В этом пункте мы используем результаты работ [36], [38].

Характеры в параметризации Мивы $\chi_R[X]$ являются общими собственными функциями бесконечного набора операторов $\widehat{W}(R)$ [38]. Эти операторы находятся во взаимно однозначном соответствии с диаграммами Юнга (упорядоченными целочисленными разбиениями) и строятся из GL -генератора $\widehat{D}_{ij} = X_{ik} \partial / \partial X_{jk}$ в два шага: сначала определяется полубесконечная последовательность коммутирующих операторов $\widehat{D}_k = : \text{tr } \widehat{D}^k :$ и затем по общему правилу (35) строятся операторы

$$\widehat{W}(R) = : \widehat{D}^R : = : \prod_k \frac{1}{m_k! k^{m_k}} (\text{tr } \widehat{D}^k)^{m_k} :. \quad (39)$$

Дополнительным элементом здесь является нормальное упорядочение, подразумевающее, что все X стоят слева от всех $\partial / \partial X$. Согласно работе [38] эти операторы образуют центр универсальной обертывающей алгебры, $[\widehat{W}(R), \widehat{W}(R')] = 0$ для всех R, R' , и характеры являются их собственными функциями: для любых R, R'

$$\widehat{W}(R) \chi_{R'}[X] = \varphi_{R'}(R) \chi_{R'}[X]. \quad (40)$$

Соответствующие собственные значения $\varphi_R(\Delta)$ на самом деле тоже оказываются характеристиками симметрической группы S , их можно определить как коэффициенты разложения одного линейного базиса по другому – разложения χ_R по переменным p :

$$\chi_R(p) = \sum_{|\Delta|=|R|} d_R \varphi_R(\Delta) p^\Delta. \quad (41)$$

Сумма здесь берется по диаграммам Юнга Δ , имеющим тот же размер (число клеток), что и R . Для $|\Delta| > |R|$ собственные значения равны нулю, а для $|\Delta| < |R|$ они определяются по такому правилу:

$$\varphi_R(\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}_k) = \frac{(|R| - |\Delta|)!}{(|R| - |\Delta| - k)! k!} \varphi_R(\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}_{|R| - |\Delta|}), \quad \text{если } 1 \notin \Delta, \quad (42)$$

т.е. в этой формуле через Δ обозначена часть диаграммы Юнга, вообще не содержащая единичных столбцов. В частности, для такой Δ мы получаем $\varphi_R(\Delta) = \varphi_R(\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}_{|R|-|\Delta|})$. Иными словами, если Δ содержит в точности k единичных столбцов, то

$$\varphi_R(\Delta) = \frac{(|R| - |\Delta| + k)!}{(|R| - |\Delta|)! k!} \varphi_R(\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}_{|R|-|\Delta|}), \quad \text{если } 1^k \in \Delta. \quad (43)$$

В приложениях оказывается важным также и обращение формулы (41)

$$\widetilde{p}^\Delta = \sum_{|R|=|\Delta|} d_R \chi_R(p) \varphi_R(\Delta). \quad (44)$$

Отметим, что в левой части здесь появляется $\widetilde{p}^\Delta$, а не p^Δ , как в правой части (41). Отметим также, что обе эти формулы записаны в терминах переменных p_k , а не t_k , разница между ними в множителе: $p_k = kt_k$.

Операторы $\widehat{W}(R)$ и тем самым их собственные значения образуют интересную коммутативную ассоциативную алгебру [38], [40]:

$$\widehat{W}(R_1) \widehat{W}(R_2) = \sum_{R_3} C_{R_1 R_2}^{R_3} \widehat{W}(R_3) \implies \varphi_R(R_1) \varphi_R(R_2) = \sum_{R_3} C_{R_1 R_2}^{R_3} \varphi_R(R_3) \quad (45)$$

для любых $R_{1,2,3}$.

4. ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛА ИЦИКСОНА–ЗЮБЕРА

Важное приложение теории характеров находит в теории интегралов Хариш-Чандры–Ициксона–Зюбера (ХЧИЗ) [43], [44]. Как упоминалось во введении, этот интеграл является простейшей версией (основным строительным блоком) модели Казакова–Мигдала [27]–[33] для решеточной глюодинамики и фактически для многих других матрично-модельных подходов к непертурбативной динамике калибровочных теорий с распространяющимися (частицеподобными) степенями свободы. Интеграл ИЗ также является нетривиальным примером группового интеграла, который удовлетворяет требованиям теоремы Дустермаата–Хекмана [50] и к которому приложимы методы, известные ныне под именем техники локализации (одним из ярких достижений в этой области является инстантонное исчисление Некрасова [51] в теории Зайберга–Виттена [52]).

С интегралами ХЧИЗ можно работать различными методами, начиная прямо с тождеств Уорда [44]. Мы опишем здесь подход, основанный на теории характеров [32], [49] и тесно связанной с ней техникой ОМК из работ [29]–[33]. Этот подход был недавно заново рассмотрен в работе [14] и применен к старой (но все еще не решенной) задаче о вычислении произвольных корреляторов с весом ХЧИЗ [30], [31].

4.1. Интеграл ИЗ и формула дуальности. Интеграл ИЗ (или ХЧИЗ) – это унитарный интеграл с нетривиальным весом специального вида:

$$J_{\text{IZ}}(X, Y) = \int e^{\text{tr} XUYU^\dagger} [dU]. \quad (46)$$

Этот интеграл выражается через собственные значения двух матриц X и Y размера $N \times N$ с помощью знаменитой детерминантной формулы [44]

$$J_{\text{IZ}} \sim \frac{\det_{ij} e^{x_i y_j}}{\Delta(X)\Delta(Y)} = \frac{1}{\Delta(X)\Delta(Y)} \sum_{P \in S_N} (-1)^P e^{x_i y_{P(i)}}, \quad (47)$$

где $\Delta(X)$ и $\Delta(Y)$ – два определителя Вандермонда.

При стандартном выводе формулы (47) надо заметить, что J_{IZ} зависит только от собственных значений матриц X и Y , и подставить функцию от собственных значений в качестве анзаца в очевидные тождества Уорда:

$$\begin{aligned} \left\{ \text{tr} \left(\frac{\partial}{\partial X^T} \right)^k - \text{tr} Y^k \right\} J_{\text{IZ}}(X, Y) &= 0, \\ \left\{ \text{tr} \left(\frac{\partial}{\partial Y^T} \right)^k - \text{tr} X^k \right\} J_{\text{IZ}}(X, Y) &= 0, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (48)$$

что превращает задачу об интеграле в задачу об уравнениях типа Калоджеро или Данкля, поскольку, например,

$$\text{tr} \left(\frac{\partial}{\partial X^T} \right)^2 = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (49)$$

когда этот оператор действует на функцию от собственных значений. Можно проверить, что (47) в самом деле есть решение этих уравнений. Данный метод является довольно трудоемким, и ответ ни в коей мере не очевиден, по крайней мере для тех, кто не знаком с уравнениями Калоджеро и Данкля и связанной с ними теорией “зональных сферических функций” [53]. Взамен этого у метода есть содержательные обобщения, одно из последних [54] – к теории интегральных дискриминантов (однородных негауссовых интегралов), важной ветви нелинейной алгебры [55].

Прямой путь от (46) к результату (47) дает подход Дустермаата–Хекмана [50], где используется то, что интеграл, инвариантный относительно действия компактной группы и удовлетворяющий определенным соотношениям между классическим действием и квантовой мерой, т.е. подчиненный условиям, которые тривиально выполняются для теоретико-группового интеграла (46), в точности равен своему полному квазиклассическому приближению – сумме (с чередующимися знаками) по всем экстремумам классического действия,

$$\int e^{-S(\phi)} d\phi \sim \sum_{\phi_0: \delta S(\phi_0)=0} \left(\det \frac{\partial^2 S(\phi_0)}{\partial \phi^2} \right)^{-1/2} e^{-S(\phi_0)}. \quad (50)$$

Как объясняется в разделе 3.2 обзора [5] (см. также [14]), уравнения движения $[X, UYU^\dagger] = 0$ для действия $\text{tr} XUYU^\dagger$ после унитарных преобразований, диагонализующих X и Y , имеют в качестве решений произвольные матрицы перестановки $U = P$ (число решений возрастает, когда некоторые собственные значения X и Y совпадают, но это не сказывается на ответе). Тогда теорема Дустермаата–Хекмана (50) означает, что

$$J_{\text{IZ}}(X, Y) \sim \sum_P \frac{(-1)^P}{\Delta(X)\Delta(Y)} \exp\left(\sum_i x_i y_{P(i)}\right), \quad (51)$$

где определители Вандермонда возникают из предэкспоненциального множителя, а знаковый множитель $(-1)^P$ естественно появляется при извлечении квадратного корня и различает вклады максимумов и минимумов в квазиклассическую сумму. Метод Дустермаата–Хекмана, известный также как техника локализации, был открыт при изучении интегралов типа ХЧИЗ и впоследствии нашел множество разнообразных приложений. Одним из перспективных должно стать приложение к 3-алгебрам и связанной с ними теории Баггера–Ламберта–Густафсона [56], где этот метод остается единственным прямым подходом к определению какой-либо замены матричных моделей, поскольку никакой прямой замены матрицам в случае 3-алгебр пока не найдено.

Определенное значение имеет также следующее представление интеграла (46) интегралом по эрмитовой матрице [29], [33], [14]. Непосредственно из определения (46) получаем

$$\begin{aligned} J_{\text{IZ}} &\stackrel{(46)}{=} \int e^{\text{tr} XUYU^\dagger} [dU] \stackrel{(2)}{=} \int e^{\text{tr} S(I-MM^\dagger) + \text{tr} XMYM^\dagger} d^2M dS = \\ &= \int \frac{e^{\text{tr} S} dS}{\det_{N^2 \times N^2}(S \otimes I - X \otimes Y)}. \end{aligned} \quad (52)$$

Легко перейти к базису, где, скажем, матрица Y диагональна, $Y = \text{diag}\{y_k\}$. Тогда

$$\begin{aligned} J_{\text{IZ}}(X, Y) &\sim \int \frac{e^{\text{tr} S} dS}{\prod_k \det(S - y_k X)} \longrightarrow \int \frac{e^{\text{tr} SX} dS}{\prod_k \det(S - y_k I)} \sim \\ &\sim \int J_{\text{IZ}}(X, S) \frac{\prod_{i \neq j} (s_i - s_j) \prod_i ds_i}{\prod_{i,k} (s_i - y_k)}, \end{aligned} \quad (53)$$

где определители и следы берутся у матриц размера $N \times N$, а стрелка соответствует замене переменных интегрирования $S \rightarrow SX$ (которая подразумевает изменение контура интегрирования по S). На последнем шаге мы переходим к интегралу по собственным значениям S , а угловой интеграл снова дается тем же самым интегралом ИЗ. Согласно [14] это соотношение дуальности позволяет получить эффективную рекурсию по размеру N унитарной матрицы.

4.2. Разложение интеграла ХЧИЗ по характерам. Пользуясь исчислением характеров, мы можем немедленно вывести альтернативную формулу – разложение по характерам. Воспользовавшись (28), можно выразить $e^{\text{tr} \Psi}$ с $\Psi \equiv XYU^{\dagger}$ как линейную комбинацию характеров, $e^{\text{tr} \Psi} = \sum_R d_R \chi_R(\Psi)$, и после этого усреднить характеры по унитарной группе:

$$\int \chi_R[\Psi][dU] \stackrel{(20)}{=} \int \text{Tr}_R \Psi_R[dU] \stackrel{(20)}{=} \int \text{Tr}_R(\mathcal{X}_R \mathcal{U} \mathcal{Y}_R \mathcal{U}^{\dagger})[dU] \stackrel{(16)}{=} \frac{1}{D_R} \chi_R[X] \chi_R[Y]. \quad (54)$$

В результате

$$J_{\text{IZ}} = \int e^{\text{tr} \Psi}[dU] \stackrel{(28)}{=} \sum_R d_R \int \chi_R[\Psi][dU] \stackrel{(54)}{=} \sum_R \frac{d_R \chi_R[X] \chi_R[Y]}{D_R}. \quad (55)$$

Эта элементарная, но мощная формула приведена, например, в работе [49] и (с ошибочно пропущенным множителем d_R) в работе [3]. Недавнее ее приложение к точному вычислению корреляторов в гауссовой эрмитовой модели см. в последних статьях в ссылке [17]. Аналогичным образом можно получить разложение по характерам в более сложном случае, когда в экспоненте стоят два слагаемых. Этот случай известен как (обобщенный) интеграл Березина–Карпелевича [57], [49]

$$\begin{aligned} J_{\text{BK}} &= \iint e^{XUYV^{\dagger} + VYU^{\dagger}X} [dU][dV] = \\ &= \sum_{R, R'} d_R d_{R'} \iint \chi_R(XUYV^{\dagger}) \chi_{R'}(VYU^{\dagger}X) [dU][dV] = \\ &= \sum_R d_R^2 \iint \text{Tr}_R(\mathcal{X}_R \mathcal{U} \mathcal{Y}_R \mathcal{V}^{\dagger}) \text{Tr}_R(\mathcal{X}_R \mathcal{V} \mathcal{Y}_R \mathcal{U}^{\dagger}) [dU][dV] = \\ &= \sum_R \frac{d_R^2}{D_R^2} \chi_R[X^2] \chi_R[Y^2], \end{aligned} \quad (56)$$

где последнее равенство имеет место в силу (16), предпоследнее – в силу (17) и на последнем шаге использовано вытекающее из (17) правило

$$\int \chi_R[U] \chi_{R'}[U] [dU] = \delta_{R, R'}. \quad (57)$$

О приложениях к двуматричной модели см., например, статью [3].

Представление (47) получается из (55), если выразить характеры в правой части равенства через собственные значения с помощью второй формулы Вейля (19):

$$\begin{aligned} J_{\text{IZ}} &\stackrel{(55)}{=} \sum_R \frac{d_R \chi_R[X] \chi_R[Y]}{D_R} \stackrel{(19)}{=} \frac{1}{\Delta(X) \Delta(Y)} \sum_R \frac{d_R}{D_R} \det_{ij} x_i^{N-j+\lambda_j} \det_{ij} y_i^{N-j+\lambda_j} \stackrel{(24)}{=} \\ &\stackrel{(24)}{=} \frac{1}{\Delta(X) \Delta(Y)} \sum_{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0} \prod_{i=1}^N \frac{(N-i)!}{(\lambda_i + N - i)!} \det_{ij} x_i^{N-j+\lambda_j} \det_{ij} y_i^{N-j+\lambda_j} \stackrel{[\lambda_i + N - i = k_i]}{=} \\ &\stackrel{[\lambda_i + N - i = k_i]}{=} \frac{\prod_{i=1}^N (N-i)!}{\Delta(X) \Delta(Y)} \sum_{k_1 > \dots > k_N} \frac{\det_{ij} x_i^{k_j} \det_{ij} y_i^{k_j}}{\prod_j k_j!} = \left(\prod_{j=0}^{N-1} j! \right) \frac{\det_{ij} e^{x_i y_j}}{\Delta(X) \Delta(Y)}, \end{aligned} \quad (58)$$

потому что, как частный случай (37),

$$\sum_{k_1 > \dots > k_N} \left(\prod_{j=1}^N a_j \right) \det_{ij} x_i^{k_j} \det_{ij} y_i^{k_j} = \frac{1}{N!} \sum_{P, P'} \sum_{k_j} (\phi_{P(j)} \psi_{P'(j)})^{k_j} = \det_{ij} A(\phi_i \psi_j) \quad (59)$$

для $A(x) = \sum_k a_k x^k$ [49].

Точно так же из (56) мы получаем еще одну знаменитую формулу [57], [49]:

$$\begin{aligned} J_{\text{БК}} &\stackrel{(59)}{=} \sum_R \frac{d_R^2 \chi_R[X^2] \chi_R[Y^2]}{D_R^2} = \frac{(\prod_{j=0}^{N-1} j!)^2}{\Delta(X^2) \Delta(Y^2)} \sum_{k_1 > \dots > k_N} \frac{\det_{ij} x_i^{2k_j} \det_{ij} y_i^{2k_j}}{(\prod_j k_j!)^2} \stackrel{(59)}{=} \\ &\stackrel{(59)}{=} \left(\prod_{j=0}^{N-1} j! \right)^2 \frac{\det_{ij} \mathcal{I}_0(2x_i y_j)}{\Delta(X^2) \Delta(Y^2)}, \end{aligned} \quad (60)$$

где функция Бесселя $\mathcal{I}_0(2x) = \sum_k \frac{x^{2k}}{(k!)^2}$. Данное соотношение можно рассматривать как трансцендентное обобщение интеграла ИЗ. Дальнейшее обобщение найдено в работе [58]:

$$\begin{aligned} \iint \det^\nu(UV) e^{AUBV^\dagger + VCU^\dagger D} [dU][dV] &= \\ &= \left(\prod_{j=1}^{N-1} j! \right)^2 \left(\frac{\det(CD)}{\det(AB)} \right)^{\nu/2} \frac{\det \mathcal{I}_\nu(2x_i y_j)}{\Delta(X^2) \Delta(Y^2)}, \end{aligned} \quad (61)$$

где на этот раз x_i^2 и y_i^2 – это собственные значения произведений AD и CB . Теперь можно даже разрешить матрицам U и V иметь разные размеры N и M [58]. Тогда матрицы A, B, C, D окажутся прямоугольными, параметр ν будет отсутствовать и для $M \leq N$ получим

$$\begin{aligned} \int_{N \times N} \int_{M \times M} e^{AUBV^\dagger + VCU^\dagger D} [dU][dV] &= \\ &= \left(\prod_{j=N-M}^{N-1} j! \prod_{l=N-M}^{N-1} l! \right) \frac{\det \mathcal{I}_{N-M}(2x_i y_j)}{\Delta(X^2) \Delta(Y^2) \prod_{i=1}^M (x_i y_i)^{N-M}}, \end{aligned} \quad (62)$$

где x_i^2, y_i^2 – собственные значения меньших по размеру $(M \times M)$ -матриц AD и CB . Дальнейшие обобщения на суперматрицы описаны в работе [59].

4.3. Редукция к модели БГВ и интеграл Лейтвиллера–Смилги. Аналогичные разложения по характерам имеются, естественно, и для более простой модели БГВ. Однако, поскольку интеграл (10) содержит два слагаемых в показателе экспоненты, он на самом деле ближе к трансцендентному интегралу Березина–Карпелевича, нежели к интегралу ИЗ. Вместо (56) для (10) мы получим

$$Z_{\text{BGW}} = \int e^{\text{tr}(J^\dagger U + JU^\dagger)} [dU] = \sum_{R, R'} d_R d_{R'} \int \chi_R[J^\dagger U] \chi_{R'}[JU^\dagger] [dU] \stackrel{(17)}{=} \sum_R \frac{d_R^2}{D_R} \chi_R[JJ^\dagger]. \quad (63)$$

Чтобы сделать следующий шаг [33], [49], потребуется не только (24), но и формула крюков (23):

$$\begin{aligned} Z_{\text{BGW}} &= \sum_R \frac{d_R^2}{D_R} \chi_R[J J^\dagger] = \frac{\prod_{j=0}^{N-1} j!}{\Delta[J J^\dagger]} \sum_{k_1 > \dots > k_N} \frac{\det_{ij} J_i^{2k_j}}{(\prod_j k_j!)} \det_{ij} \frac{1}{(k_j - N + i)!} \stackrel{(37)}{=} \\ &\stackrel{(37)}{=} \left(\prod_{j=0}^{N-1} j! \right) \frac{\det_{ij} (J_j^{N-i} \mathcal{I}_{i-N}(2J_j))}{\Delta(J J^\dagger)} = \left(\prod_{j=0}^{N-1} j! \right) \frac{\det_{ij} (J_i^{j-1} \mathcal{I}_{j-1}(2J_i))}{\Delta(J J^\dagger)}, \end{aligned} \quad (64)$$

где J_i^2 – это собственные значения эрмитовой матрицы $J J^\dagger$, а функция Бесселя

$$\mathcal{I}_s(2x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+s}}{k! (k+s)!} = \mathcal{I}_{-s}(2x).$$

Интеграл Лейтвиллера–Смилги (15) можно преобразовать аналогичным образом, нужно только подходящее обобщение соотношений (28) и (23):

$$(\det U)^\nu e^{\text{tr} U} = \sum_{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0} \chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}[U] \det_{ij} \frac{1}{(\lambda_j - \nu + i - j)!}. \quad (65)$$

Из этой формулы получаем [47], [49]

$$\begin{aligned} Z_{\text{BGW}}(\nu; t) &= \int (\det U)^\nu e^{\text{tr}(J^\dagger U + J U^\dagger)} [dU] = \\ &= \frac{\prod_{j=0}^{N-1} j!}{\Delta[J J^\dagger]} \sum_{k_1 > \dots > k_N} \frac{\det_{ij} J_i^{2k_j}}{(\prod_j k_j!)} \det_{ij} \frac{1}{(k_j - N - \nu + i)!} = \\ &= \left(\prod_{j=0}^{N-1} j! \right) \frac{\det_{ij} (J_i^{j-1} \mathcal{I}_{\nu+j-1}(2J_i))}{\Delta(J J^\dagger)}. \end{aligned} \quad (66)$$

4.4. Корреляторы матриц Ψ в интеграле ИЗ. В данном пункте мы следуем результатам работы [40].

Разложение по характерам позволяет вычислить произвольные корреляторы следов матрицы $\Psi = X U Y U^\dagger$ и их степеней с действием ИЗ. Для диаграммы Юнга $\Delta = \{\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots\} = \left\{ \underbrace{m, \dots, m}_{\alpha_m}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1} \right\}$ размера $|\Delta| = \sum_k \delta_k = \sum_m m \alpha_m$ мы получаем из (44), что

$$\Psi^\Delta \equiv (\text{tr } \Psi)^{\alpha_1} (\text{tr } \Psi^2)^{\alpha_2} \dots (\text{tr } \Psi^m)^{\alpha_m} = z_\Delta \sum_{|R|=|\Delta|} d_R \chi_R(\Psi) \varphi_R(\Delta). \quad (67)$$

Вместо (55) мы можем теперь написать

$$\begin{aligned}
 \int \Psi^\Delta e^{\text{tr} \Psi} [dU] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Psi^{\Delta+n \cdot 1} [dU] \stackrel{(67)}{=} \\
 &\stackrel{(67)}{=} \sum_n \frac{z_{\Delta+n \cdot 1}}{n!} \sum_{|R|=|\Delta|+n} d_R \varphi_R(\Delta + n \cdot 1) \int \chi_R(\Psi) [dU] \stackrel{(54)}{=} \\
 &\stackrel{(54)}{=} \sum_R \frac{z_{\Delta+(|R|-|\Delta|) \cdot 1}}{(|R|-|\Delta|)!} \frac{d_R}{D_R} \varphi_R(\Delta + (|R|-|\Delta|) \cdot 1) \chi_R[X] \chi_R[Y]. \quad (68)
 \end{aligned}$$

Отметим, что сумма по n фактически заменена на сумму по всем R . При этом из суммы по всем n отбирается только вклад с $n = |R| - |\Delta|$. Если в диаграмме Юнга Δ нет единичных столбцов, то $z_{\Delta+(|R|-|\Delta|) \cdot 1} = (|R|-|\Delta|)! z_\Delta$, и сложная формула несколько упрощается:

$$\int \widetilde{\Psi}^\Delta e^{\text{tr} \Psi} [dU] = \sum_R \frac{d_R}{D_R} \varphi_R(\Delta + (|R|-|\Delta|) \cdot 1) \chi_R[X] \chi_R[Y], \quad \text{если } 1 \notin \Delta. \quad (69)$$

В качестве побочного продукта этого вычисления мы получаем доказательство соотношения (40) (см. работу [40]). Для этого подействуем оператором $\widehat{W}(\Delta) = \widetilde{D}^\Delta$ на J_{IZ} . Оператор $\widehat{D}_{ij} = \sum_k X_{ik} \partial / \partial X^{jk}$ преобразует $\Psi_{kl} = (XUYU^\dagger)_{kl}$ в себя, $\widehat{D}_{ij} \Psi_{kl} = \delta_{jk} \Psi_{il}$, следовательно, мы имеем

$$\widehat{W}(\Delta) J_{\text{IZ}}(X, Y) = \widehat{W}(\Delta) \int e^{\text{tr} \Psi} [dU] = \int \widetilde{\Psi}^\Delta e^{\text{tr} \Psi} [dU], \quad (70)$$

и теперь остается подставить соотношение (55) для J_{IZ} в левую часть равенства и формулу (68) для среднего – в правую. Приравнявая в обеих частях равенства коэффициенты перед $d_R \chi_R[Y] / D_R$, получаем

$$\widehat{W}(\Delta) \chi_R(X) = \frac{z_{\Delta+(|R|-|\Delta|) \cdot 1}}{(|R|-|\Delta|)! z_\Delta} \varphi_R(\Delta + (|R|-|\Delta|) \cdot 1) \chi_R[X] \stackrel{(43)}{=} \varphi_R(\Delta) \chi_R[X]. \quad (71)$$

Последнее равенство тривиально выполняется, когда Δ не содержит единичных столбцов, $1 \notin \Delta$, в силу того, что в этом случае $z_{\Delta+(|R|-|\Delta|) \cdot 1} = (|R|-|\Delta|)! z_\Delta$ и $\varphi_R(\Delta + (|R|-|\Delta|) \cdot 1) = \varphi_R(\Delta)$. Если в Δ имеется k единичных столбцов, то

$$z_{\Delta+(|R|-|\Delta|) \cdot 1} = \frac{(|R|-|\Delta|+k)!}{k!} z_\Delta,$$

в то время как

$$\varphi_R(\Delta + (|R|-|\Delta|) \cdot 1) \stackrel{(43)}{=} \frac{k! (|R|-|\Delta|)!}{(|R|-|\Delta|+k)!} \varphi_R(\Delta).$$

Возвращаясь к (68), получаем из этого соотношения разложение по характеристам произвольного коррелятора Ψ -следов. Конечно, эта формула всего лишь полуфабрикат: требуется еще аналог преобразования (58), чтобы превратить ее в более явное

выражение. К сожалению, корреляторы следов Ψ в любом случае не исчерпывают всех корреляторов в теории ХЧИЗ, а вычисление других корреляторов остается нерешенной, недооцененной и недостаточно исследованной задачей, которой мы посвящаем два отдельных пункта в конце этого обзора.

4.5. Парные корреляторы в теории ХЧИЗ. Вычисление унитарных интегралов с мерой ХЧИЗ стало важной научной задачей с появлением модели Казакова–Мигдала для решеточной глюодинамики [27], и первоначально эта задача была рассмотрена в работах [29] и [30], [31]. Если учесть, что интеграл ХЧИЗ (51) имеет дустермаат-хекмановскую природу [5], [14], то становится понятным, что данная задача оказывается также естественным шагом в развитии техники “локализации” и БРСТ-методологии [50]–[53], [59]–[62]. Разумеется, задача связана также с общими исследованиями негауссовых интегралов в теории интегральных дискриминантов [54] – важного раздела бурно развивающейся в последнее время нелинейной алгебры [55]. К сожалению, как уже говорилось, корреляторы ХЧИЗ остаются недооцененной и недостаточно исследованной областью, что не столь уж и удивительно, если учесть бедность наших знаний о самых обычных унитарных интералах, которые были рассмотрены выше в разделе 2. Как бы то ни было, интерес к этой области постепенно возвращается, в частности недавние статьи [14] подтверждают и обобщают старые результаты, полученные в работе [30]. Этот пункт содержит не более чем сжатый обзор современного состояния дел.

В принципе корреляторы можно было бы вычислить напрямую – взяв свою любимую параметризацию унитарных матриц и явно вычислив все N^2 интегралов. Примером разумной и удобной для этой цели параметризации [31] являются свободные координаты Гельфанда–Цейтлина, на которые не наложены никакие связи. Эти координаты возникают естественным образом в рекурсивной по N процедуре, стартующей с соотношения дуальности (53) и подробно описанной в работах [14]. К сожалению, несмотря на всю свою естественность, подобный подход пока не привел ни к какой общей формуле. Как обычно, более практичным оказался “струнный” подход [61], предлагающий вычислять не отдельные корреляторы, а их производящие функции.

Естественной для теории ХЧИЗ является производящая функция

$$\begin{aligned}
 Z_{IZ} &= \int e^{\text{tr} XUYU^\dagger + \text{tr} J^\dagger U + \text{tr} JU^\dagger} [dU] \stackrel{(2)}{\sim} \\
 &\stackrel{(2)}{\sim} \int e^{\text{tr} S(I-MM^\dagger)} e^{\text{tr} XMYM^\dagger + \text{tr} J^\dagger M + \text{tr} JM^\dagger} d^2M dS = \\
 &= \int e^{\text{tr}_{N^2 \times N^2} J^\dagger (S \otimes I - X \otimes Y)^{-1} J} \frac{e^{\text{tr} S} dS}{\det_{N^2 \times N^2} (S \otimes I - X \otimes Y)} = \\
 &= \int \exp \left\{ \sum_k (S_{kk} + J_{ki}^\dagger (S - X y_k)^{-1}_{ij} J_{jk}) \right\} \frac{dS}{\prod_k \det(S - y_k X)} \quad (72)
 \end{aligned}$$

как непосредственное обобщение (52) и (53). Интеграл по M гауссов, так что к нему можно применять теорему Вика. Нетривиальным является вычисление интеграла по S . Интересно также включить в подынтегральное выражение множитель Лейтвиллера–Смилги $(\det U)^\nu$, но (как мы имели случай убедиться в п. 4.3) это приводит к нетривиальным изменениям формул. К сожалению, немного известно об этой функции даже при $\nu = 0$. Не видно никаких препятствий к тому, чтобы рассмотреть что-то более общее, чем первый нетривиальный коррелятор $\langle U_{ij} U_{kl}^\dagger \rangle_{\text{IZ}}$, однако он остается единственным относительно хорошо изученным случаем.

Данный парный коррелятор существенно упрощается, если рассмотреть его в том базисе, где X и Y диагональны. Тогда, как замечено в работах [29],

$$\int U_{ij} U_{kl}^\dagger [dU] = \mathcal{M}_{ij} \delta_{kj} \delta_{il}. \quad (73)$$

Согласно работе [30] в этом базисе производящая функция записывается так:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N a_i \mathcal{M}_{ij} b_j &= \sum_{i,j=1}^N a_i b_j \int |U_{ij}|^2 \exp\left(\sum_{k,l} x_k y_l |U_{kl}|^2\right) [dU] = \\ &= \frac{1}{\Delta(X)\Delta(Y)} \sum_{P \in S_N} (-1)^P e^{x_i y_{P(i)}} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \times \\ &\quad \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_{i_1} & \dots & x_{i_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_1}^{n-1} & \dots & x_{i_{n+1}}^{n-1} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_{n+1}} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ y_{P(i_1)} & \dots & y_{P(i_{n+1})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{P(i_1)}^{n-1} & \dots & y_{P(i_{n+1})}^{n-1} \\ b_{P(i_1)} & \dots & b_{P(i_{n+1})} \end{pmatrix} = \\ &\quad \times \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n+1} \leq N} \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_{i_1} & \dots & x_{i_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_1}^n & \dots & x_{i_{n+1}}^n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ y_{P(i_1)} & \dots & y_{P(i_{n+1})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{P(i_1)}^n & \dots & y_{P(i_{n+1})}^n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_{i_1} & \dots & x_{i_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_1}^n & \dots & x_{i_{n+1}}^n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ y_{P(i_1)} & \dots & y_{P(i_{n+1})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{P(i_1)}^n & \dots & y_{P(i_{n+1})}^n \end{pmatrix}} = \\ &= \frac{1}{\Delta(X)\Delta(Y)} \sum_{P \in S_N} (-1)^P e^{x_i y_{P(i)}} \left(\sum_{i=1}^N a_i b_{P(i)} - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{(a_i - a_j)(b_{P(i)} - b_{P(j)})}{(x_i - x_j)(y_{P(i)} - y_{P(j)})} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ a_i & a_j & a_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_{P(i)} & y_{P(j)} & y_{P(k)} \\ b_{P(i)} & b_{P(j)} & b_{P(k)} \end{vmatrix}}{(x_i - x_j)(x_j - x_k)(x_i - x_k)(y_{P(i)} - y_{P(j)})(y_{P(j)} - y_{P(k)})(y_{P(i)} - y_{P(k)})} + \dots \right). \end{aligned} \quad (74)$$

В работах [14] эта громоздкая формула была преобразована к более изящному виду

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{1}{\Delta(X)\Delta(Y)} \operatorname{res} \left\{ \det E - \det \left(E - \frac{1}{X - u \cdot I} E \frac{1}{Y - v \cdot I} \right) \right\} \Big|_{\substack{u=x_i, \\ v=y_j}}, \quad (75)$$

где матрица E определена так: $E_{ij} = e^{x_i y_j}$. При использовании этой формулы вычетов надо взять коэффициент перед $((u - x_i)(v - y_j))^{-1}$ в сумме по перестановкам

$$\sum_{P \in S_N} (-1)^P \prod_k e^{x_k y_{P(k)}} \left(1 - \frac{1}{(u - x_k)(v - y_{P(k)})} \right). \quad (76)$$

Первый член $\det E$ в (75) не дает вклада в вычет. Фактически возникают два разных распределения: одно для перестановок P со свойством $j = P(i)$ и другое для всех остальных перестановок:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ij} = & \frac{1}{\Delta(X)\Delta(Y)} \sum_{P \in S_N} \sum_P (-1)^P \left\{ \delta_{P(i),j} \prod_{k \neq i}^N \left(1 - \frac{1}{(x_i - x_k)(y_j - y_{P(k)})} \right) - \right. \\ & - \frac{1}{(1 - \delta_{P(i),j})} \frac{1}{(x_i - x_{P(j)})(y_j - y_{P(i)})} \times \\ & \times \left. \prod_{k \neq i, P^{-1}(j)}^N \left(1 - \frac{1}{(x_i - x_k)(y_j - y_{P(k)})} \right) \right\} \prod_{k=1}^N e^{x_k y_{P(k)}}. \end{aligned} \quad (77)$$

В частности, при $N = 1$ остается только один член первого типа, и $\mathcal{M}_{11} = e^{x_1 y_1}$.

При $N = 2$ вклад дают члены обоих типов:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11} &= \frac{1}{x_{12} y_{12}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{x_{12} y_{12}} \right) e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} + \frac{1}{x_{12} y_{12}} e^{x_1 y_2 + x_2 y_1} \right\} = \mathcal{M}_{22}, \\ \mathcal{M}_{12} &= \frac{1}{x_{12} y_{12}} \left\{ \frac{1}{x_{12} y_{12}} e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} - \left(1 + \frac{1}{x_{12} y_{12}} \right) e^{x_1 y_2 + x_2 y_1} \right\} = \mathcal{M}_{21}, \end{aligned} \quad (78)$$

что в точности воспроизводит (74), где при $N = 2$ выживают только два первых члена в правой части. Конечно, $\mathcal{M}_{11} + \mathcal{M}_{12} = J_{12}$.

В общем случае эквивалентность (74) и (75) следует из того, что для $a_i = 1/(u - x_i)$ определители в знаменателе формулы (74) обращаются в

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_{i_1} & \dots & x_{i_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_1}^{n-1} & \dots & x_{i_{n+1}}^{n-1} \\ (u - x_{i_1})^{-1} & \dots & (u - x_{i_{n+1}})^{-1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_{i_1} & \dots & x_{i_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_1}^n & \dots & x_{i_{n+1}}^n \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{u - x_{i_k}} \quad (79)$$

просто потому, что знаменатель имеет размерность $n(n-1)/2$ и при этом антисимметричен по всем x_{i_k} . Поэтому из (74) следует, что

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j} \frac{1}{u-x_i} \mathcal{M}_{ij} \frac{1}{v-y_j} = \\
 & = \frac{1}{\Delta(X)\Delta(Y)} \sum_{P \in S_N} (-1)^P e^{x_i y_{P(i)}} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N \\ \dots < i_{n+1} \leq N}} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(u-x_{i_k})(v-y_{P(i_k)})} \right\} = \\
 & = \frac{1}{\Delta(X)\Delta(Y)} \sum_{P \in S_N} (-1)^P e^{x_i y_{P(i)}} \left\{ 1 - \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{1}{(u-x_i)(v-y_{P(i)})} \right) \right\} = \\
 & = \frac{\det E - \det \left(E - \frac{1}{u-X} E \frac{1}{v-Y} \right)}{\Delta(X)\Delta(Y)}. \tag{80}
 \end{aligned}$$

Отметим, что предельный переход от этой формулы к формуле (4) является непростым упражнением, и это не так уж удивительно, поскольку даже свойство $J_{IZ}(X, Y) = 1$ при $X, Y = 0$ в формуле (47) является не вполне очевидным. Гораздо проще проверить, что соотношение (80) совместно с равенством $\sum_j |U_{ij}|^2 = 1$, т.е. что $\sum_j \mathcal{M}_{ij} = J_{IZ}$ для любого i . В самом деле,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j} \frac{1}{u-x_i} \mathcal{M}_{ij} &= \sum_j \oint_{y_j} \frac{\det E - \det \left(E - \frac{1}{u-X} E \frac{1}{v-Y} \right)}{\Delta(X)\Delta(Y)} dv = \\
 &= \frac{\det E}{\Delta(X)\Delta(Y)} \oint_{\infty} \left(1 - \det \left(1 - \frac{1}{u-X} E \frac{1}{v-Y} E^{-1} \right) \right) dv = \\
 &= J_{IZ} \oint_{\infty} \operatorname{tr} \frac{1}{u-X} E \frac{1}{v-Y} E^{-1} dv = J_{IZ} \operatorname{tr} \frac{1}{u-X}.
 \end{aligned}$$

Разложение парного коррелятора по характеристам можно получить по аналогии с (54), если известно подходящее обобщение (16) и (17), а именно

$$\int \mathcal{U}_R \mathcal{U}_R^\dagger \mathcal{U}_{R'} \mathcal{U}_{R'}^\dagger [dU] \tag{81}$$

– обобщение (5) на произвольные представления. Для разложения производящей функции (74) фактически достаточно случая, когда R' – первое фундаментальное представление.

Как и сам интеграл ХЧИЗ, парный коррелятор удовлетворяет соотношению типа дуальности – прямому обобщению формулы (53): из того, что

$$\int U_{ij} U_{kl}^\dagger [dU] \stackrel{(72)}{\sim} \delta_{jk} \int \left(\frac{1}{S - X y_k} \right)_{il}^{-1} \frac{e^{\operatorname{tr} S} dS}{\prod_k \det(S - X y_k)}, \tag{82}$$

после замены матричных переменных интегрирования $S \rightarrow XS$ и после диагонализации матриц X и S следует, что

$$\mathcal{M}_{ij}(X, Y) \sim \int \frac{\mathcal{M}_{ij}(X, S) \Delta^2(S) \prod_p ds_p}{(s_i - y_j) x_j \prod_{p,q} (s_p - y_q)}. \tag{83}$$

Непосредственно из (72) можно вывести сходные соотношения и для старших корреляторов в теории ХЧИЗ. Об обобщениях на другие простые группы Ли см., например, работы [7] и [14].

4.6. Пример $U(2)$. Чтобы проиллюстрировать использование соотношений дуальности, мы явно покажем, как функции (74) и (75) удовлетворяют (83) в простейшем содержательном случае $N = 2$.

Начнем с еще более простого случая – соотношения дуальности (53) при $N = 1$. Утверждение тогда сводится к равенству

$$e^{xy} = \oint \frac{e^{xs} ds}{s - y}, \quad (84)$$

и понятно, что интеграл следует понимать как вычет в полюсе при $s = y$ (как обычно, множитель $2\pi i$ включен в определение контурного интеграла).

При $N = 2$ то же соотношение (53) становится более сложным:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} - e^{x_1 y_2 + x_2 y_1}}{x_{12} y_{12}} \stackrel{(72)}{\sim} \oint \oint \frac{e^{x_1 s_1 + x_2 s_2} - e^{x_1 s_2 + x_2 s_1}}{x_{12} s_{12}} \times \\ & \times \frac{s_{12}^2 ds_1 ds_2}{(s_1 - y_1)(s_1 - y_2)(s_2 - y_1)(s_2 - y_2)} = \\ & = \frac{1}{x_{12} y_{12}^2} \oint \oint (e^{x_1 s_1 + x_2 s_2} - e^{x_1 s_2 + x_2 s_1}) \left(\frac{1}{s_1 - y_1} - \frac{1}{s_1 - y_2} \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{s_2 - y_1} - \frac{1}{s_2 - y_2} \right) s_{12} ds_1 ds_2 = \\ & = \frac{1}{x_{12} y_{12}^2} (-y_{12}(e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} - e^{x_1 y_2 + x_2 y_1}) - y_{21}(e^{x_1 y_2 + x_2 y_1} - e^{x_1 y_1 + x_2 y_2})) = \\ & = -2 \frac{e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} - e^{x_1 y_2 + x_2 y_1}}{x_{12} y_{12}}. \end{aligned} \quad (85)$$

Заметим, что из четырех возможных полюсов $(s_1, s_2) = (y_1, y_1), (y_1, y_2), (y_2, y_1), (y_2, y_2)$ первый и последний не дают вклада из-за множителя $s_{12} = s_1 - s_2$ в числителе подынтегрального выражения.

Возвращаемся к тождеству (83). В случае $N = 1$ в нем просто утверждается, что

$$e^{xy} = \oint \frac{e^{xs} ds}{x(s - y)^2} = \frac{1}{x} \frac{\partial e^{xs}}{\partial s} \Big|_{s=y} = e^{xy}. \quad (86)$$

При $N = 2$ вычисление существенно удлиняется. Мы приведем его только для одного (из четырех) ненулевых корреляторов (78), а именно для

$$\mathcal{M}_{11}(X, Y) = -\frac{1}{x_{12}^2 y_{12}^2} ((1 - x_{12} y_{12}) e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} - e^{x_1 y_2 + x_2 y_1}). \quad (87)$$

С помощью тех же приемов, что использовались в (85), можно переписать правую часть (83) как

$$\begin{aligned}
 & \oint \oint \frac{s_{12}^2 ds_1 ds_2}{(s_1 - y_1) x_1 y_{12}^2} \left(\frac{1}{s_1 - y_1} - \frac{1}{s_1 - y_2} \right) \left(\frac{1}{s_2 - y_1} - \frac{1}{s_2 - y_2} \right) \times \\
 & \quad \times \left\{ - \left(\frac{1}{x_{12}^2} - \frac{s_{12}}{x_{12}} \right) e^{x_1 s_1 + x_2 s_2} + \frac{1}{x_{12}^2} e^{x_1 s_2 + x_2 s_1} \right\} = \\
 & = \frac{1}{x_1 x_{12}^2 y_{12}^2} \oint \oint \left\{ - \frac{1}{(s_1 - y_1)^2} + \frac{1}{y_{12}} \left(\frac{1}{s_1 - y_1} - \frac{1}{s_1 - y_2} \right) \right\} \times \\
 & \quad \times \left(\frac{1}{s_2 - y_1} - \frac{1}{s_2 - y_2} \right) ((1 - s_{12} x_{12}) e^{x_1 s_1 + x_2 s_2} - e^{x_1 s_2 + x_2 s_1}) ds_1 ds_2.
 \end{aligned}$$

Для облегчения анализа этой и последующих формул мы подчеркиваем члены, происходящие из двойных полюсов при $s_1 = y_1$ и порождающие производные подынтегрального выражения в интеграле по s_1 . На этот раз все четыре полюса могут давать вклад, и сокращение двух нежелательных вкладов несколько менее тривиально: для $(s_1, s_2) = (y_1, y_1)$ мы получаем

$$\left(\frac{-(x_1 - x_{12}) + x_2}{y_{12}} + \frac{1}{y_{12}} (1 - 1) \right) e^{(x_1 + x_2) y_1} = 0,$$

а для $(s_1, s_2) = (y_2, y_2)$ —

$$\frac{1}{y_{12}} (1 - 1) e^{(x_1 + x_2) y_2} = 0.$$

Неисчезающий вклад дают два других полюса: для $(s_1, s_2) = (y_2, y_1)$ имеем

$$- \frac{1}{y_{12}} ((1 + x_{12} y_{12}) e^{x_1 y_2 + x_2 y_1} - e^{x_1 y_1 + x_2 y_2}),$$

наконец, для $(s_1, s_2) = (y_1, y_2)$ имеем

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{y_{12}} ((1 - x_{12} y_{12}) e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} - e^{x_1 y_2 + x_2 y_1}) + \\
 & + \frac{(x_1 (1 - x_{12} y_{12}) - x_{12}) e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} - x_2 e^{x_1 y_2 + x_2 y_1}}{y_{12}}.
 \end{aligned}$$

Собирая все выражения, получаем для правой части (83)

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{x_1 x_{12}^2 y_{12}^2} \left\{ \left(\frac{1}{y_{12}} + \frac{x_1 - x_{12} - x_1 x_{12} y_{12}}{y_{12}} - \frac{1}{y_{12}} + x_{12} \right) e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} + \right. \\
 & \quad \left. + \left(- \frac{1}{y_{12}} - x_{12} - \frac{x_2}{y_{12}} + \frac{1}{y_{12}} \right) e^{x_1 y_2 + x_2 y_1} \right\} = \\
 & = \frac{1}{x_{12}^2 y_{12}^2} \{ (1 - x_{12} y_{12}) e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} - e^{x_1 y_2 + x_2 y_1} \} = -\mathcal{M}_{11}(X, Y). \quad (88)
 \end{aligned}$$

Чтобы дать некоторое представление о том, на что похожи старшие корреляторы, приведем здесь ненулевые четырехточечные корреляторы при $N = 2$:

$$\begin{aligned}
\int U_{11}^2 (U_{11}^\dagger)^2 [dU] &= \frac{1}{x_{12}^3 y_{12}^3} \{ (2 - 2x_{12}y_{12} + x_{12}^2 y_{12}^2) e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} - 2e^{x_1 y_2 + x_2 y_1} \}, \\
\int U_{11} U_{12} U_{11}^\dagger U_{21}^\dagger [dU] &= \frac{1}{x_{12}^3 y_{12}^3} \{ (-2 + x_{12}y_{12}) e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} + (2 + x_{12}y_{12}) e^{x_1 y_2 + x_2 y_1} \}, \\
\int U_{11} U_{22} U_{11}^\dagger U_{22}^\dagger [dU] &= \frac{1}{x_{12}^3 y_{12}^3} \{ (2 - 2x_{12}y_{12} + x_{12}^2 y_{12}^2) e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} - 2e^{x_1 y_2 + x_2 y_1} \}, \\
\int U_{11} U_{22} U_{12}^\dagger U_{21}^\dagger [dU] &= \frac{1}{x_{12}^3 y_{12}^3} \{ (2 - x_{12}y_{12}) e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} - (2 + x_{12}y_{12}) e^{x_1 y_2 + x_2 y_1} \}, \\
\int U_{12}^2 (U_{21}^\dagger)^2 [dU] &= \frac{1}{x_{12}^3 y_{12}^3} \{ 2e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} - (2 + 2x_{12}y_{12} + x_{12}^2 y_{12}^2) e^{x_1 y_2 + x_2 y_1} \}, \\
\int U_{12} U_{21} U_{12}^\dagger U_{21}^\dagger [dU] &= \frac{1}{x_{12}^3 y_{12}^3} \{ 2e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} - (2 + 2x_{12}y_{12} + x_{12}^2 y_{12}^2) e^{x_1 y_2 + x_2 y_1} \}.
\end{aligned} \tag{89}$$

Другие исчезающие корреляторы получаются действием дискретных симметрий $1 \leftrightarrow 2$, например

$$\int U_{22}^2 (U_{22}^\dagger)^2 [dU] = \int U_{11}^2 (U_{11}^\dagger)^2 [dU].$$

Легко проверить, что сумма первого и последнего равенств в (89), которая должна равняться $\int U_{11} U_{11}^\dagger [dU]$, действительно воспроизводит $\mathcal{M}_{11}$ из (85). Точно так же сумма второго и пятого равенств воспроизводит $\mathcal{M}_{12}$, в то время как сумма второго и четвертого равенств должна обращаться в нуль – и она действительно равна нулю. Далее, в пределе $x, y \rightarrow 0$ выражения (89) превращаются в (5), хотя, как уже говорилось, этот предел не так легко взять: даже в этой простой ситуации ($N = 2$) приходится разлагать экспоненты до третьей степени по их аргументам.

Последний критерий существенно ограничивает возможную форму $2m$ -точечного коррелятора:

$$\int U^{\otimes m} (U^\dagger)^{\otimes m} [dU] = \frac{1}{(x_{12} y_{12})^{m+1}} (P(x_{12} y_{12}) e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} - Q(x_{12} y_{12}) e^{x_1 y_2 + x_2 y_1}), \tag{90}$$

где $P(t) = \sum_{k=0}^m P_k t^k$ и $Q(t) = \sum_{k=0}^m Q_k t^k$ – многочлены степени m по переменной $t = x_{12} y_{12} = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$. Условие, что эти выражения несингулярны при $t = 0$, подразумевает, что

$$P_k = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} Q_{k-j}, \tag{91}$$

т.е. многочлен $P(t)$ полностью определен, если известен $Q(t)$. Выбор $Q(t)$ зависит от коррелятора. В частности,

$$\int U_{11}^m (U_{11}^\dagger)^m [dU] = \frac{(-1)^m}{(x_{12}y_{12})^{m+1}} \left(e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k m!}{k!} (x_{12} y_{12})^k - e^{x_1 y_2 + x_2 y_1} m! \right). \quad (92)$$

Из этого примера ясно, что обобщение соотношений (74), (75) на четырехточечные и более высокие корреляторы должно быть прямым и непосредственным. Его, однако, еще только предстоит найти.

Благодарности. Я признателен А. Александрову, А. Миронову, А. Пополитову и Ш. Шакирову за сотрудничество и помощь. Работа частично поддержана Государственной корпорацией по атомной энергии “РосАтом”, Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3035.2008.2) и РФФИ (гранты № 07-02-00645, 09-02-91005-ANF, 09-02-90493-Ukr, 09-02-93105-CNRS и 09-01-92440-CE).

Список литературы

- [1] E. P. Wigner, *Ann. Math.*, **62**:3 (1955), 548–564; F. J. Dyson, *J. Math. Phys.*, **3**:1 (1962), 140, 157, 166, 1191, 1199; E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, J. B. Zuber, *Comm. Math. Phys.*, **59**:1 (1978), 35–51; D. Bessis, *Comm. Math. Phys.*, **69**:2 (1979), 147–163; D. Bessis, C. Itzykson, J. B. Zuber, *Adv. Appl. Math.*, **1**:2 (1980), 109–157; M. L. Mehta, *Comm. Math. Phys.*, **79**:3 (1981), 327–340; *Random Matrices*, Acad. Press, Boston, MA, 1991; D. Bessis, C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Adv. Appl. Math.*, **1**:2 (1980), 109–157; A. A. Migdal, *Phys. Rep.*, **102**:4 (1983), 199–290; F. David, *Nucl. Phys. B*, **257**:1 (1985), 45–58; 543–576; J. Ambjørn, B. Durhuus, J. Fröhlich, *Nucl. Phys. B*, **257**:3 (1985), 433–449; V. A. Kazakov, I. K. Kostov, A. A. Migdal, *Phys. Lett. B*, **157**:4 (1985), 295–300; D. V. Boulatov, V. A. Kazakov, I. K. Kostov, A. A. Migdal, *Phys. Lett. B*, **174**:1 (1986), 87–93; *Nucl. Phys. B*, **275**:4 (1986), 641–686; V. A. Kazakov, *Phys. Lett. A*, **119**:3 (1986), 140–144; *Modern Phys. Lett. A*, **4**:22 (1989), 2125–2139; E. Brézin, V. Kazakov, *Phys. Lett. B*, **236**:2 (1990), 144–150; D. J. Gross, A. A. Migdal, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:2 (1990), 127–130; *Nucl. Phys. B*, **340**:2–3 (1990), 333–365; M. Douglas, S. Shenker, *Nucl. Phys. B*, **335**:3 (1990), 635–654; L. Alvarez-Gaumé, “Random surfaces, statistical mechanics and string theory”, *Helv. Phys. Acta*, **64**:4 (1991), 359–526; M. R. Douglas, *Phys. Lett. B*, **238**:2–4 (1990), 176–180; A. Levin, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **243**:3 (1990), 207–214; P. Ginsparg, *Matrix Models of 2d Gravity*, [arXiv: hep-th/9112013](#); D. J. Gross, M. J. Newman, *Phys. Lett. B*, **266**:3–4 (1991), 291–297; A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **265**:1–2 (1991), 99–107; R. Dijkgraaf, G. Moore, R. Plesser, *Nucl. Phys. B*, **394**:2 (1993), 356–382; [arXiv: hep-th/9208031](#); J.-M. Daul, V. A. Kazakov, I. K. Kostov, *Nucl. Phys. B*, **409**:2 (1993), 311–338; M. Staudacher, *Phys. Lett. B*, **305**:4 (1993), 332–338; [arXiv: hep-th/9301038](#); J. Ambjørn, L. Chekhov, C. F. Kristjansen, Yu. Makeenko, *Nucl. Phys. B*, **404**:1–2 (1993), 127–172; Erratum, **449** (1995), 681; [arXiv: hep-th/9302014](#); P. Di Francesco, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin, *Phys. Rep.*, **254**:1–2 (1995), 1–133; [arXiv: hep-th/9306153](#); A. Mironov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:25 (1994), 4355–4405; [arXiv: hep-th/9312212](#); *ЯФ*, **33** (2002), 1051–1145; B. Eynard, *Large random matrices: eigenvalue distribution*, [arXiv: hep-th/9401165](#); M. Adler, A. Morozov, T. Shiota, P. van Moerbeke, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, **49**:1–3 (1996), 201–212; [arXiv: hep-th/9603066](#);

- G. Akemann, *Nucl. Phys. B*, **482**:1–2 (1996), 403–430; [arXiv: hep-th/9606004](#); G. Akemann, P. H. Damgaard, U. Magnea, S. Nishigaki, *Nucl. Phys. B*, **487**:3 (1997), 721–738; **519**:3 (1998), 682–714; [arXiv: hep-th/9609174](#); [arXiv: hep-th/9712006](#); J. Ambjørn, M. G. Harris, M. Weis, *Nucl. Phys. B*, **504**:1–2 (1997), 482–510; [arXiv: hep-th/9702188](#); A. Marshakov, M. Martellini, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **418**:3–4 (1998), 294–302; [arXiv: hep-th/9706050](#); T. Guhr, A. Mueller-Groeling, H. A. Weidenmüller, *Phys. Rep.*, **299**:4–6 (1998), 189–425; [arXiv: cond-mat/9707301](#); V. A. Kazakov, I. K. Kostov, N. A. Nekrasov, *Nucl. Phys. B*, **557**:3 (1999), 413–442; [arXiv: hep-th/9810035](#); M. Adler, P. van Moerbeke, *Ann. Math.*, **149**:3 (1999), 921–976; B. Eynard, *Random Matrices. Saclay Lecture Notes*, 2000, <http://ipht.cea.fr/Docsphr/articles/t01/014/public/publi.pdf>; A. Gerasimov, A. Morozov, K. Selivanov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **16**:9 (2001), 1531–1558; [arXiv: hep-th/0005053](#); A. Okounkov, *Int. Math. Res. Not.*, **2002**:18 (2002), 933–957; [arXiv: math.AG/0101201](#); P. Ormerod, C. Mounfield, *Physica A*, **280**:3–4 (2000), 497–504; [arXiv: cond-mat/0102357](#); P. Di Francesco, *Nucl. Phys. B*, **648**:3 (2003), 461–496; [arXiv: cond-mat/0208037](#); P. J. Forrester, N. C. Snaith, J. J. M. Verbaarschot, *J. Phys. A*, **36**:12 (2003), R1–R10; [arXiv: cond-mat/0303207](#); S. Alexandrov, V. Kazakov, D. Kutasov, *JHEP*, **09** (2003), 057; [arXiv: hep-th/0306177](#); N. Seiberg, D. Shih, *JHEP*, **02** (2004), 021; [arXiv: hep-th/0312170](#); V. Kazakov, I. Kostov, “Instantons in non-critical strings from the two-matrix model”, *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics*, V. 3, eds. M. Shifman, A. Vainshtein J. Wheeler, World Sci. Publ., Singapore, 2005, 1864–1894; [arXiv: hep-th/0403152](#); G. Akemann, Y. V. Fyodorov, G. Vernizzi, *Nucl. Phys. B*, **694**:1–2 (2004), 59–98; [arXiv: hep-th/0404063](#); P. Di Francesco, “2D quantum gravity, matrix models and graph combinatorics”, *Applications of Random Matrices in Physics*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **221**, eds. É. Brézin, V. Kazakov, Didina Serban, P. Wiegmann A. Zabrodin, Springer, Dordrecht, 2006, 33–88; [arXiv: math-ph/0406013](#); A. Morozov, “Challenges of matrix models”, *String Theory: From Gauge Interactions to Cosmology*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **208**, eds. L. Baulieu, J. de Boer, B. Pioline, E. Rabinovici, Springer, Dordrecht, 2006, 129–162; [arXiv: hep-th/0502010](#); M. Stephanov, J. J. M. Verbaarschot, T. Wettig, *Random matrices*, [arXiv: hep-ph/0509286](#); Y. V. Fyodorov, B. A. Khoruzhenko, *Comm. Math. Phys.*, **273**:3 (2007), 561–599; [arXiv: math-ph/0602032](#); Y. V. Fyodorov, *Int. Math. Res. Not.*, 2006, 61570; [arXiv: math-ph/0602039](#); J. Harnad, A. Yu. Orlov, *Physica D*, **235**:1–2 (2007), 168–206; [arXiv: 0704.1157](#).
- [2] A. A. Мигдал, *ЖЭТФ*, **69** (1975), 810–822; C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Comm. Math. Phys.*, **134**:1 (1990), 197–207; P. Di Francesco, C. Itzykson, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **59**:2 (1993), 117–139; V. A. Kazakov, M. Staudacher, T. Wynter, *Comm. Math. Phys.*, **179**:1 (1996), 235–256; I. K. Kostov, M. Staudacher, T. Wynter, *Comm. Math. Phys.*, **191**:2 (1998), 283–298; [arXiv: hep-th/9703189](#).
- [3] V. Kazakov, “Solvable matrix models”, *Random Matrix Models and Their Applications*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **40**, eds. P. Bleher, A. Its, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, 271–283; [arXiv: hep-th/0003064](#).
- [4] А. Ю. Морозов, *ВФЖ*, **164**:1 (1994), 3–62; [arXiv: hep-th/9303139](#).
- [5] A. Morozov, “Matrix models as integrable systems”, *Particles and Fields*, CRM Ser. Math. Phys., eds. G. Semenoff, L. Vinet, Springer, New York, 1999, 127–210; [arXiv: hep-th/9502091](#).
- [6] F. Cachazo, K. Intriligator, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **603**:1–2 (2001), 3–41; [arXiv: hep-th/0103067](#); F. Cachazo, C. Vafa, *N = 1 and N = 2 geometry from fluxes*, [arXiv: hep-th/0206017](#); R. Dijkgraaf, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **644**:1–2 (2002), 3–20; 21–39; [arXiv: hep-th/0206255](#); [arXiv: hep-th/0207106](#); *A Perturbative window into non-perturbative physics*, [arXiv: hep-th/0208048](#); L. Chekhov, A. Mironov, *Phys. Lett. B*,

- 552**:3–4 (2003), 293–302; [arXiv:hep-th/0209085](#); R. Dijkgraaf, S. Gukov, V. A. Kazakov, C. Vafa, *Phys. Rev. D*, **68**:4 (2003), 045007; [arXiv:hep-th/0210238](#); V. A. Kazakov, A. Marshakov, *J. Phys. A*, **36**:12 (2003), 3107–3136; [arXiv:hep-th/0211236](#); H. Itoyama, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **657**:1–3 (2003), 53–78; [arXiv:hep-th/0211245](#); *Phys. Lett. B*, **555**:3–4 (2003), 287–295; [arXiv:hep-th/0211259](#); *Progr. Theor. Phys.*, **109**:3 (2003), 433–463; [arXiv:hep-th/0212032](#); *Internat. J. Modern Phys. A*, **18**:32 (2003), 5889–5906; [arXiv:hep-th/0301136](#); S. G. Naculich, H. Schnitzer, N. Wyllard, *JHEP*, **01** (2003), 015; [arXiv:hep-th/0211254](#); B. Feng, *Nucl. Phys. B*, **661**:1–2 (2003), 113–138; [arXiv:hep-th/0212010](#); I. Bena, S. de Haro, R. Roiban, *Nucl. Phys. B*, **664**:1–2 (2003), 45–58; [arXiv:hep-th/0212083](#); Ch. Ahn, *Phys. Lett. B*, **560**:1–2 (2003), 116–127; [arXiv:hep-th/0301011](#); L. Chekhov, A. Marshakov, A. Mironov, D. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **562**:3–4 (2003), 323–338; [arXiv:hep-th/0301071](#); Л. О. Чехов, А. В. Маршаков, А. Д. Миронов, Д. Васильев, “Комплексная геометрия матричных моделей”, *Нелинейная динамика*, Сборник статей, Тр. МИАН, **251**, Наука, М., 2005, 265–306; [arXiv:hep-th/0506075](#); A. Dymarsky, V. Pestun, *Phys. Rev. D*, **67**:12 (2003), 125001; [arXiv:hep-th/0301135](#); Yu. Ookouchi, Yo. Watabiki, *Modern Phys. Lett. A*, **18**:16 (2003), 1113–1126; [arXiv:hep-th/0301226](#); H. Itoyama, H. Kanno, *Phys. Lett. B*, **573**:1–4 (2003), 227–234; [arXiv:hep-th/0304184](#); *Nucl. Phys. B*, **686**:1–2 (2004), 155–164; [arXiv:hep-th/0312306](#); M. Matone, L. Mazzucato, *JHEP*, **07** (2003), 015; [arXiv:hep-th/0305225](#); R. Argurio, G. Ferretti, R. Heise, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:13 (2004), 2015–2078; [arXiv:hep-th/0311066](#); M. Gómez-Reino, *JHEP*, **06** (2004), 051; [arXiv:hep-th/0405242](#); K. Fujiwara, H. Itoyama, M. Sakaguchi, *Progr. Theor. Phys.*, **113**:2 (2005), 429–455; [arXiv:hep-th/0409060](#); *Nucl. Phys. B*, **723**:1–2 (2005), 33–52; [arXiv:hep-th/0503113](#); *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, no. 164 (2007), 125–137; [arXiv:hep-th/0602267](#); Sh. Aoyama, *JHEP*, **10** (2005), 032; [arXiv:hep-th/0504162](#); D. Berenstein, S. Pinansky, *Nucl. Phys. B*, **753**:1–2 (2006), 69–91; [arXiv:hep-th/0602294](#).
- [7] E. Brezin, S. Hikami, *An extension of the HarishChandra–Itzykson–Zuber integral*, [arXiv:math-ph/0208002](#).
- [8] A. Zabrodin, *Modern Phys. Lett. A*, **7**:5 (1992), 441–446; *Ann. Henri Poincaré*, **4**, Suppl. 2, 851–861; [arXiv:cond-mat/0210331](#); P. Wiegmann, A. Zabrodin, “Large N expansion for normal and complex matrix ensembles”, *Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry*, I, eds. P. Cartier, B. Julia, P. Moussa, P. Vanhove, Springer, Berlin, 2006, 213–229; [arXiv:hep-th/0309253](#); R. Teodorescu, E. Bettelheim, O. Agam, A. Zabrodin, P. Wiegmann, *Nucl. Phys. B*, **704**:3 (2005), 407–444; [arXiv:hep-th/0401165](#).
- [9] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:24 (2004), 4127–4163; A. С. Александров, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **142**:3 (2005), 419–488; [arXiv:hep-th/0310113](#).
- [10] T. J. Hollowood, A. Iqbal, C. Vafa, *JHEP*, **03** (2008), 069; [arXiv:hep-th/0310272](#).
- [11] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **21**:12 (2006), 2481–2517; [arXiv:hep-th/0412099](#); *Fortschr. Phys.*, **53**:5–6 (2005), 512–521; [arXiv:hep-th/0412205](#); A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, P. Putrov, *Partition functions of matrix models as the first special functions of string theory. II. Kontsevich model*, [arXiv:0811.2825](#).
- [12] B. Eynard, *JHEP*, **11** (2004), 031; [arXiv:hep-th/0407261](#); B. Eynard, N. Orantin, *JHEP*, **12** (2005), 034; [arXiv:math-ph/0504058](#); *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:2 (2007), 347–452; [arXiv:math-ph/0702045](#); L. Chekhov, B. Eynard, *JHEP*, **03** (2006), 014; [arXiv:hep-th/0504116](#); **12** (2006), 026; [arXiv:math-ph/0604014](#); B. Eynard, N. Orantin, M. Marinño, *JHEP*, **06** (2007), 058; [arXiv:hep-th/0702110](#); N. Orantin, *From matrix models’ topological expansion to topological string theories: counting surfaces with algebraic geometry*, [arXiv:0709.2992](#); *Gaussian matrix model in an external field and non-intersecting Brownian motions*, [arXiv:0803.0705](#).

- [13] B. Eynard, *JHEP*, **01** (2003), 051; **11** (2003), 018; [arXiv:hep-th/0210047](#); [arXiv:hep-th/0309036](#).
- [14] M. Bertola, B. Eynard, *J. Phys. A*, **36**:28 (2003), 7733–7750; [arXiv:hep-th/0303161](#); B. Eynard, *A short note about Morozov’s formula*, [arXiv:math-ph/0406063](#); B. Eynard, A. Prats Ferrer, *Comm. Math. Phys.*, **264**:1 (2005), 115–144; [arXiv:hep-th/0502041](#); A. Prats Ferrer, B. Eynard, P. Di Francesco, J.-B. Zuber, *J. Stat. Phys.*, **129**:5–6 (2009), 885–935; [arXiv:math-ph/0610049](#); M. Bertola, A. Prats Ferrer, *Int. Math. Res. Not.*, **16** (2008), Art. ID rnn062; [arXiv:0801.3452](#); M. Bergère, B. Eynard, *J. Phys. A*, **42**:26 (2009), 265201; [arXiv:0805.4482](#).
- [15] N. A. Nekrasov, A. Okounkov, “Seiberg–Witten theory and random partitions”, *The Unity of Mathematics*, Progr. Math., **244**, eds. P. Etingof, V. Retakh, I. M. Singer, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, 525–596; [arXiv:hep-th/0306238](#); A. Marshakov, N. A. Nekrasov, *JHEP*, **01** (2007), 104; [arXiv:hep-th/0612019](#); B. Eynard, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, **7** (2008), P07023; [arXiv:0804.0381](#); A. Klemm, P. Sulkowski, *Nucl. Phys. B*, **819**:3 (2009), 400–430; [arXiv:0810.4944](#); P. Sulkowski, *Phys. Rev. D*, 2009, 086006; [arXiv:0904.3064](#).
- [16] A. C. Александров, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **150**:2 (2007), 179–192; [arXiv:hep-th/0605171](#); *Physica D*, **235**:1–2 (2007), 126–167; [arXiv:hep-th/0608228](#); N. Orant, *Symplectic invariants, Virasoro constraints and Givental decomposition*, [arXiv:0808.0635](#).
- [17] J. Harer, D. Zagier, *Invent. Math.*, **85**:3 (1986), 457–485; S. K. Lando, A. K. Zvonkine, *Graphs on Surfaces and Their Applications*, Encyclopaedia Math. Sci., **141**, Springer, Berlin, 2004; E. T. Akhmedov, Sh. Shakirov, *Gluing of surfaces with polygonal boundaries*, [arXiv:0712.2448](#); A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **12** (2009), 003; [arXiv:0906.0036](#); “Harer–Zagier correlation functions in Gaussian matrix models”, to appear.
- [18] A. Morozov, Sh. Shakirov, *Combinatorial Solution of Hermitian Model at Low Genera*, to appear.
- [19] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Orlov, *Nucl. Phys. B*, **357**:2–3 (1991), 565–618; Yu. Makeenko, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **356**:3 (1991), 574–628; S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, S. Pakuliak, *Nucl. Phys. B*, **404**:3 (1993), 717–750; [arXiv:hep-th/9208044](#).
- [20] М. Л. Концевич, *Функц. анализ и его прил.*, **25**:2 (1991), 50–57; M. Kontsevich, *Comm. Math. Phys.*, **147**:1 (1992), 1–23.
- [21] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zabrodin, *Phys. Lett. B*, **275**:3–4 (1992), 311–314; [arXiv:hep-th/9111037](#); *Nucl. Phys. B*, **380**:1–2 (1992), 181–240; [arXiv:hep-th/9201013](#); S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **397**:1–2 (1993), 339–378; [arXiv:hep-th/9203043](#); A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Modern Phys. Lett. A*, **7**:15 (1992), 1345–1359; [arXiv:hep-th/9201010](#); *Phys. Lett. B*, **274**:3–4 (1992), 280–288; [arXiv:hep-th/9201011](#).
- [22] M. Adler, P. van Moerbeke, *Comm. Math. Phys.*, **147** (1992), 25–56; P. Di Francesco, C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Comm. Math. Phys.*, **151**:1 (1993), 193–219; [arXiv:hep-th/9206090](#); S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Modern Phys. Lett. A*, **8**:11 (1993), 1047–1061; С. М. Харчев, А. В. Маршаков, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **95**:2 (1993), 280–292; [arXiv:hep-th/9208046](#).
- [23] M. Fukuma, H. Kawai, R. Nakayama, *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:8 (1991), 1385–1406; R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde, *Nucl. Phys. B*, **348**:3 (1991), 435–456; A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **252**:1 (1990), 47–52; F. David, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:13 (1990), 1019–1029; J. Ambjørn, Yu. Makeenko, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:22 (1990), 1753–1763; H. Itoyama, Y. Matsuo, *Phys. Lett. B*, **255**:2 (1991), 202–208.
- [24] L. Chekhov, Yu. Makeenko, *Phys. Lett. B*, **278**:3 (1992), 271–278; [arXiv:hep-th/9202006](#); *Modern Phys. Lett. A*, **7**:14 (1992), 1223–1236; [arXiv:hep-th/9201033](#); J. Ambjørn,

- C. F. Kristjansen, Yu. M. Makeenko, *Modern Phys. Lett. A*, **7**:34 (1992), 3187–3202; [arXiv: hep-th/9207020](#).
- [25] E. J. Martinec, *Comm. Math. Phys.*, **138**:3 (1991), 437–449; V. Periwal, D. Shevitz, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:12 (1990), 1326–1329; *Nucl. Phys. B*, **344**:3 (1990), 731–746; K. Demeterfi, C.-I. Tan, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:20 (1990), 1563–1574.
- [26] M. J. Bowick, A. Morozov, D. Shevitz, *Nucl. Phys. B*, **354**:2–3 (1991), 496–530.
- [27] V. A. Kazakov, A. A. Migdal, *Nucl. Phys. B*, **397**:1–2 (1993), 214–238; [arXiv: hep-th/9206015](#).
- [28] M. Caselle, A. D’Adda, S. Panzeri, *Phys. Lett. B*, **293**:1–2 (1992), 161–167; [arXiv: hep-th/9207086](#); **302**:1 (1993), 80–86; [arXiv: hep-th/9212074](#).
- [29] I. I. Kogan, A. Morozov, G. W. Semenoff, N. Weiss, *Nucl. Phys. B*, **395**:3 (1993), 547–580; [arXiv: hep-th/9208012](#); *Internat. J. Modern Phys. A*, **8**:8 (1993), 1411–1436; [arXiv: hep-th/9208054](#); M. Dobroliubov, A. Morozov, G. W. Semenoff, N. Weiss, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:29 (1994), 5033–5051; [arXiv: hep-th/9312145](#).
- [30] A. Morozov, *Modern Phys. Lett. A*, **7**:37 (1992), 3503–3507; [arXiv: hep-th/9209074](#).
- [31] S. L. Shatashvili, *Comm. Math. Phys.*, **154**:2 (1993), 421–432; [arXiv: hep-th/9209083](#).
- [32] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:14 (1995), 2015–2051; [arXiv: hep-th/9312210](#).
- [33] A. Mironov, A. Morozov, G. W. Semenoff, *Internat. J. Modern Phys. A*, **11**:28 (1996), 5031–5080; [arXiv: hep-th/9404005](#).
- [34] A. Hurwitz, *Math. Ann.*, **39**:1 (1891), 1–60; **55**:1 (1901), 53–66.
- [35] R. Dijkgraaf, “Mirror symmetry and elliptic curves”, *The Moduli Spaces of Curves*, Progr. Math., **129**, eds. R. Dijkgraaf, C. Faber G. van der Geer, Birkhäuser, Boston, MA, 1995, 149–163; R. Vakil, *Enumerative geometry of curves via degeneration methods*, Harvard Ph. D. Thesis, 1997; I. P. Goulden, D. M. Jackson, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:1 (1997), 51–60; [arXiv: math/9903094](#); Д. Звонкин, С. К. Ландо, *Функц. анализ и его прил.*, **33**:3 (1999), 21–34; S. Lando, D. Zvonkine, *Mosc. Math. J.*, **7**:1 (2007), 85–107; [arXiv: math.AG/0303218](#); S. Natanzon, V. Turaev, *Topology*, **38**:4 (1999), 889–914; I. P. Goulden, D. M. Jackson, A. Vainshtein, *Ann. Comb.*, **4**:1 (2000), 27–46; A. Okounkov, *Math. Rev. Lett.*, **7**:4 (2000), 447–453; [arXiv: math/0004128](#); A. B. Givental, *Mosc. Math. J.*, **1**:4 (2001), 551–568; [arXiv: math/0108100](#); T. Ekedahl, S. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein, *Invent. Math.*, **146**:2 (2001), 297–327; С. К. Ландо, *УМН*, **57**:3(345) (2002), 29–98; A. V. Alexeevski, S. M. Natanzon, *Selecta Math.*, **12**:3–4 (2006), 307–377; [arXiv: math.GT/0202164](#); “Hurwitz numbers for regular coverings of surfaces by seamed surfaces and Cardy–Frobenius algebras of finite groups”, *Geometry, Topology, and Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **224**, eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, AMS, Providence, RI, 2008, 1–25; A. В. Алексеевский, С. М. Натанзон, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:4 (2008), 3–24; A. В. Алексеевский, С. М. Натанзон, *УМН*, **61**:4(370) (2006), 185–186; S. M. Natanzon, *Disk single Hurwitz numbers*, [arXiv: 0804.0242](#); J. Zhou, *Hodge integrals, Hurwitz numbers and symmetric groups*, [arXiv: math.AG/0308024](#); A. Okounkov, R. Pandharipande, *Ann. Math.*, **163**:2 (2006), 517–560; [arXiv: math.AG/0204305](#); T. Graber, R. Vakil, *Compos. Math.*, **135**:1 (2003), 25–36; М. Э. Казарян, С. К. Ландо, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:5 (2004), 91–122; [arXiv: math.AG/0410388](#); *An algebro-geometric proof of Witten’s conjecture*, [arXiv: math/0601760](#); M. Kazarian, *Adv. Math.*, **221**:1 (2009), 1–21; [arXiv: 0809.3263](#); S. Lando, “Combinatorial Facets of Hurwitz numbers”, *Applications of Group Theory to Combinatorics*, eds. J. Koolen, J. H. Kwak, M.-Y. Xu, CRC Press, Boca Raton, FL, 2008, 109–132; V. Bouchard, M. Mariño, “Hurwitz numbers, matrix models and enumerative geometry”, *From Hodge Theory to Integrability and TQFT: tt*-geometry*, Proc. Sympos. Pure Math., **78**, eds. R. Y. Donagi, K. Wendland, AMS, Providence, RI, 2008, 263–283; [arXiv: 0709.1458](#); A. Mironov, A. Morozov, *JHEP*, **02** (2009), 024; [arXiv: 0807.2843](#).

- [36] A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **04** (2009), 064; [arXiv:0902.2627](#).
- [37] G. Borot, B. Eynard, M. Mulase, B. Safnuk, *A matrix model for simple Hurwitz numbers and topological recursion*, [arXiv:0906.1206](#); A. Morozov, Sh. Shakirov, *On equivalence of two Hurwitz matrix models*, [arXiv:0906.2573](#).
- [38] A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, *Complete set of cut-and-join operators in Hurwitz–Kontsevich theory*, [arXiv:0904.4227](#).
- [39] A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, *Integrability and $\mathcal{N}$ -point Hurwitz numbers*, to appear.
- [40] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Cut-and-Join operators, matrix models and characters*, to appear.
- [41] E. Brezin, D. J. Gross, *Phys. Lett. B*, **97**:1 (1980), 120–124; D. J. Gross, E. Witten, *Phys. Rev. D*, **21**:2 (1980), 446–453.
- [42] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *BGWM as the second constituent of complex matrix model*, [arXiv:0906.3305](#).
- [43] Harish-Chandra, *Amer. J. Math.*, **79**:1 (1957), 87–120; **80**:2 (1958), 241–310.
- [44] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *J. Math. Phys.*, **21**:3 (1980), 411–421; P. Zinn-Justin, J.-B. Zuber, *J. Phys. A*, **36**:12 (2003), 3173–3193; [arXiv:math-ph/0209019](#).
- [45] B. De Wit, G. 't Hooft, *Phys. Lett. B*, **69**:1 (1977), 61–64.
- [46] A. B. Givental, *Int. Math. Res. Not.*, **2001**, no 23 (2001), 1265–1286; [arXiv:math.AG/0008067](#).
- [47] H. Leutwyler, A. Smilga, *Phys. Rev. D*, **46**:12 (1992), 5607–5632; J. J. M. Verbaarschot, *Universal behavior in Dirac spectra*, [arXiv:hep-th/9710114](#); R. Brower, P. Rossi, C.-I. Tan, *Nucl. Phys. B*, **190**:4 (1981), 699–718; T. Akuzawa, M. Wadati, *J. Phys. Soc. Japan*, **67**:7 (1998), 2151–2154.
- [48] G. Frobenius, *Berlin Akad., Wiss.*, 1896, 985–1021; Ф. Г. Фробениус, *Теория характеров и представлений групп*, КомКнига, М., 2005; D. E. Littlewood, *The theory of group characters and matrix representations of groups*, Clarendon Press, Oxford, 1950; F. Murtagh, *The Theory of Group Representations*, Dover, New York, 1963; М. Хамермеш, *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*, Мир, М., 1966; И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1984; B. Simon, *Representations of Finite and Compact Groups*, Grad. Stud. Math., **10**, AMS, Providence, 1996; W. Fulton, *Young Tableaux. With applications to representation theory and geometry*, London Math. Soc. Stud. Texts, **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997; B. Sagan, *The Symmetric Group. Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, Grad. Texts Math., **203**, Springer, New York, 2001.
- [49] A. B. Balantekin, *J. Math. Phys.*, **25**:6 (1984), 2028–2030; *Phys. Rev. D*, **62**:8 (2000), 085017; [arXiv:hep-th/0007161](#).
- [50] М. А. Семенов-Тянь-Шанский, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:3 (1976), 562–592; J. J. Duistermaat, G. J. Heckman, *Invent. Math.*, **69**:2 (1982), 259–268; **72**:1 (1983), 153–158; A. Alekseev, L. Faddeev, S. Shatashvili, *J. Geom. Phys.*, **5**:3 (1988), 391–406; M. Blau, E. Keski-Vakkuri, A. Niemi, *Phys. Lett. B*, **246**:1–2 (1990), 92–98; E. Keski-Vakkuri, A. Niemi, G. Semenoff, O. Tirkkonen, *Phys. Rev. D*, **44**:12 (1991), 3899–3905; A. Hietamäki, A. Yu. Morozov, A. J. Niemi, K. Palo, *Phys. Lett. B*, **263**:3–4 (1991), 417–424; A. Yu. Morozov, A. J. Niemi, K. Palo, *Phys. Lett. B*, **271**:3–4 (1991), 365–371; *Nucl. Phys. B*, **377**:1–2 (1992), 295–338; R. J. Szabo, *Equivariant Localization of Path Integrals*, [arXiv:hep-th/9608068](#); Y. Karshon, *Lecture Notes on Group Action on Manifolds*, 1996–1997; M. Stone, *Nucl. Phys. B*, **314**:3 (1989), 557–586.
- [51] A. Losev, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Nucl. Phys. B*, **534**:3 (1998), 549–611; [arXiv:hep-th/9711108](#); *The Freckled instantons*, [arXiv:hep-th/9908204](#); *Class. Quant. Grav.*, **17**:5 (2000), 1181–1187; [arXiv:hep-th/9911099](#); N. A. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7**:5 (2003), 831–864; [arXiv:hep-th/0206161](#); R. Flume, R. Poghossian, *Internat.*

- J. Modern Phys. A*, **18**:14 (2003), 2541–2563; [arXiv: hep-th/0208176](#); E. Frenkel, A. Losev, N. Nekrasov, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, **171** (2007), 215–230; [arXiv: hep-th/0702137](#).
- [52] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52; Erratum, **430** (1994), 485–486; [arXiv: hep-th/9407087](#); A. Gorsky, I. M. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **355**:3–4 (1995), 466–474; [arXiv: hep-th/9505035](#); R. Donagi, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **460**:2 (1996), 299–334; [arXiv: hep-th/9510101](#); E. J. Martinec, *Phys. Lett. B*, **367**:1–4 (1996), 91–96; [arXiv: hep-th/9510204](#); A. Gorsky, A. Marshakov, *Phys. Lett. B*, **375**:1–4 (1996), 127–134; [arXiv: hep-th/9510224](#); H. Itoyama, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **477**:3 (1996), 855–877; [arXiv: hep-th/9601168](#); **491**:3 (1997), 529–573; [arXiv: hep-th/9512161](#); N. Nekrasov, *Nucl. Phys. B*, **531**:1–3 (1998), 323–344; [arXiv: hep-th/9609219](#); A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **389**:1 (1996), 43–52; [arXiv: hep-th/9607109](#); *Modern Phys. Lett. A*, **12**:11 (1997), 773–787; [arXiv: hep-th/9701014](#); *Internat. J. Modern Phys. A*, **15**:8 (2000), 1157–1206; [arXiv: hep-th/9701123](#); H. W. Braden, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **448**:3–4 (1999), 195–202; [arXiv: hep-th/9812078](#); *Nucl. Phys. B*, **558**:1–2 (1999), 371–390; [arXiv: hep-th/9902205](#); *Acta Appl. Math.*, **99**:3 (2007), 223–244; [arXiv: hep-th/0606035](#); A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **380**:1–2 (1996), 75–80; *A note on spectral curve for the periodic homogeneous XYZ-spin chain*, [arXiv: hep-th/9604078](#); *Nucl. Phys. B*, **527**:3 (1998), 690–716; [arXiv: hep-th/9802007](#).
- [53] F. Calogero, *J. Math. Phys.*, **10**:12 (1969), 2191–2196; **12**:3 (1971), 419–436; C. F. Dunkl, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **311**:1 (1989), 167–183; *Canad. J. Math.*, **43**:6 (1991), 1213–1227; Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Алгебра и анализ*, **1**:1 (1989), 178–206; A. Alekseev, S. Shatashvili, *Nucl. Phys. B*, **323**:3 (1989), 719–733; A. Gorsky, N. Nekrasov, *Nucl. Phys. B*, **414**:1–2 (1994), 213–238; [arXiv: hep-th/9304047](#); **436**:3 (1995), 582–608; [arXiv: hep-th/9401017](#); P. Etingof, I. B. Frenkel, A. A. Kirillov Jr., *Duke Math. J.*, **80**:1 (1995), 59–90; [arXiv: hep-th/9407047](#); A. Gerasimov, S. Kharchev, A. Morozov, M. Olshanetsky, A. Marshakov, A. Mironov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **12**:14 (1997), 2523–2583; [arXiv: hep-th/9601161](#); P. Etingof, *Lectures on Calogero–Moser systems*, [arXiv: math/0606233](#).
- [54] V. V. Dolotin, *On discriminants of polylinear forms*, [arXiv: alg-geom/9511010](#); A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **12** (2009), 002; [arXiv: 0903.2595](#); K. Fujii, *Beyond Gaussian: a comment*, [arXiv: 0905.1363](#).
- [55] I. M. Gel’fand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Math. Theory Appl., Birkhäuser, Boston, MA, 1994; V. Dolotin, A. Morozov, *Introduction to Non-Linear Algebra*, World Sci., Hackensack, NJ, 2007; [arXiv: hep-th/0609022](#); *The Universal Mandelbrot Set. Beginning of the Story*, World Sci., Hackensack, NJ, 2006; *Algebraic Geometry of Discrete Dynamics. The case of one variable*, [arXiv: hep-th/0501235](#); *Internat. J. Modern Phys. A*, **23**:22 (2008), 3613–3684; [arXiv: hep-th/0701234](#); E. T. Akhmedov, V. Dolotin, A. Morozov, *Письма в ЖЭТФ*, **81**:12 (2005), 776–779; [arXiv: hep-th/0504160](#); А. Ю. Морозов, М. Н. Сербин, *ТМФ*, **154**:2 (2008), 316–343; V. Dolotin, A. Morozov, Sh. Shakirov, *A-infinity-structure on simplicial complexes*, [arXiv: 0704.2609](#); *Phys. Lett. B*, **651**:1 (2007), 71–73; [arXiv: 0704.2884](#); A. Morozov, *Письма в ЖЭТФ*, **86**:11 (2007), 856–859; A. Morozov, Sh. Shakirov, *Analogue of the identity Log Det=Trace Log for resultants*, [arXiv: 0804.4632](#); *Resultants and contour integrals*, [arXiv: 0807.4539](#); A. С. Анохина, А. Ю. Морозов, Ш. П. Шакиров, *ТМФ*, **160**:3 (2009), 403–433; [arXiv: 0812.5013](#).
- [56] Y. Nambu, *Phys. Rev. D*, **7**:8 (1973), 2405–2412; В. Т. Филиппов, *Сиб. матем. журн.*, **26**:6 (1985), 126–140; L. Takhtajan, *Comm. Math. Phys.*, **160**:2 (1994), 295–315; [arXiv: hep-th/9301111](#); J. Hoppe, *Helv. Phys. Acta*, **70**:1–2 (1997), 302–317; [arXiv:](#)

- hep-th/9602020; H. Awata, M. Li, D. Minic, T. Yoneya, *JHEP*, **02** (2001), 013; arXiv: hep-th/9906248; J. Schwarz, *JHEP*, **11** (2004), 078; arXiv: hep-th/0411077; A. Basu, J. A. Harvey, *Nucl. Phys. B*, **713**:1–3 (2005), 136–150; arXiv: hep-th/0412310; J. Bagger, N. Lambert, *Phys. Rev. D*, **75**:4 (2007), 045020; arXiv: hep-th/0611108; **77**:6 (2008), 065008; arXiv: 0711.0955; **79**:2 (2009), 025002; arXiv: 0807.0163; *JHEP*, **02** (2008), 105; arXiv: 0712.3738; A. Gustavsson, *Nucl. Phys. B*, **811**:1–2 (2009), 66–76; arXiv: 0709.1260; *JHEP*, **04** (2008), 083; arXiv: 0802.3456; S. Mukhi, C. Papageorgakis, *JHEP*, **5** (2008), 085; arXiv: 0803.3218; M. A. Bandres, A. E. Lipstein, J. H. Schwarz, *JHEP*, **05** (2008), 025; arXiv: 0803.3242; A. Morozov, *JHEP*, **05** (2008), 076; arXiv: 0804.0913; *Письма в ЖЭТФ*, **87**:12 (2008), 759–762; arXiv: 0805.1703; J. Gomis, G. Milanesi, J. G. Russo, *JHEP*, **06** (2008), 075; arXiv: 0805.1012; S. Benvenuti, D. Rodríguez-Gómez, E. Tonni, H. Verlinde, *JHEP*, **01** (2009), 078; arXiv: 0805.1087; P.-M. Ho, Y. Imamura, Y. Matsuo, *JHEP*, **07** (2008), 003; arXiv: 0805.1202; O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis, J. Maldacena, *JHEP*, **10** (2008), 091; arXiv: 0806.1218; I. A. Bandos, P. K. Townsend, *Class. Quant. Grav.*, **25**:24 (2008), 245003; arXiv: 0806.4777; *JHEP*, **02** (2009), 013; arXiv: 0808.1583; J. Gomis, D. Rodríguez-Gómez, M. Van Raamsdonk, H. Verlinde, *JHEP*, **09** (2008), 113; arXiv: 0807.1074; J. A. Minahan, W. Schulgin, K. Zarembo, *JHEP*, **03** (2009), 057; arXiv: 0901.1142; J. Figueroa-O’Farrill, *Deformations of 3-algebras*, arXiv: 0903.4871; D. Kamani, *Evidence for the $p + 1$ -algebra for super- p -brane*, arXiv: 0904.2721.
- [57] B. Schlittgen, T. Wettig, *J. Phys. A*, **36**:12 (2003), 3195–3201; arXiv: math-ph/0209030.
- [58] C. Lehner, T. Wettig, T. Guhr, Y. Wei, *J. Math. Phys.*, **49**:6 (2008), 063510; arXiv: 0801.1226.
- [59] Ф. А. Березин, Ф. И. Карпелевич, *ДАН СССР*, **118**:1 (1958), 9–12; T. Guhr, T. Wettig, *J. Math. Phys.*, **37**:12 (1996), 6395–6413; A. D. Jackson, M. K. Şener, J. J. M. Verbaarschot, *Phys. Lett. B*, **387**:2 (1996), 355–360.
- [60] R. Dijkgraaf, E. Witten, *Comm. Math. Phys.*, **129**:2 (1990), 393–429.
- [61] А. Ю. Морозов, *ВФД*, **162**:8 (1992), 83–175.
- [62] M. Jimbo, T. Miwa, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, **19**:3 (1983), 943–1001; K. Ueno, K. Takasaki, “Toda lattice hierarchy”, *Group Representations and Systems of Differential Equations*, Adv. Stud. Pure Math., **4**, ed. K. Okamoto, North-Holland, Amsterdam, 1984, 1–95; A. Morozov, L. Vinet, *Internat. J. Modern Phys. A*, **13**:10 (1998), 1651–1707; arXiv: hep-th/9409093; А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, Л. Винэ, *ТМФ*, **100**:1 (1994), 119–131; arXiv: hep-th/9312213; A. Gerasimov, S. Khoroshkin, D. Lebedev, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:18 (1995), 2589–2614; arXiv: hep-th/9405011; S. Kharchev, A. Mironov, A. Morozov, *ТМФ*, **104**:1 (1995), 129–143; arXiv: q-alg/9501013; A. Mironov, “Quantum deformations of τ -functions, bilinear identities and representation theory”, *Symmetries and Integrability of Difference Equations*, CRM Proc. Lecture Notes, **9**, eds. D. Levi, L. Vinet, P. Winternitz, AMS, Providence, RI, 1996, 219–237; arXiv: hep-th/9409190; А. Д. Миронов, *ТМФ*, **114**:2 (1998), 163–232; arXiv: q-alg/9711006.

Поступила в редакцию 8.07.2009