Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. де Альфаро, А. Т. Филиппов, Мультиэкспоненциальные модели $(1 + 1)$ -мерной дилатонной гравитации и интегрируемые модели Тоды–Лиувилля, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 1, 41–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6454>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 03:15:38

© 2010 г.

В. де Альфаро*, А. Т. Филиппов†

МУЛЬТИЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ (1 + 1)-МЕРНОЙ ДИЛАТОННОЙ ГРАВИТАЦИИ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ТОДЫ–ЛИУВИЛЛЯ

Исследуются общие свойства класса двумерных теорий дилатонной гравитации с потенциалами, содержащими несколько экспоненциальных членов. Выделен и детально исследуется подкласс таких теорий, в котором уравнения движения сводятся к уравнениям Тоды и Лиувилля. Показано, что параметры, от которых зависят уравнения, должны удовлетворять некоторому ограничению, которое удастся найти и разрешить для наиболее общей мультиэкспоненциальной модели. Из этого ограничения следует, что в теориях дилатонной гравитации интегрируемые уравнения Тоды, вообще говоря, не могут появиться без сопровождающих уравнений Лиувилля.

Наиболее трудной проблемой двумерной дилатонной гравитации Тоды–Лиувилля оказывается задача разрешения связей, налагаемых на энергию и импульс. Эта задача обсуждена на простейших примерах и выявлены главные препятствия, не позволяющие построить ее общие аналитические решения. Затем рассматривается подкласс интегрируемых двумерных теорий, в которых скалярные поля материи удовлетворяют уравнениям Тоды, а двумерная метрика тривиальна. Наиболее простой случай рассмотрен детально, и на его примере показано, как можно построить решение в общем случае.

Также показано, как можно достаточно просто построить волноподобные решения общей системы Тоды–Лиувилля. В теории дилатонной гравитации эти решения описывают нелинейные волны, взаимодействующие с гравитацией, а также статические решения и космологии. В случае статических решений и космологий предложена и исследована более общая одномерная модель Тоды–Лиувилля, обычно возникающая в одномерных редукциях многомерных теорий гравитации и супергравитации. Особое внимание уделяется тому, чтобы явные решения уравнений Тоды имели наиболее простую и прозрачную аналитическую структуру.

Ключевые слова: дилатонная гравитация, интегрируемые модели, уравнения Тоды, уравнение Лиувилля.

---

*Dipartimento di Fisica Teorica, INFN, Accademia Scienze, Torino, Italy.
E-mail: vda@to.infn.it

†Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: Alexandre.Filippov@jinr.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что теории $(1+1)$ -мерной дилатонной гравитации (ДГ), взаимодействующей со скалярными полями материи, представляют собой достаточно надежные модельные теории при исследовании различных вопросов динамики черных дыр, космологических моделей и волн. Связь между высшими и низшими размерностями была продемонстрирована на уровне различных подходов к гравитации и струнной теории, и в некоторых случаях эта связь позволила построить общие или специальные классы решений многомерных теорий¹⁾. Наиболее общий пример – сферически-симметричная модель гравитации, взаимодействующей с абелевыми калибровочными полями и скалярными полями материи. Ее можно в точности преобразовать к теории $(1+1)$ -мерной ДГ, и она допускает точное решение в случае постоянных скалярных полей, не зависящих от координат²⁾. Такие решения описывают интересные физические объекты – сферически-симметричные черные дыры и простейшие космологии. Однако в важном для космологических приложений случае, когда скалярные поля имеют более сложную зависимость, известно не так уж много точных аналитических решений³⁾. Соответственно двумерные модели ДГ, которые нетривиально взаимодействуют со скалярными полями материи, обычно оказываются неинтегрируемыми.

Для того чтобы все-таки построить интегрируемую модель такого типа, придется использовать серьезные приближения, другими словами, деформировать исходную двумерную модель, полученную прямыми размерностными редукциями из реалистичной многомерной теории. Тем не менее такая деформированная модель может качественно верно описывать некоторые физически значимые решения теорий гравитации или супергравитации в старших размерностях, связанные с низкоэнергетическим пределом теорий суперструн. Заметим, что некоторые важные четырехмерные многообразия пространства-времени с симметриями, задаваемыми двумя коммутирующими векторами Киллинга, могут быть также описаны двумерными моделями ДГ, взаимодействующими со скалярными полями материи. Например, цилиндрические гравитационные волны можно описать $(1+1)$ -мерной ДГ, взаимодействующей с одним скалярным полем [22], [29]–[31]. Статическая осесимметричная чисто гравитационная система [11], [32] эквивалентна $(0+2)$ -мерной ДГ, взаимодействующей с одним скалярным полем. Аналогичные, но более общие модели ДГ возникали в струнной теории. Некоторые из них могут быть решены с использованием современного математического аппарата солитонной теории (см., например, работы [1], [2], [11], [19]). Заметим, что теории в размерности $1+0$ (космологии) и $0+1$ (статические состояния и, в частности, черные дыры) также могут оказаться интегрируемыми, несмотря на то что порождающая их $(1+1)$ -теория может быть неинтегрируемой (если не рассматривать деформации; см. пример в работе [23]).

¹⁾Более детальное описание этой связи, ссылки по теме и решения для некоторых интегрируемых двух- и одномерных моделей ДГ содержатся, например, в работах [1]–[28].

²⁾Это невозможно при произвольной зависимости потенциалов от скалярных полей, как будет ясно из дальнейшего.

³⁾См., например, работы [8], [11], [12], [17]–[23]; относительно обзора достижений и дополнительной литературы см. работы [23], [26], [27].

В наших предыдущих статьях (см., например, работы [20]–[23] и библиографию к ним) были построены и исследованы некоторые явно интегрируемые модели, основанные на уравнении Лиувилля. Недавно были предприняты попытки найти решения некоторых реалистических моделей двумерной ДГ (полученной из гравитационных теорий старших размерностей с помощью размерной редукции) с применением обобщения метода разделения переменных, введенного в работах [21], [22]. Эти попытки показали, что естественные на первый взгляд замены переменных, оказавшиеся полезными в ранее исследованных интегрируемых системах, не дают достаточно интересных решений (“нулевое” приближение теории возмущений) для реалистических неинтегрируемых моделей. Поэтому в работе [24] было начато исследование более сложных моделей ДГ, основанных на двумерных цепочках Тоды.

На первый взгляд кажется, что должно быть не так уж и трудно найти потенциал теории ДГ, который имел бы интегрируемые уравнения Тоды в качестве уравнений движения. На самом деле это не совсем так, поскольку теория Тоды может появляться лишь в совокупности с теорией Лиувилля (это было отмечено в подстрочном примечании в работе [24]). В действительности даже теория N -Лиувилля удовлетворяет такому же ограничению. Это было известно авторам уже давно, но смысл этого обстоятельства не был понят в должной мере.

В данной работе вводится общая *мультиэкспоненциальная ДГ*⁴⁾, а уравнения движения представлены в виде, напоминающем уравнения Тоды. В дополнение к этим уравнениям в теории ДГ должны выполняться еще два уравнения, называемых в общей теории относительности связями энергии и импульса. В теории N -Лиувилля эти связи были решены явно, но их разрешение в общем случае оказывается намного более сложной задачей, которая обсуждается в разделе 4 настоящей работы.

Раздел 3 посвящен задаче реконструкции ДГ, в которой уравнения движения имеют вид

$$\partial_u \partial_v x_m = g_m e^{\sum_n A_{mn} x_n}. \quad (1)$$

Эта задача сводится к нахождению матрицы $\hat{a}$, удовлетворяющей матричному уравнению⁵⁾ $\hat{a}^T \hat{a} = \hat{A}$ ($\hat{\epsilon}$ – диагональная матрица, вводимая ниже). Это уравнение, очевидно, допускает много решений для заданной матрицы $\hat{A}$ (если $\hat{a}$ – любое решение, то $\hat{O}\hat{a}$ есть другое решение при условии, что $\hat{O}^T \hat{\epsilon} \hat{O} = 1$). Важно, что решение невозможно получить в случае произвольной симметричной матрицы $\hat{A}^T = \hat{A}$. В разделе 3 устанавливается класс “решаемых” матриц $\hat{A}$ (удовлетворяющих А-условию) и вводится рекурсивная процедура, позволяющая найти все возможные решения для любой из матриц, удовлетворяющих А-условию. В приложении 2 приводится общее решение А-условия для матрицы A_{mn} , задаваемой прямой суммой диагональной $(L \times L)$ -матрицы и произвольной симметричной матрицы (теория N -Лиувилля плюс мультиэкспоненциальная модель).

⁴⁾Группы внутренних симметрий и условий интегрируемости двумерных динамических систем с экспоненциальными членами в правых частях исследовались в работах [33]–[35]. Общее обсуждение вопроса и более полный обзор литературы приведены в работах [36], [37]. В этих работах в основном были исследованы математические вопросы, но некоторые классы рассматриваемых интегрируемых уравнений и теоретико-групповые методы, разработанные для их решения, могут быть интересны с точки зрения приложений к ДГ.

⁵⁾Назовем его А-уравнением или А-условием.

Матрицы Картана для простых групп Ли не удовлетворяют А-условию, а потому ДГ общего вида не сводится к уравнениям Тоды⁶⁾. Тем не менее, добавляя по крайней мере одно уравнение Лиувилля к системе Тоды (при этом получится система Тоды–Лиувилля (СТЛ)), это условие можно разрешить, и в разделе 4 вводится простейшая форма решения СТЛ в случае матриц Картана A_n . В дополнение к этим стандартным решениям можно построить волноподобные решения, схожие с решениями, полученными ранее для модели N -Лиувилля. Связи энергии-импульса для этих решений можно сравнительно легко удовлетворить. В приложении 3 показывается, что эти связи в случае решения общего вида в простейшей модели $A_1 \oplus A_2$ имеют тот же самый вид, но этого не достаточно для их решения (что следует из результата приложения 2).

В разделе 5 рассматривается простейший класс моделей ДГ, основанных на уравнениях Тоды, который может быть полностью решен (включая связи энергии-импульса). Если предположить, что потенциал V не зависит от дилатонного поля φ (т.е. $V_\varphi = 0$), то метрика оказывается плоской (в метрике Вейля), и связи можно разрешить, если только удастся решить уравнения для скалярных полей. Для уравнений Тоды, которые в данном случае не обязаны сопровождаться уравнениями Лиувилля, получаем общее решение. Эта модель на самом деле представляет собой существенное обобщение хорошо известной модели Каллана–Гиддингса–Харви–Стромингера (КГХС) [8], и ее можно решить явно (хотя свойства решения оказываются существенно более сложными, чем в случае модели КГХС).

Раздел 6 посвящен исследованию реалистических одномерных моделей Тоды–Лиувилля для космологий и статических состояний (например, черных дыр), которые можно получить из теорий гравитации и супергравитации в старших размерностях. Модели этого типа известны уже более десяти лет, но, по всей видимости, связь с СТЛ не была установлена ранее. В данной работе дается полное описание этой связи с помощью соответствующего обобщения А-условия.

Наконец, в разделе 7 подводится итог работы в более формальном виде и указываются нерешенные задачи и возможные применения в теории черных дыр, космологий и гравитационных волн.

2. МУЛЬТИЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ $(1+1)$ -МЕРНОЙ ДГ С МИНИМАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ СО СКАЛЯРНЫМИ ПОЛЯМИ МАТЕРИИ

Эффективный Лагранжиан $(1+1)$ -мерной ДГ, взаимодействующей со скалярными полями ψ_n , который получается с помощью размерной редукции из сферически-симметричной теории (супер)гравитации в старших размерностях, обычно можно (локально) преобразовать к виду

$$\mathcal{L}^{(2)} = \sqrt{-g} \left[\varphi R(g) + V(\varphi, \psi) + \sum_{m,n} Z_{mn}(\varphi, \psi) g^{ij} \partial_i \psi_m \partial_j \psi_n \right] \quad (2)$$

⁶⁾В силу А-уравнения матрица A_{mn} в уравнении (1) должна быть симметричной. В случае, когда матрицы Картана несимметричны, уравнение (1) зависит от симметризованных матриц (см. приложение 1).

(относительно детального обоснования и примеров см. работы [20]–[23]). В уравнении (2) $g_{ij}(x^0, x^1)$ представляет собой метрику $(1+1)$ -мерного пространства с сигнатурой $(-1, 1)$, $g \equiv \det(g_{ij})$, а R – кривизна Риччи двумерного пространства-времени с метрикой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 0, 1. \quad (3)$$

Эффективные потенциалы V и Z_{mn} зависят от дилатонного поля $\varphi(x^0, x^1)$ и от $N-2$ скалярных полей $\psi_n(x^0, x^1)$ (заметим, что матрица Z_{mn} должна быть отрицательно определена, для того чтобы исключить так называемые “фантомные” поля). Эти скалярные поля могут зависеть от других параметров, задающих порождающую многомерную теорию (например, от зарядов, возникающих при решении уравнений для абелевых полей). Рассмотрим наиболее простые возможные кинетические члены с диагональными и постоянными Z -потенциалами $Z_{mn}(\varphi, \psi) = \delta_{mn} Z_n$ ⁷⁾. Это приближение не позволяет рассматривать важный класс полей материи типа полей сигма-моделей, обсуждаемый, например, в работе [28]; такие модели могут оказаться интегрируемыми, если $V \equiv 0$ и потенциалы $Z_{mn}(\varphi, \psi)$ удовлетворяют определенным весьма жестким условиям. Также в формуле (2) было применено преобразование Вейля для устранения градиентного члена дилатонного поля. Для упрощения вычислений запишем уравнения движения в метрике светового конуса (называемой также конформной метрикой):

$$ds^2 = -4f(u, v) du dv.$$

Варьируя лагранжиан сначала по общим координатам, а затем переходя к координатам светового конуса, получим уравнения движения (при постоянных Z_n):

$$\partial_u \partial_v \varphi + fV(\varphi, \psi) = 0, \quad (4)$$

$$f \partial_i \left(\frac{\partial_i \varphi}{f} \right) = \sum Z_n (\partial_i \psi_n)^2, \quad i = u, v, \quad (5)$$

$$2Z_n \partial_u \partial_v \psi_n + fV_{\psi_n}(\varphi, \psi) = 0, \quad (6)$$

$$\partial_u \partial_v \ln |f| + fV_\varphi(\varphi, \psi) = 0, \quad (7)$$

где $V_\varphi \equiv \partial_\varphi V$, $V_{\psi_n} \equiv \partial_{\psi_n} V$. Эти уравнения не независимы. В самом деле, уравнение (7) следует из уравнений (4)–(6). Если же выполняются уравнения (4), (5) и (7), то будет выполнено и уравнение (6). Заметим, что эти уравнения могут допускать решение с $\psi_n = \psi_n^{(0)} = \text{const}$ только в том случае, когда $V_{\psi_n}(\varphi, \psi_n^{(0)}) \equiv 0$.

В некоторых случаях потенциалы в лагранжианах (2), полученных из теории в старших размерностях, задаются суммой экспоненциальных членов от линейных комбинаций скалярных полей и поля дилатона φ ⁸⁾. В нашей предшествующей работе [23] исследовалась модель поля Лиувилля со связями, в которой система уравнений движения (4), (6) и (7) эквивалентна системе независимых уравнений Лиувилля

⁷⁾В разделе 6 к лагранжиану (2) с простейшим ψ -взаимодействием добавляются определенные поля σ , Z -потенциалы которых зависят от φ и ψ , но не зависят от σ (см., например, работу [23]).

⁸⁾В общем случае потенциал V содержит также и члены, зависящие от φ неэкспоненциально (например линейные по полю φ), и тогда “поднятие” их в экспоненту оказывается только лишь приближением (см. обсуждение в работе [23]).

для линейных комбинаций полей $q_n \equiv F + q_n^{(0)}$, где $F \equiv \ln |f|$. Легко получаемые решения этих уравнений должны удовлетворять связям (5), что и представляет собой наиболее сложную часть задачи. Решение задачи в целом вскрывает интересную структуру пространств модулей решений, с помощью которой можно сравнительно легко выделить статические, космологические и волноподобные решения и эффективно включить эти по существу одномерные (в некотором широком смысле) решения в набор всех двумерных решений и исследовать их аналитические и асимптотические свойства.

Здесь предлагается естественное обобщение модели Лиувилля на случай, когда поля описываются уравнениями Тоды (или же их неинтегрируемыми деформациями). Для того чтобы показать, что эта модель обладает многими общими свойствами с моделью Лиувилля, и упростить переход от интегрируемых моделей к неинтегрируемым теориям, мы предлагаем другое представление решений уравнений Тоды, которое не связано напрямую с их теоретико-групповым происхождением (см. раздел 4).

Рассмотрим теорию, задаваемую лагранжианом (2) с потенциалом

$$V = \sum_{n=1}^N 2g_n e^{q_n^{(0)}}, \quad q_n^{(0)} \equiv a_n \varphi + \sum_{m=3}^N \psi_m a_{mn}, \quad (8)$$

и с $Z_{mn}(\varphi, \psi) = -\delta_{mn}$. В дальнейшем будут также использоваться поля

$$q_n \equiv F + q_n^{(0)} \equiv \sum_{m=1}^N \psi_m a_{mn}, \quad (9)$$

где $\psi_1 + \psi_2 \equiv \ln |f| \equiv F$, $\psi_1 - \psi_2 \equiv \varphi$ и, следовательно, $a_{1n} = 1 + a_n$, $a_{2n} = 1 - a_n$.

Перепишав уравнения движения в терминах ψ_n , найдем, что уравнения (4)–(7) эквивалентны N уравнениям движения для N функций ψ_n (ε обозначает знак метрики f):

$$\partial_u \partial_v \psi_n = \varepsilon \sum_{m=1}^N \epsilon_n a_{nm} g_m e^{q_m}, \quad \epsilon_1 = -1, \quad \epsilon_n = +1 \quad \text{при } n \geq 2, \quad (10)$$

и двум условиям связи

$$C_i \equiv \partial_i^2 \varphi + \sum_{n=1}^N \epsilon_n (\partial_i \psi_n)^2 = 0, \quad i = u, v. \quad (11)$$

При произвольных параметрах a_{nm} эти уравнения движения неинтегрируемы. Тем не менее, как было предложено в работах [16]–[18], [20], [23], уравнения (10) становятся интегрируемыми, а связи (11) можно разрешить, если N -компонентные векторы $v_n \equiv (a_{mn})$ псевдоортогональны.

Рассмотрим теперь более общие невырожденные матрицы a_{mn} и определим новые скалярные поля x_n :

$$x_n \equiv \sum_{m=1}^N a_{nm}^{-1} \epsilon_m \psi_m, \quad \psi_n \equiv \sum_{m=1}^N \epsilon_n a_{nm} x_m. \quad (12)$$

В терминах этих полей уравнения (10) имеют вид

$$\partial_u \partial_v x_m \equiv \varepsilon g_m \exp \sum_{k,n=1}^N \epsilon_n a_{nm} a_{nk} x_k \equiv \varepsilon g_m \exp \sum_{k=1}^N A_{mk} x_k, \quad (13)$$

и мы видим, что симметричная матрица

$$\hat{A} \equiv \hat{a}^T \hat{a}, \quad \epsilon_{mn} \equiv \epsilon_m \delta_{mn}, \quad (14)$$

определяет основные свойства модели.

Если $\hat{A}$ – диагональная матрица, то мы возвращаемся к случаю модели N -Лиувилля. Если бы $\hat{A}$ была матрицей Картана для простой алгебры Ли, то система (13) совпадала бы с соответствующей системой Тоды, которая интегрируема и может быть более или менее явно решена (см., например, работы [36], [37]). Однако в разделе 3 показано, что матрицы Картана для простых алгебр Ли (симметризованные, когда это необходимо) не могут быть представлены в виде (14). Тем не менее достаточно простое расширение уравнений Тоды, получаемое при добавлении одного или нескольких уравнений Лиувилля, помогает разрешить эту проблему. Действительно, симметричная матрица A_{mn} , которая представляет собой прямую сумму диагональной $(L \times L)$ -матрицы $\gamma_n^{-1} \delta_{mn}$ и произвольной симметричной матрицы $\bar{A}_{mn}$, может быть записана в виде (14), если сумма γ_n^{-1} представляет собой определенную функцию от матричных элементов $\bar{A}_{mn}$. Если $\bar{A}_{mn}$ – матрица Картана, то система (13) сводится к L независимым уравнениям Лиувилля ($\mathcal{A}_1$ Тоды) и к системе Тоды высшего ранга (СТЛ).

Решение СТЛ может быть получено различными способами. Наиболее общий способ задается теоретико-групповым построением, описанным в работах [36], [37]. В разделе 4 данной работы приведен аналитический метод, который может быть напрямую применен к решению $\mathcal{A}_N$ СТЛ, предложенной в работе [24]. К сожалению, история не заканчивается построением решений уравнений движения. После того как эти уравнения решены, на уже построенные решения следует наложить связи, чтобы обеспечить выполнение условия обращения в нуль энергии и импульса (11), которые в переменных x_n имеют следующий вид:

$$-C_i \equiv 2 \sum_{n=1}^N \partial_i^2 x_n - \sum_{n,m=1}^N \partial_i x_m A_{mn} \partial_i x_n = 0, \quad i = u, v. \quad (15)$$

В модели N -Лиувилля наиболее сложной задачей оказалось именно выполнение условий (15), но эта задача была в конце концов решена. В общем неинтегрируемом случае произвольной матрицы $\hat{A}$ не известно даже, как подбаться к этой задаче. Случай СТЛ обсуждается ниже⁹⁾.

Чтобы исследовать общие свойства решений уравнений (13) и связей (15), перепишем сначала общие уравнения в виде, который оказывается особенно полезным в

⁹⁾В разделе 5 вводится упрощенная тодовская модель ДГ, которая оказывается полностью решаемой, включая условия связи.

случае СТЛ. Вводя обозначения

$$X_n \equiv e^{-A_{nn}x_n/2}, \quad \Delta_2(X) \equiv X\partial_u\partial_vX - \partial_uX\partial_vX, \quad \alpha_{mn} \equiv -2\frac{A_{mn}}{A_{nn}}, \quad (16)$$

уравнения (13) легко представить в виде

$$\Delta_2(X_n) = -\frac{1}{2}\varepsilon g_n A_{nn} \prod_{m \neq n} X_m^{\alpha_{nm}}. \quad (17)$$

Множитель $|\varepsilon g_n A_{nn}/2|$ можно удалить с помощью преобразования $x_n \mapsto x_n + \delta_n$, и окончательный (стандартный) вид уравнений движения будет таким:

$$\Delta_2(X_n) = \varepsilon_n \prod_{m \neq n} X_m^{\alpha_{nm}}, \quad \varepsilon_n \equiv \pm 1. \quad (18)$$

Эти уравнения в общем случае не интегрируются. Однако если A_{mn} – матрицы Тоды–Лиувилля (ТЛ), то существуют различные методы их интегрирования (см. книгу [36]). Диагональная составляющая при этом отвечает полю Лиувилля, а недиагональная – уравнениям Тоды. Например, для матрицы Картана алгебры $\mathcal{A}_N$ отличны от нуля только элементы α_{mn} , соседние с главной диагональю $\alpha_{n+1,n-1} = \alpha_{n-1,n+1} = 1$. При этом уравнение (18) можно решить при произвольном N . Параметры α_{mn} инвариантны относительно преобразований $x_n \mapsto \lambda_n x_n + \delta_n$. Это означает, что несимметричные матрицы Картана для алгебр $\mathcal{B}_N$, $\mathcal{C}_N$, $\mathcal{G}_2$ и $\mathcal{F}_4$ можно симметризовать без изменения уравнений. В этом смысле параметры α_{mn} оказываются фундаментальными параметрами уравнений движения. С этой точки зрения основным свойством матриц Картана оказывается простота уравнений (18), которая позволяет решить их с помощью обобщенного метода разделения переменных. Как хорошо известно, в случае, когда A_{mn} представляет собой матрицу Картана произвольной простой алгебры, эта процедура задает точное общее решение [36]. В разделе 4 будет показано, как можно построить точное общее решение системы Тоды для алгебры $\mathcal{A}_N$ и записать удобное представление для решения общего вида, которое отличается от стандартного решения, приведенного в книге [36].

К сожалению, как отмечено выше, построения одного лишь решения уравнений (18) еще недостаточно для нахождения решения задачи в целом. Необходимо также разрешить связи (15), что представляет собой намного более сложную задачу. В наших предыдущих работах эти связи были решены в случае теории N -Лиувилля. Поэтому мы постараемся сформулировать задачу о связях в теории ТЛ в виде, наиболее близком к ее виду в теории N -Лиувилля. Прежде всего, нетрудно показать, что $\partial_v C_u = \partial_u C_v = 0$, а потому $C_u = C_u(u)$, $C_v = C_v(v)$, как и в случае модели Лиувилля. Для доказательства достаточно продифференцировать (15) и применить формулу (13), чтобы избавиться от зависимости от $\partial_u\partial_v x_m$ и $\partial_u\partial_v x_n$.

До этого момента рассматривалась произвольная симметричная матрица $\hat{A}$. Используем теперь информацию относительно детального вида A_{mn} и структуры решения. Чтобы понять, можно ли решить связи, перепишем их сначала в терминах X_n , а затем рассмотрим матрицы ТЛ и явное решение уравнений. Нетрудно

увидеть, что связи (15) можно представить в виде ($i = u, v$, а штрих обозначает ∂_i)

$$\frac{1}{4} C_i = \sum_{n=1}^N \gamma_n \frac{X_n''}{X_n} + \sum_{m < n}^N \frac{2A_{mn}}{A_m A_n} \frac{X_m'}{X_m} \frac{X_n'}{X_n}, \quad \gamma_n \equiv A_n^{-1}. \quad (19)$$

Первое слагаемое имеет точно такой же вид, что и в модели N -Лиувилля. Но в случае полей Лиувилля также имеют место уравнения

$$\partial_u (X_n^{-1} \partial_v^2 X_n) = 0, \quad \partial_v (X_n^{-1} \partial_u^2 X_n) = 0, \quad (20)$$

которые не выполняются в общем случае. Более того, первый и второй члены в правых частях уравнений (19) в общем случае не являются функциями только лишь от одного переменного (выше было доказано только, что $C_u = C_u(u)$ и $C_v = C_v(v)$).

Тем не менее попытаемся, насколько возможно, действовать по аналогии со случаем модели Лиувилля, по крайней мере в случае интегрируемой модели ТЛ. Поэтому предположим, что первые N_1 уравнений оказываются уравнениями Тоды, а оставшиеся $N_2 = N - N_1$ уравнений – уравнениями Лиувилля. Отсюда имеем $A_{mn} = \tilde{A}_{mn}$, $1 \leq m, n \leq N_1$, где $\tilde{A}_{mn}$ – матрица Картана, в то время как при $N_1 + 1 \leq m, n \leq N$ имеем $A_{mn} = \delta_{mn} A_n$. Тогда связи распадаются на зависящие от полей Тоды и полей Лиувилля ($X' \equiv \partial_i X$):

$$\frac{1}{4} C_i = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{1}{A_n} \frac{X_n''}{X_n} + \sum_{m < n}^{N_1} \frac{2A_{mn}}{A_m A_n} \frac{X_m'}{X_m} \frac{X_n'}{X_n} + \sum_{n=N_1+1}^N \gamma_n \frac{Y_n''}{Y_n}. \quad (21)$$

Эти части существенно различны: прежде всего, решения Лиувилля Y_n при $n \geq N_1 + 1$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям второго порядка, а решения системы Тоды X_n удовлетворяют дифференциальным уравнениям старших порядков (см. раздел 4). В общем случае системы Тоды $\mathcal{A}_N$ решение X_1 может быть записано в виде

$$X_1 = \sum_{i=1}^{N+1} a_i(u) b_i(v), \quad X_2 = \varepsilon_1 \Delta_2(X_1), \quad (22)$$

в то время как в случае системы Лиувилля решение представляет собой сумму всего лишь двух слагаемых (см. раздел 4). Более того, для решения системы Лиувилля $Y(u, v)$ имеем

$$Y^{-1} \partial_u^2 Y = \frac{a_1''(u)}{a_1(u)} = \frac{a_2''(u)}{a_2(u)}, \quad Y^{-1} \partial_v^2 Y = \frac{b_1''(v)}{b_1(v)} = \frac{b_2''(v)}{b_2(v)}, \quad (23)$$

а в случае системы Тоды все намного сложнее.

Чтобы лучше осознать это обстоятельство, рассмотрим случай $N_1 = 2$, $N = 3$, когда A_{mn} ($1 \leq m, n \leq 2$) – матрица Картана алгебры $\mathcal{A}_2$, а $A_{3n} = \delta_{3n} A_3$. Из явного вида $A_1 = A_2 = 2$, $A_{12} = A_{21} = -1$ получим

$$\frac{1}{2} C_i = \left(\frac{X_1''}{X_1} + \frac{X_2''}{X_2} - \frac{X_1'}{X_1} \frac{X_2'}{X_2} \right) - 4 \frac{Y_3''}{Y_3} = 0, \quad (24)$$

где $X_2 = \varepsilon_1 \Delta_2(X_1)$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, а Y_3 представляет собой решение Лиувилля (заметим, что согласно условию связи, налагаемому на A_{ij} и рассмотренному в следующем

разделе, в этом случае мы имеем $\gamma_3 = A_3^{-1} = -2$, что следует из уравнения (38) (см. ниже)). Хотя нам известно, что Y_3''/Y_3 и C_i суть функции одной переменной, пока мы не знаем простых и явных выражений для C_i . В самом деле, применяя выражение (22), нетрудно найти, что

$$\partial_v(X_1^{-1}\partial_u^2 X_1) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^3 a_j b_j\right)^{-2} \sum_{i,j} W'[a_i, a_j]W[b_i, b_j] \neq 0. \quad (25)$$

Поэтому следует сначала записать явное выражение для $X_2(u, v)$ в терминах a, b , а затем полностью вычислить первое слагаемое в выражении для C_i . Более подробное обсуждение связей в теории $\mathcal{A}_2 \oplus \mathcal{A}_1$ дано в разделе 4.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $\hat{A}^T \hat{\epsilon} \hat{A} = \hat{A}$

В этом разделе мы покажем способ решения уравнения (14) для матрицы $\hat{a}$ в стандартной модели ДГ. Это возможно тогда и только тогда, когда $\hat{A}$ удовлетворяет определенным условиям, которые выводятся в явном виде. Во-первых, $\det \hat{A} = -\det \hat{a}^2 < 0$. Это налагает ограничения на вид матриц $\hat{A}$ четного порядка, но такое ограничение оказывается не существенно для матриц нечетного порядка (в последнем случае можно изменить знак $\hat{A}$ и всех переменных x_n , и единственным следствием такого преобразования будет изменение знаков всех параметров ε_n в уравнении (18)). Поскольку определители всех (симметризованных) матриц Картана для простых групп положительны (вместе со всеми своими собственными значениями), то отсюда следует, что матрицы Картана четного размера не удовлетворяют этому ограничению. Другое, более жесткое, ограничение связано со специальным видом матриц a_{mn} в формуле (9). Вследствие этого ограничения матрица $\hat{A}$ должна удовлетворять специальному уравнению, которое выводится и в явном виде решается ниже. Здесь мы рассмотрим стандартную модель ДГ, а в разделе 6 будет произведен анализ несколько иной одномерной модели ДГ, которая встречается при рассмотрении космологических моделей.

Рассмотрим теперь $(N \times N)$ -матрицу $\hat{a}$, удовлетворяющую единственному ограничению: $a_{1n} = 1 + a_n$ и $a_{2n} = 1 - a_n$. Уравнения, задающие a_{mn} в терминах A_{mn} , имеют вид

$$-2(a_m + a_n) + V_m \cdot V_n = A_{mn}, \quad -4a_n = A_n - V_n^2, \quad m, n = 1, \dots, N, \quad (26)$$

где введено обозначение $V_n \equiv (a_{3n}, \dots, a_{Nn})$. Как следует из формулы (26), N векторов V_i в $(N-2)$ -мерном пространстве имеют в совокупности $N(N-2)$ компонент, которые удовлетворяют $N(N-1)/2$ уравнениям:

$$(V_m - V_n)^2 = A_m + A_n - 2A_{mn}, \quad m > n, \quad m, n = 1, \dots, N. \quad (27)$$

Эти уравнения инвариантны относительно $(N-2)(N-3)/2$ вращений в $(N-2)$ -мерном пространстве и относительно $N-2$ преобразований сдвигов. Поэтому векторы V_m в действительности зависят от $(N-2)(N+1)/2$ инвариантных параметров, а число уравнений минус число параметров равно единице. Следовательно, одно из уравнений задает соотношения между параметрами.

Можно предложить и более конструктивный подход, в котором используются инвариантные уравнения, непосредственно вытекающие из уравнений (27). Определим $v_k \equiv V_k - V_1$, $k = 2, \dots, N$; тогда из уравнений (27) получаем

$$\begin{aligned} v_k^2 &\equiv (V_k - V_1)^2 = A_1 + A_k - 2A_{1k} \equiv \tilde{A}_{1k}, \\ (v_k - v_l)^2 &\equiv \tilde{A}_{1k} + \tilde{A}_{1l} - 2v_k \cdot v_l, \quad k > l, \quad k, l = 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Тем самым общие инвариантные уравнения для v_k имеют вид

$$v_k \cdot v_l = A_1 - A_{1k} - A_{1l} + A_{kl}, \quad k \geq l. \quad (28)$$

Так как эти уравнения справедливы также и при $l = k$, получим $N(N-1)/2$ уравнений для того же самого числа инвариантных параметров $v_k \cdot v_l$. Но, разумеется, остается еще одно соотношение для этих параметров в силу существования линейной зависимости для $N-1$ векторов v_k в $(N-2)$ -мерном пространстве. Например, v_N^2 можно выразить через оставшиеся параметры $v_2^2, \dots, v_{N-1}^2$ и $v_k \cdot v_l$, $k > l$ (их число равно $(N-2)(N+1)/2$, как и прежде). Поскольку уравнения (28) определяют $v_k \cdot v_l$ в терминах матричных элементов A_{kl} , то можно вывести необходимое соотношение между элементами A_{kl} (например, выразить $A_1 \equiv A_{11}$ через оставшиеся матричные элементы).

С помощью векторов v_k можно в явном виде построить решения и найти связь между матричными элементами A_{mn} . Решения уравнений для a_{mn} можно получить с помощью следующей конструкции. Нетрудно понять, что достаточно найти единичные векторы

$$\hat{v}_k \equiv \frac{v_k}{|v_k|} = v_k \tilde{A}_{1k}^{-1/2} \quad (29)$$

в произвольно фиксированной координатной системе в $(N-2)$ -мерном пространстве. Затем можно восстановить общее решение, применяя к $\hat{v}_k$ вращения и сдвиги (т.е. выбрать произвольные a_{n1} , $n = 3, \dots, N$). Временно введем обозначение

$$c_{kl} \equiv \cos \theta_{kl} \equiv \hat{v}_k \cdot \hat{v}_l = (A_1 - A_{1k} - A_{1l} + A_{kl})(\tilde{A}_{1k} \tilde{A}_{1l})^{-1/2}. \quad (30)$$

Используя $v_k = (a_{3k} - a_{31}, \dots, a_{Nk} - a_{N1})$, обозначим $\alpha_{nk} \equiv (a_{nk} - a_{n1})/|v_k|$, т.е. $\hat{v}_k = (\alpha_{3k}, \dots, \alpha_{Nk})$. Выбрав систему координат, в которой $\hat{v}_2 = (1, 0, \dots, 0)$, получим, что $\alpha_{3k} = c_{k2} \equiv \cos \theta_{2k}$ и можно выбрать вектор $\hat{v}_3$ с двумя ненулевыми компонентами

$$\hat{v}_3 = (c_{23}, s_{23}, 0, \dots, 0), \quad (31)$$

где $s_{23} \equiv \sin \theta_{23}$ и в общем случае $s_{kl} \equiv \sin \theta_{kl}$. Последующие инвариантные параметры α_{nk} можно получить рекурсивно. Векторы $\hat{v}_k, \dots, \hat{v}_N$ при $k \geq 4$ можно построить следующим образом. Возьмем $\alpha_{3k} = c_{2k}$, $\alpha_{nk} = 0$, если $k \leq N-2$ и $n \geq k+2$. Тогда

$$\hat{v}_k = (c_{2k}, \alpha_{4k}, \alpha_{5k}, \dots, \alpha_{(k+1)k}, 0, 0, \dots), \quad (32)$$

и параметры α_{nk} можно вывести рекурсивно из соотношений ($k \geq 4$)

$$\sum_{n=4}^{l+1} \alpha_{nk} \alpha_{nl} = c_{kl} - c_{k2} c_{l2}, \quad k > l; \quad \sum_{n=4}^{k+1} \alpha_{nk}^2 = s_{k2}^2, \quad k \leq N-1. \quad (33)$$

Условие нормировки для $\hat{v}_N$ (не включенное в уравнения выше)

$$\sum_{n=4}^N \alpha_{nN}^2 = s_{N2}^2 \quad (34)$$

при этом задает соотношение между c_{kl} (и тем самым между A_{ij}).

Применяя это решение, можно найти выражение для $A_1 \equiv A_{11}$ в терминах A_{kl} . Однако этот вывод выглядит не слишком изящным. Его можно упростить, если рассмотреть более простые матрицы A_{kl} , для которых $A_{1k} = A_{k1} = 0$, $k \neq 1$. Тогда можно найти, что уравнение для определения A_1 становится линейным, а потому допускает единственное решение. Тем не менее идея решения условия связи для A_{kl} таким не совсем прямым путем кажется неудачной. Из свойства уравнения связи по A_1 естественно предположить, что существует простая и общая формула, непосредственно выражающая A_1 через другие элементы A_{kl} .

Простейший способ нахождения A_1 в терминах других элементов A_{ij} таков: следует выразить один из векторов $v_2, v_3, \dots, v_N$ в виде линейной комбинации оставшихся $N - 2$ векторов. Предположим, что

$$v_2 = \sum_{p=3}^N v_p z_p. \quad (35)$$

Тогда величину z_p можно выразить через A_{mn} , решив уравнения

$$v_p \cdot v_2 = \sum_{q=3}^N (v_p \cdot v_q) z_q, \quad p = 3, \dots, N. \quad (36)$$

Как известно, решение имеет вид $z_p = D_p/D$, где D – определитель матрицы $(v_p \cdot v_q)$, а величины D_p суть определители той же самой матрицы с p -м столбцом, составленным из $(v_p \cdot v_2)$.

Теперь понятно, что выражение для v_2^2 с помощью найденного решения уравнения (36),

$$v_2^2 = \sum_{q=3}^N (v_2 \cdot v_q) z_q = \sum_q (v_2 \cdot v_q) \frac{D_q}{D}, \quad (37)$$

задает искомую связь для A_{mn} . С учетом уравнения (28) запишем эту связь в виде

$$(A_1 + A_2 - 2A_{12})D = \sum_{p=3}^N (A_1 + A_{p2} - A_{12} - A_{1p})D_p, \quad (38)$$

где определители D и D_p следует выразить через A_{mn} . Очевидно, что эти определители линейно зависят от A_1 , а потому уравнение (38) оказывается не более чем второго порядка по A_1 . На самом деле оно просто линейно, и чтобы это увидеть, достаточно показать, что

$$\frac{dD}{dA_1} = \sum_{p=3}^N \frac{dD_p}{dA_1}. \quad (39)$$

Для упрощения доказательства введем следующее временное обозначение¹⁰⁾:

$$D \equiv D(A_1) \equiv [C_3, C_4, \dots, C_N], \quad D_q \equiv D_q(A_1) \equiv [C_3, \dots, C_{q-1}, C_2, C_{q-1}, \dots, C_N], \quad (40)$$

где C_k – k -й столбец матрицы $(v_p \cdot v_k)$, в частности, $C_2 \equiv (v_p \cdot v_2)$. Чтобы представить дифференцирование по A_1 , добавим дополнительный столбец C_1 , все элементы которого равны единице. В этих обозначениях с учетом простой зависимости $v_k \cdot v_l$ от A_1 (см. уравнения (28)) получаем

$$D'(A_1) = \sum_{q=3}^N [C_3, \dots, C_{q-1}, C_1, C_{q-1}, \dots, C_N], \quad (41)$$

$$\begin{aligned} D'_q(A_1) &= [C_3, \dots, C_{q-1}, C_1, C_{q-1}, \dots, C_N] + \\ &+ \sum_{r \neq q}^N [C_3, \dots, C_{r-1}, C_1, C_{r-1}, \dots, C_{q-1}, C_2, C_{q-1}, C_N]. \end{aligned} \quad (42)$$

Введя очевидное обозначение $D_{rq}(A_1)$ для последних определителей, получим

$$D'_q(A_1) = [C_3, \dots, C_{q-1}, C_1, C_{q-1}, \dots, C_N] + \sum_{r \neq q}^N D_{rq}(A_1), \quad (43)$$

и тем самым правая часть формулы (39) теперь примет вид

$$\sum_{p=3}^N D'_p(A_1) = D'(A_1) + \sum_{q=3}^N \sum_{r \neq q}^N D_{rq}(A_1). \quad (44)$$

Но определитель D_{rq} можно получить из D_{qr} с помощью нечетного числа перестановок столбцов C_1, C_2 , поэтому $D_{qr} = -D_{rq}$, что и завершает доказательство.

Теперь связь (38) можно решить в явном виде. Применяя очевидные соотношения

$$D = D(0) + A_1 D'(0), \quad D_q = D_q(0) + A_1 D'_q(0)$$

и полученные выше выражения для определителей, можно выписать общее выражение для A_1 через остальные матричные элементы A_{mn} . Мы оставляем доказательство этого утверждения как простое упражнение для интересующегося читателя. Отметим лишь, что важный для дальнейшего случай $A_{1n} = 0$ оказывается несколько более простым, поскольку в этом случае $v_k v_l - A_1 = A_{kl}$, а потому $D(0) = \det(A_{pq})$ и т.д. В приложении выводится элегантное решение уравнения (38) для модели с симметричными $(N \times N)$ -матрицами A_{mn} , имеющими вид

$$A_{mn} = \delta_{mn} A_n, \quad 1 \leq m, n \leq L, \quad A_{1n} = 0, \quad N \geq 2.$$

4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТОДЫ ДЛЯ АЛГЕБРЫ $\mathcal{A}_N$

Уравнения (18) для $\mathcal{A}_N$ -теории имеют особенно простой вид

$$\Delta_2(X_n) = \varepsilon_n X_{n-1} X_{n+1}, \quad X_0 \mapsto 1, \quad X_{N+1} \mapsto 1, \quad n = 1, \dots, N, \quad (45)$$

¹⁰⁾Заметим, что в этом выражении $k, l = 2, 3, \dots, N$ и $p, q, r = 3, \dots, N$.

где $\varepsilon_n^2 = 1$. Как хорошо известно, процедуру их решения можно свести к решению всего лишь одного уравнения старшего порядка для X_1 , если применить соотношение (см. книгу [36])

$$\Delta_2(\Delta_n(X)) = \Delta_{n-1}(X)\Delta_{n+1}(X), \quad \Delta_1(X) \equiv X, \quad n \geq 2, \quad (46)$$

в котором $\Delta_n(X)$ суть определители $(n \times n)$ -матриц $X_{km} \equiv \partial_u^k \partial_v^m X$, $1 \leq k, m \leq n$. В самом деле, применяя уравнения (45) и (46), можно доказать, что при $n \geq 2$

$$X_n = \Delta_n(X_1) \prod_{k=1}^{[n/2]} \varepsilon_{n+1-2k}, \quad (47)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть $n/2$. Из условия $X_{N+1} = 1$, таким образом, вытекает уравнение для X_1 :

$$\Delta_{N+1}(X_1) = \prod_{k=1}^{[(N+1)/2]} \varepsilon_{N+2-2k} \equiv \tilde{\varepsilon}_{N+1} = \pm 1. \quad (48)$$

Это уравнение допускает точное решение, которое можно получить методом специального разделения переменных (см. уравнение (22)). Здесь мы представим его общее решение в виде, эквивалентном стандартному [36], но более компактном и более подходящем для построения одномерных решений, обобщающих решения, исследованные в работе [23].

Отправной точкой будут уравнения Лиувилля ($\mathcal{A}_1$ Тоды) $\Delta_2(X) = \tilde{\varepsilon}_2 \equiv \varepsilon_1$ (см. работы [23], [36], [38], [39]). Вычисляя производные от $\Delta_2(X)$ по переменным u и v , нетрудно доказать соотношения (20). Из них следует, что существуют “потенциалы” $\mathcal{U}(u)$ и $\mathcal{V}(v)$ такие, что

$$\partial_u^2 X - \mathcal{U}(u)X = 0, \quad \partial_v^2 X - \mathcal{V}(v)X = 0, \quad (49)$$

а потому X можно представить в форме с “разделенными” переменными, приведенной в формуле (22) с $N = 1$, где $a_i(u)$, $b_i(v)$, $i = 1, 2$, суть линейно независимые решения уравнений (отсюда следуют выражения (23)):

$$a_i''(u) - \mathcal{U}(u)a_i(u) = 0, \quad b_i''(v) - \mathcal{V}(v)b_i(v) = 0. \quad (50)$$

При $i = 1$ эти уравнения задают потенциал в случае произвольного выбора параметров a_1 , b_1 , а параметры a_2 , b_2 при этом получаются из уравнений первого порядка

$$W[a_1(u), a_2(u)] = w_a, \quad W[b_1(v), b_2(v)] = w_b, \quad w_a \cdot w_b = \varepsilon_1. \quad (51)$$

Мы повторим это хорошо известное вычисление, поскольку оно применимо также и в случае $\mathcal{A}_N$ уравнения Тоды (48). Действуя похожим образом, можно показать, что X_1 удовлетворяет уравнениям

$$\partial_u^{N+1} X + \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{U}_n(u) \partial_u^n X = 0, \quad \partial_v^{N+1} X + \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{V}_n(v) \partial_v^n X = 0. \quad (52)$$

Поэтому решение уравнения (48) можно записать в таком же “разделенном” виде (22), в котором теперь $a_i(u)$, $b_i(v)$, $i = 1, \dots, N+1$, подчиняются обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям, отвечающим уравнениям (52) с постоянными вронскианами, нормированными условиями (можно выбрать и любую другую нормировку, в которой произведение двух вронскианов имеет то же значение)

$$W[a_1(u), \dots, a_{N+1}(u)] = w_a, \quad W[b_1(v), \dots, b_{N+1}(v)] = w_b, \quad w_a w_b = \tilde{\varepsilon}_{N+1}. \quad (53)$$

Потенциалы $\mathcal{U}_n(u)$ и $\mathcal{V}_n(v)$ легко выразить через произвольные функции $a_i(u)$ и $b_i(v)$, $i = 1, \dots, N$. Чтобы найти эти выражения, продифференцируем определители (53) и найдем однородные дифференциальные уравнения для $a_{N+1}(u)$, $b_{N+1}(v)$, потенциалы которых выражены через a_i , b_i , $i = 1, \dots, N$. Например, при $N = 2$ имеем

$$\mathcal{U}_1(u) = -\frac{a_1 a_2''' - a_1''' a_2}{W[a_1, a_2]}, \quad \mathcal{U}_0(u) = \frac{a_1' a_2''' - a_1''' a_2'}{W[a_1, a_2]}. \quad (54)$$

Предложим читателю в качестве упражнения доказать все эти утверждения при $N = 2$. Главное соотношение следует из условия $\partial_u \Delta_3(X) = 0$:

$$\partial_v \left[\frac{\partial_v(X/\partial_u X)}{\partial_v(\partial_u^3 X/\partial_u X)} \right] = 0. \quad (55)$$

Выражение в квадратных скобках равно произвольной функции $A_0(u)$, откуда следует, что

$$\partial_v \left[\left(\frac{X}{\partial_u X} \right) + A_0(u) \left(\frac{\partial_u^3 X}{\partial_u X} \right) \right] = 0. \quad (56)$$

Обозначив выражение в квадратных скобках через $-A_1(u)$ и вводя обозначения $\mathcal{U}_1(u) = A_1(u)/A_0(u)$ и $\mathcal{U}_0(u) = 1/A_1(u)$, получим первое из уравнений (52) при $N = 2$. Повторив сходные вычисления, исходя из $\partial_v \Delta_3(X) = 0$ можно получить второе из уравнений (52).

Обратимся теперь к общему решению уравнения (48). На самом деле, рассматривая уравнения (53) как неоднородные дифференциальные уравнения для $a_{N+1}(u)$, $b_{N+1}(v)$ с произвольно выбранными функциями $a_i(u)$, $b_i(v)$, $1 \leq i \leq N$, легко написать явное решение этой задачи:

$$a_{N+1}(u) = \sum_{i=1}^N a_i(u) \int_{u_0}^u d\bar{u} W_N^{-2}(\bar{u}) M_{N,i}(\bar{u}). \quad (57)$$

Здесь $W_N \equiv W[a_1(u), \dots, a_N(u)]$ – вронскиан от N произвольных функций a_i , а $M_{N,i}$ суть главные миноры последней строки вронскиана (заменяя a на b и u на v , получим из той же самой формулы (57) выражение для $b_{N+1}(v)$). В простейшем случае алгебры $\mathcal{A}_2$ имеем

$$a_3(u) = \sum_{i=1}^2 a_i(u) \int_{u_0}^u \frac{d\bar{u}}{W_2^2(\bar{u})} M_{2,i}(\bar{u}) \equiv \int_{u_0}^u d\bar{u} \frac{a_1(\bar{u})a_2(u) - a_1(u)a_2(\bar{u})}{(a_1(\bar{u})a_2'(\bar{u}) - a_1'(\bar{u})a_2(\bar{u}))^2}.$$

Тем самым мы нашли выражение для основного решения X_1 , зависящие от $2N$ произвольных киральных функций $a_i(u)$ и $b_i(v)$. Чтобы завершить построение решения, получим выражения для всех X_n через a_i и b_i . Это решение следует из простой комбинаторики, позволяющей выразить X_n через миноры n -го порядка. Например, легко получить представление для X_2 :

$$X_2 = \varepsilon_1 \Delta_2(X_1) = \varepsilon_1 \sum_{i < j} W[a_i(u), a_j(u)] W[b_i(v), b_j(v)], \quad (58)$$

которое справедливо при любом $N \geq 1$, $i, j = 1, \dots, N+1$. Заметим, что выражения для всех X_n имеют такой же вид, но с определителями старших порядков (см. книгу [36]).

Наше простое представление решения Тоды для алгебры $\mathcal{A}_N$ полностью эквивалентно представлению, содержащемуся в книге [36], но наш метод более удобен при рассмотрении целого ряда задач. Например, он полезен при рассмотрении асимптотических и аналитических свойств решений исходных физических задач. Этот метод особенно удобен при построении волноподобных решений системы Тоды, которые сходны с волноподобными решениями модели N -Лиувилля. Действительно, так же как и модель Лиувилля, уравнения Тоды допускают волноподобные решения. Чтобы их получить, определим сначала пространство модулей решений уравнений Тоды. По аналогии со случаем N -Лиувилля можно попробовать отождествить пространство модулей с пространством потенциалов $\mathcal{U}_n(u)$, $\mathcal{V}_n(v)$. Возможно, это не самый лучший выбор, и на самом деле в модели Лиувилля можно выбрать более полезный вариант, на который указывает решение уравнений связи. Во всяком случае, выбор потенциалов в качестве модулей вполне разумен, поскольку каждая совокупность потенциалов $\mathcal{U}_n(u)$ и $\mathcal{V}_n(v)$ задает некоторое решение и, наоборот, каждое решение, задаваемое набором функций $(a_1(u), \dots, a_{N+1}(u))$, $(b_1(v), \dots, b_{N+1}(v))$, удовлетворяющих условиям (53), задает соответствующий набор потенциалов $(\mathcal{U}_0(u), \dots, \mathcal{U}_{N-1}(u))$, $(\mathcal{V}_0(v), \dots, \mathcal{V}_{N-1}(v))$.

Теперь, как и в случае модели Лиувилля, можно рассмотреть редукцию пространства модулей к пространству постоянных “векторов” $(U_0, \dots, U_{N-1})$, $(V_0, \dots, V_{N-1})$. Фундаментальные решения уравнений (52) с таким выбором потенциалов представляют собой (в невырожденном случае) совокупность экспоненциальных членов $e^{\mu_i u}$, $e^{\nu_i v}$. Тогда X_1 можно записать (для простоты выберем $f_i > 0$) в виде

$$X_1 = \sum_{i=1}^{N+1} a_i(u) b_i(v) = \sum_{i=1}^{N+1} f_i e^{\mu_i u} e^{\nu_i v} = \sum_{i=1}^{N+1} e^{\mu_i u + u_i} e^{\nu_i v + v_i}, \quad (59)$$

где параметры должны удовлетворять условиям (53). Вычислив определитель $\Delta_{N+1}(X_1)$ и обозначив стандартные определители Вандермонда через

$$D_\mu \equiv \prod_{i > j} (\mu_i - \mu_j), \quad D_\nu \equiv \prod_{i > j} (\nu_i - \nu_j),$$

нетрудно найти, что условие (53) будет выполнено, если

$$\sum_{i=1}^{N+1} \mu_i = \sum_{i=1}^{N+1} \nu_i = 0, \quad \prod_{i=1}^{N+1} f_i D_\mu D_\nu = \tilde{\varepsilon}_{N+1}. \quad (60)$$

Последнее из этих условий можно заменить на эквивалентное ему условие

$$w_a \cdot w_b = (D_\mu D_\nu)^{-1} \tilde{\varepsilon}_{N+1}, \quad \prod_{i=1}^{N+1} e^{u_i} = w_a, \quad \prod_{i=1}^{N+1} e^{v_i} = w_b, \quad (61)$$

где e^{u_i} и e^{v_i} не обязательно положительны (можно, например, выбрать e^{u_i} отрицательным, предполагая, что u_i содержит ненулевую мнимую составляющую $i\pi$), но в основном будут рассматриваться положительные f_i .

В данном вырожденном случае пространство параметров $(\mu_i, \nu_i; u_i, v_i)$ можно интерпретировать как новое пространство модулей в полном соответствии со случаем модели Лиувилля. Выбрав в качестве отправной точки основное решение X_1 , определяемое уравнениями (59), (60), нетрудно получить X_n рекуррентно с применением уравнений (45). Проиллюстрируем это на примере простейшей теории ТЛ $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$. Тогда X_2 задается формулами (58)–(60):

$$X_2 = \varepsilon_2 (D_\mu D_\nu)^{-1} \sum_{k=1}^3 (\mu_i - \mu_j)(\nu_i - \nu_j) e^{-\mu_k u - u_k} e^{-\nu_k v - v_k}, \quad (62)$$

где через (ijk) обозначены циклические перестановки индексов (123) (а потому $\mu_i + \mu_j = -\mu_k$, $\nu_i + \nu_j = -\nu_k$). Теперь мы можем решить связи (24), в которых Y_3 представляет собой решение уравнения Лиувилля при постоянных модулях.

Применив уравнения (59)–(62) в случае $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, получим, что эти связи эквивалентны следующим уравнениям:

$$\sum_{i < j} (\mu_i - \mu_j)(\nu_i - \nu_j) [3\mu_k^2 - C_\mu] = 0, \quad \sum_{i < j} (\mu_i - \mu_j)(\nu_i - \nu_j) [3\nu_k^2 - C_\nu] = 0, \quad (63)$$

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_1 \mu_2 = C_\mu, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_1 \nu_2 = C_\nu, \quad (64)$$

в которых постоянные C_μ и C_ν представляют собой вклад члена Лиувилля. Вычисляя суммы в уравнениях (63), найдем, что эти уравнения эквивалентны соотношениям

$$3[(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_1 \mu_2) - C_\mu] \sum \mu_i \nu_i = 0, \quad 3[(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \mu_1 \nu_2) - C_\nu] \sum \mu_i \nu_i = 0, \quad (65)$$

выполненным, если только выполняются уравнения (64).

Нетрудно проверить, что потенциалы $\mathcal{U}_1(u)$, $\mathcal{V}_1(v)$ для экспоненциальных решений имеют вид

$$\mathcal{U}_1(u) = -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_1 \mu_2) \equiv \frac{1}{2} \sum \mu_i^2, \quad \mathcal{V}_1(v) = -(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \mu_1 \nu_2) \equiv \frac{1}{2} \sum \nu_i^2, \quad (66)$$

а потому и связи приобретают исключительно простую и естественную форму:

$$\mathcal{U}_1 + C_\mu = 0, \quad \mathcal{V}_1 + C_\nu = 0. \quad (67)$$

Эти связи легко разрешить. В приложении 3 записаны уравнения связи для общего решения теории $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ в таком же виде, но с $\mathcal{U}_1$, C_μ , зависящими от u , и с $\mathcal{V}_1$, C_ν , зависящими от v . К сожалению, даже такое представление не помогает решить общие уравнения связи.

5. ПРОСТАЯ ИНТЕГРИРУЕМАЯ МОДЕЛЬ (1 + 1)-МЕРНОЙ ДГ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ТОДОВСКИМИ СКАЛЯРНЫМИ ПОЛЯМИ МАТЕРИИ

Рассмотрим простую модель ДГ (впервые вкратце обсуждавшуюся в работе [24]), в которой потенциал V не зависит от φ , т.е. $\partial_\varphi V \equiv 0$. Предполагая, как и выше, что потенциалы Z_n постоянны (выберем $Z_n \equiv -1$), легко видеть, что уравнения для полей материи ψ_n допускают процедуру разделения переменных и могут быть решены независимо от других уравнений¹¹⁾. Это очевидно следует из того, что уравнение (7) задает, по существу, тривиальную метрику $f = \varepsilon a'(u)b'(v)$, которую можно локально преобразовать к виду $f = \varepsilon$. Таким образом, следует сначала решить уравнения полей материи (6), а затем – дилатонное уравнение (4), в то время как связи (5) будут задавать дополнительные соотношения между дилатонным полем и полями материи.

Зададим потенциал V в виде мультиэкспоненты от ψ_n :

$$V = \varepsilon \sum_{n=1}^N 2g_n \exp \sum_{m=1}^N \psi_m a_{mn}. \quad (68)$$

Тогда уравнения полей материи (уравнения движения) примут вид

$$\partial_u \partial_v \psi_n = \varepsilon \sum_{m=1}^N a_{nm} g_m \exp \sum_{k=1}^N \psi_k a_{km}. \quad (69)$$

Теперь для описания модели применим уравнения (11)–(14), в которых положим $\epsilon_n \equiv 1$. Уравнения для A_{mn} оказывается легко решить, и они обсуждаются в конце данного раздела. Уравнения полей материи (13) интегрируются в случае модели ТЛ, но они также интегрируются и в чистой модели Тоды; самый простой случай такого интегрирования имеет место в $\mathcal{A}_2$ -теории Тоды.

В случае, когда уравнения (13) интегрируются, можно найти полное решение модели, включая уравнения связей. Однако не обязательно предполагать уравнения (13) интегрируемыми, для того чтобы построить частные решения полной системы уравнений. Таким образом, предположим, что мы нашли решение системы (13), и покажем, как можно задать дилатонное поле и решить уравнения связей.

Общее решение уравнения (4) можно представить в виде

$$\varphi = -\varepsilon \int_0^u \int_0^v d\bar{u} d\bar{v} V[\psi(\bar{u}, \bar{v})] + A(u) + B(v), \quad (70)$$

¹¹⁾В этом разделе обозначения слегка изменены – рассматриваются N полей материи ψ_n , $n = 1, \dots, N$.

где $A(u)$, $B(v)$ – произвольные функции. Связи (5) в этой модели имеют вид

$$\partial_i^2 \varphi = - \sum_{n=1}^N (\partial_i \psi_n)^2, \quad i = u, v. \quad (71)$$

Применяя уравнения движения (6), легко найти, что

$$\partial_i V = \varepsilon \partial_j \sum_1^N (\partial_i \psi_n)^2, \quad (i, j) = (u, v), (v, u), \quad (72)$$

и выписать $A(a)$, $B(b)$ в терминах ψ . В итоге получим

$$\begin{aligned} \varphi = & -\varepsilon \int_0^u \int_0^v d\bar{u} d\bar{v} V[\psi(\bar{u}, \bar{v})] - \int_0^u d\bar{u} \int_0^{\bar{v}} d\bar{u} \Phi_u(\bar{u}) - \\ & - \int_0^v d\bar{v} \int_0^{\bar{v}} d\bar{v} \Phi_v(\bar{v}) + A'(0)u + B'(0)v, \end{aligned} \quad (73)$$

где мы опустили несущественный произвольный вклад $A(0) + B(0) = \varphi(0, 0)$ и обозначили

$$\Phi_u(u) \equiv \sum_1^N (\partial_u \psi_n(u, 0))^2, \quad \Phi_v(v) \equiv \sum_1^N (\partial_v \psi_n(v, 0))^2.$$

Это завершает построение решения полной системы для этой модели, если только нам известно общее решение уравнений (6).

Построить интегрируемые уравнения для ψ_n теперь можно, если выбрать потенциал (68), для которого уравнения (12)–(14) (с $\epsilon_n \equiv 1$) можно свести к интегрируемым уравнениям Тоды. Тем самым можно найти явное аналитическое решение в нетривиальной ДГ, минимально взаимодействующей со скалярными полями материи. Эта модель представляет собой весьма сложное обобщение хорошо изученной модели КГХС (со свободными скалярными полями и тривиальным потенциалом $V = g$). Модель, представленная здесь, обладает гораздо более богатыми геометрическими свойствами и весьма сложной структурой пространства своих решений. В частности, построение решений с постоянными модулями предыдущего раздела оказывается в полной мере применимым и непосредственно дает решения в виде обобщенных волн, которые включают в себя одномерные редукции – статические и космологические решения.

Общий случай системы $\mathcal{A}_N$ можно явно решить и исследовать с помощью результатов данной статьи. Самый простой случай – это модель $N = 1$ (уравнение Лиувилля для единственного поля ψ). Первым простым, но уже по-настоящему интересным случаем оказывается система двух скалярных полей, удовлетворяющих уравнениям $\mathcal{A}_2$ Тоды. Выбрав, например,

$$V = e^{\sqrt{3}\psi_1 - \psi_2} + e^{2\psi_2},$$

получим простейшую реализацию модели ДГ для $\mathcal{A}_2$ -модели Тоды, полное решение которой можно получить с помощью вышеприведенных вычислений. Интересен следующий вопрос: можно ли получить эти модели с помощью размерной редукции какой-либо “реалистической” теории в старших размерностях?

6. ОДНОМЕРНЫЕ СТЛ

Рассмотрим теперь одномерные мультиэкспоненциальные модели и в особенности те из них, которые можно привести к интегрируемым теориям ТЛ. Эти модели можно или вывести напрямую из теорий (супер)гравитации в старших размерностях¹²⁾, или при дальнейшей редукции двумерных моделей ДГ. Предполагая, что модель ДГ редуцируется к размерности один, рассмотрим некоторые более общие двумерные лагранжианы (вернемся для ψ_n к обозначениям из раздела 2):

$$\mathcal{L}^{(2)} = \sqrt{-g} \left[\varphi R(g) + V(\varphi, \psi) + \sum_{n=3}^{N_1} Z(\varphi) (\nabla \psi_n)^2 + \sum_{p=N_1+1}^N Z_p(\varphi, \psi) (\nabla \sigma_p)^2 \right]. \quad (74)$$

Поля σ_p и ψ_n таковы, что $\mathcal{L}^{(2)}$ зависит исключительно от производных полей σ_p , но не от σ_p . Простейшую редукцию $\mathcal{L}^{(2)}$ к одномерной модели, связанной с описанием черных дыр и космологий, можно представить в виде (см., например, работы [20], [23])

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{\bar{l}(\tau)} \left(-\dot{\phi} \dot{F} + \sum_n \dot{\psi}_n^2 - \sum_p \bar{Z}_p(\phi, \psi) \dot{\sigma}_p^2 \right) + \bar{l}(\tau) \varepsilon e^F \bar{V}(\phi, \psi). \quad (75)$$

Здесь ϕ связано с исходным полем дилатона φ уравнением $\phi'(\varphi) \equiv -Z(\varphi)$, $\bar{l}(\tau) -$ новый множитель Лагранжа, $\bar{l}(\tau) = l(\tau)\phi'(\varphi)$ и

$$\bar{V}(\phi, \psi) = \frac{V(\varphi, \psi)}{\phi'(\varphi)}, \quad \bar{Z}_p(\phi, \psi) = -Z_p(\varphi, \psi)\phi'(\varphi). \quad (76)$$

Заметим, что τ может быть или временем t , или пространственной координатой r , так что ε принимает значения ± 1 , соответствующие знаку метрики f . В дальнейшем уравнение (75) интерпретируется как космологическая модель, в которой $\tau = t$. Разумеется, космологический лагранжиан вида (75) можно вывести и напрямую из теорий супергравитации в старших размерностях (см., например, работы [17], [18], [20]).

Теперь покажем, что уравнения движения для лагранжиана (75) можно разрешить относительно полей $\sigma_p(t)$ (и исключить эти поля). В самом деле, канонические импульсы P_q , отвечающие $\sigma_p(t)$, сохраняются:

$$\frac{d}{dt} P_q \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \dot{\sigma}_q} = -2 \frac{d}{dt} (Z_q(\varphi, \psi) \dot{\sigma}_q) = \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \sigma_q} \equiv 0, \quad N_1 + 1 \leq q \leq N. \quad (77)$$

Имеем также (ψ_1 и ψ_2 задаются в терминах полей φ и F , как в разделе 2)

$$P_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \dot{\psi}_i}, \quad 1 \leq i \leq N_1. \quad (78)$$

¹²⁾Описание разнообразных подходов к размерным редукциям и конкретным моделям в низших размерностях было дано в многочисленных статьях, опубликованных за последние двадцать лет (см., например, работы [3], [5], [10], [11], [13]–[22], [25], [28] и библиографию к ним).

Таким образом, мы находим гамильтониан, отвечающий лагранжиану (75):

$$\mathcal{H}^{(1)} = \frac{l(t)}{4} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} \epsilon_i P_i^2 - \sum_{q=N_1+1}^N \bar{Z}_q^{-1}(\phi, \psi) P_q^2 + 4\epsilon e^F \bar{V}(\phi, \psi) \right\}, \quad (79)$$

где теперь P_q представляют собой константы интегрирования ($\epsilon_1 = -1$, $\epsilon_n = 1$, $1 \leq n \leq N_1$). Поэтому лагранжиан (75) можно заменить на *эффективный лагранжиан*

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{l(t)} \sum_{n=1}^{N_1} \epsilon_n \dot{\psi}_n^2 + \bar{l}(t) \varepsilon V_{\text{eff}}(\phi, \psi), \quad (80)$$

где V_{eff} – эффективный потенциал:

$$V_{\text{eff}}(\phi, \psi) = \varepsilon e^F \bar{V}(\phi, \psi) - \sum_{q=N_1+1}^N P_q^2 \bar{Z}_q(\phi, \psi). \quad (81)$$

Если этот эффективный потенциал имеет мультиэкспоненциальный вид (как в разделе 2), то можно применить общий подход, развитый нами для обработки двумерных систем. Поэтому в дальнейшем просто забудем о вышеприведенных преобразованиях. Единственным отличием будет лишь то, что новый потенциал V будет задаваться суммой двух членов (обозначив $N_2 \equiv N - N_1$, будем называть эту модель моделью (N_1, N_2)):

$$V = \sum_{i=1}^{N_1} 2g_i e^{q_i} + \sum_{p=N_1+1}^N 2g_p e^{q_p^{(0)}}, \quad (82)$$

где $a_{1i} = 1 + a_i$, $a_{2i} = 1 - a_i$, $i = 1, \dots, N_1$, в то время как $a_{1p} = a_p$, $a_{2p} = -a_p$, $p = N_1 + 1, \dots, N$.

В случае, когда уравнения движения можно свести к СТЛ, можно использовать одномерные решения из раздела 4. Чтобы найти класс теорий ДГ, для которых это возможно, выразим a_{mn} через A_{mn} и решим соответствующее уравнение связи, обобщая уравнение (38). Поскольку матрица a_{mn} имеет теперь другой вид, решение уравнений $\hat{a}^T \hat{e} \hat{a} = \hat{A}$, которые эквивалентны билинейной системе

$$-a_{1m} a_{1n} + a_{2m} a_{2n} + \sum_{k=3}^N a_{km} a_{kn} = A_{mn}, \quad (83)$$

не совпадает с решением в разделе 4, хотя вычисления оказываются весьма похожими.

Чтобы проиллюстрировать это различие, рассмотрим простейшую матрицу

$$a_{mn} = \begin{pmatrix} 1 + a_1 & 1 + a_2 & a_3 \\ 1 - a_1 & 1 - a_2 & -a_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В этом случае из уравнений (83) получаются шесть уравнений для шести неизвест-

ных a_1, a_2, a_3 и a_{31}, a_{32}, a_{33} . Нетрудно найти, что решение имеет вид (напомним, что $A_{mn} = A_{nm}$)

$$\begin{aligned} 4a_1 &= a_{31}^2 - A_1, & 4a_2 &= a_{32}^2 - A_2, & a_{33} &= \sqrt{A_3}, \\ a_{32} - a_{31} &= \frac{A_{32} - A_{31}}{\sqrt{A_3}}, & 2a_3 &= a_{31}a_{33} - A_{31} = a_{32}a_{33} - A_{32}. \end{aligned}$$

Ясно, что одна из величин a_{mn} не определяется уравнениями (например, A_{31}) и из двух выражений для a_3 следует уравнение связи для a_{mn} :

$$(A_1 + A_2 - 2A_{12})A_3 = (A_{23} - A_{13})^2. \quad (84)$$

Эта связь похожа на уравнение (38) и имеет те же происхождение и смысл. Соотношение (84) не выполняется для матрицы Картана алгебры $\mathcal{A}_3$, но может быть выполнено для матрицы Картана алгебры $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ (с $A_{21} = A_{31} = 0$ и $A_1 = -3/2$).

Рассмотрим теперь систему (83) общего вида, исследовать которую не сложнее, чем “стандартную” систему (26). По этой причине опустим детали и приведем лишь краткий обзор главных отличий. Уравнения (26), (27) выполняются при $m, n \leq N_1$ (такие m, n будем обозначать как i, j).

Новые уравнения имеют вид (векторы V_m определены как $V_m \equiv [a_{3m}, \dots, a_{Nm}]$ при всех m)

$$-2a_p + V_p \cdot V_i = A_{pi} \equiv A_{ip}, \quad V_p \cdot V_q = A_{pq}, \quad i \leq N_1, \quad N_1 + 1 \leq p \leq N. \quad (85)$$

Первая система уравнений (“ ip -уравнения”) эквивалентна системе ($k = 2, \dots, N_1$)

$$V_p \cdot v_k \equiv V_p \cdot (V_k - V_1) = A_{ip} - A_{1p}, \quad -2a_p + V_p V_1 = A_{1p}.$$

Тем самым мы получили $N(N-1)/2$ уравнений для $N-1$ векторов v_k, V_p в $(N-2)$ -мерном пространстве:

$$v_k \cdot v_l = A_1 + A_{kl} - A_{1k} - A_{1l}, \quad k, l = 2, \dots, N_1, \quad (86)$$

$$v_k \cdot V_p \equiv A_{kp} - A_{1p}, \quad v_p \cdot V_q = A_{pq}, \quad k = 2, \dots, N_1, \quad p = N_1 + 1, \dots, N, \quad (87)$$

в то время как оставшиеся уравнения позволяют найти a_m по заданным векторам V_p и матричным элементам A_{mn} :

$$4a_i = V_i^2 - A_i, \quad 2a_p = V_p V_1 - A_{p1}. \quad (88)$$

Поскольку мы имеем $N-1$ векторов v_k, V_p в $(N-2)$ -мерном пространстве, один из них задается линейной комбинацией других, например

$$v_2 = \sum_{n=3}^{N_1} x_n v_n + \sum_{p=N_1+1}^N x_p V_p. \quad (89)$$

Отсюда следует, что матричные элементы A_{mn} должны удовлетворять одному уравнению связи, которое можно получить, если сначала найти x_n, x_p , а потом записать выражение для v_2^2 через A_{mn} (см. сходное вычисление в разделе 3)¹³⁾.

¹³⁾Если $N_1 = 2$, а N_2 – произвольная величина, то уравнение связи можно легко разрешить, так как зависимость от A_1 содержится лишь в выражении $v_2^2 = A_1 + A_2 - 2A_{12}$ (см. также пример ниже).

Чтобы выразить a_{mn} через A_{mn} , необходимо решить уравнения для v_k, V_p способом, описанным в разделе 3 в уравнениях (29)–(34) (необходимо решить уравнения в фиксированной системе координат, а затем использовать инвариантность относительно поворотов для единичных векторов $\hat{v}_k, \hat{V}_p$ и т.д.). Простейший нетривиальный пример дается случаем $N_1 = N_2 = 2$. Оставим его в качестве упражнения для читателя.

В заключение заметим, что разнообразные примеры одномерных уравнений Тоды и ТЛ, связанные с уравнениями, рассмотренными в этом и предыдущих разделах, были получены с помощью редукций теорий старших размерностей при описании некоторых черных дыр и космологий (см., например, работы [13]–[15], [25], [40]–[43]). Мы планируем обсудить применение нашего формального подхода в последующих публикациях.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем теперь вкратце основные результаты и их возможные применения. В работе была введена простая и компактная формулировка общей $(1+1)$ -мерной ДГ с мультиэкспоненциальными потенциалами и найдены условия, при которых становится возможным построить явные решения этих уравнений с помощью теории Тоды. Простейший класс моделей, удовлетворяющих этим условиям, связан с уравнениями ТЛ. В разделе 5 (см. также работу [24]) показано, что модели с потенциалами, не зависящими от дилатонного поля φ , могут быть в явном виде решены в случае, когда A_{mn} – произвольная матрица Картана. В этом случае добавление полей Лиувилля оказывается излишним. Нами также был предложен простой подход к решению уравнений $\mathcal{A}_N$ Тоды.

Простые экспоненциальные решения, полученные в разделе 4, вызывают особый интерес. Эти решения объединяют в явном виде статические решения (черные дыры), космологические модели и волновые решения для скалярных полей Тоды, взаимодействующих с гравитацией. Некоторые из этих решений можно связать с космологиями со сферическими неоднородностями или с эволюционирующими черными дырами, но это требует отдельного исследования. Ранее в работе [23] нами были изучены похожие, но более простые решения в теориях N -Лиувилля. Основной вывод указанной статьи состоит, в частности, в существовании несингулярных экспоненциальных решений, и этот результат остается справедливым и в случае теории ТЛ.

Заметим, что одномерные космологические модели типа ТЛ встречались довольно давно в размерных редукциях теорий (супер)гравитации в старших размерностях (см., например, работу [15]). Все наше рассмотрение для двумерной модели ТЛ можно в равной степени применить и в одномерном случае. Предварительное обсуждение содержится в работе [24], а подробное рассмотрение проведено в настоящей работе вместе с подробным изложением результатов, которые были лишь вкратце отмечены ранее (некоторые из результатов разделов 2–4 были анонсированы в работе [44]).

Чтобы включить в рассмотрение волны, необходимо продвинуться хотя бы на одну размерность вверх. Основной целью данной работы было сделать первый шаг и

изучить этот вопрос в простейшей модели с двумеризованной цепочкой Тоды. В качестве простого упражнения (основанного на результатах данной работы) можно рассмотреть редукции из размерности $(1 + 1)$ как к размерности $(1 + 0)$ (“космологические” решения), так и к размерности $(0 + 1)$ (“статические” редукции, или редукции черных дыр), а также редукции пространства модулей к волновым решениям. Одной из наиболее интересных задач на будущее остается связь между этими тремя объектами. Она была открыта в теории N -Лиувилля, но рассмотрение в этой работе показывает, что подобное соответствие возможно и в гораздо более сложных теориях, задаваемых уравнениями Тоды. Представляется вероятным, что связь между статическими, космологическими и волновыми решениями существует (может быть, в более слабой форме) и в некоторых неинтегрируемых теориях.

Наконец, отметим, что общая задача решения связей энергии и импульса в двумеризованной теории ТЛ остается, по существу, нерешенной. Эта задача полностью решена в модели, предложенной в разделе 5, и в одномерной модели раздела 6 (а также и для эффективно одномерных решений в разделе 4). Однако в двумерных теориях ТЛ не удастся аналитически удовлетворить связям для общего решения. Чтобы решить задачу аналитически, возможно, следует объединить наш чисто аналитический подход с теоретико-групповыми соображениями [33]–[37].

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Матрицы Картана и матрица α_{mn}

Для всех матриц Картана имеем $A_{nn} = 2$. Для всех матриц Картана, кроме $\mathcal{G}_2$ и $\mathcal{F}_4$, выполняется

$$A_{(n-1)n} = A_{n(n-1)} = -1, \quad 2 \leq n \leq N-1.$$

Для матриц Картана $\mathcal{A}_N, \mathcal{B}_N, \mathcal{C}_N, \mathcal{D}_N, \mathcal{E}_N$ (где $N = 6, 7, 8$ для последней серии):

$$\mathcal{A}_N, \mathcal{E}_N: A_{(N-1)N} = A_{N(N-1)} = -1; \quad \mathcal{D}_N: A_{(N-2)N} = A_{N(N-2)} = -1;$$

$$\mathcal{B}_N: A_{(N-1)N} = -2, A_{N(N-1)} = -1; \quad \mathcal{C}_N: A_{(N-1)N} = -1, \quad A_{N(N-1)} = -2.$$

Для $\mathcal{E}_N$, кроме того, имеем $A_{3N} = A_{N3} = -1$. Недиagonальные элементы $\mathcal{G}_2$ имеют вид $A_{12} = -1, A_{21} = -3$. Для $\mathcal{F}_4$ все элементы на соседних с главной диагонали равны -1 , кроме $A_{23} = -2$. (Здесь мы приводим лишь ненулевые элементы, все остальные равны нулю.)

Матрицы алгебр $\mathcal{A}_N, \mathcal{D}_N, \mathcal{E}_N$ симметричны, и поэтому задают симметричную матрицу α_{mn} . Обозначим через $\tilde{\mathcal{B}}_N, \tilde{\mathcal{C}}_N, \tilde{\mathcal{G}}_2, \tilde{\mathcal{F}}_4$ симметризованные (как объяснялось в основном тексте статьи) матрицы Картана. Для $\tilde{\mathcal{G}}_2$ имеем $A_{12} = A_{21} = -3, A_{11} = 2, A_{22} = 6$, для $\tilde{\mathcal{F}}_4$ –

$$A_{11} = A_{22} = 4, \quad A_{33} = A_{44} = 2, \quad A_{12} = A_{23} = -2, \quad A_{34} = -1.$$

Легко получить матрицу α_{mn} , применяя формулу (16). Для $\mathcal{A}_N$ $\alpha_{nn} = -2, \alpha_{(n-1)n} = \alpha_{n(n-1)} = 1, 2 \leq n \leq N-1$, а остальные элементы обращаются в нуль. Для других серий и для исключительных групп матрицы α_{mn} не столь тривиальны (например, $\alpha_{12} = 1, \alpha_{21} = 2$ для $\mathcal{C}_2$), а значит, наш простой подход к решению уравнений Тоды оказывается не применимым напрямую.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Уравнение для A_{mn} в обобщенной мультиэкспоненциальной модели

Рассмотрим симметричные $(N \times N)$ -матрицы A_{mn} , удовлетворяющие условиям

$$A_{kl} = \delta_{kl} A_k, \quad 1 \leq l \leq L, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (90)$$

Для простоты обозначим $A_{L+m, L+n} \equiv B_{mn}$ для $1 \leq m, n \leq M \equiv N - L$, где B_{mn} – произвольная симметричная $(M \times M)$ -матрица. При $L \geq 2$ уравнение связи (38) для A_{mn} принимает следующий простой вид:

$$(A_1 + A_2)D = A_1 \sum_{p=3}^N D_p. \quad (91)$$

Поскольку определители D_p пропорциональны A_1 (ввиду того, что $v_p \cdot v_q \equiv A_1$), правая часть пропорциональна A_1^2 . В соответствии с теоремой, доказанной в разделе 4, уравнение (91) линейно по A_1 , т.е. члены второго порядка по A_1 в обеих частях уравнения должны сокращаться. Следовательно, достаточно найти определитель D . Это можно сделать с помощью индукции по L . При $L = 2, 3, 4$ легко найти, что D можно представить в простом виде

$$D \equiv D(L) = \gamma_2 \left[\delta_M \left(\sum_{l=3}^L \gamma_l + \gamma_1 + \sigma_{M-1} \right) \right] \prod_1^L A_k, \quad (92)$$

где $\gamma_l \equiv A_l^{-1}$, $\delta_M \equiv \det \hat{B}$, а σ_{M-1} – определитель матрицы $\hat{B}''$ размера $(M-1) \times (M-1)$, имеющей следующие матричные элементы:

$$B''_{mn} = B_{mn} - B_{mM} - B_{Mn} + B_{MM}, \quad 1 \leq m, n \leq M-1.$$

Прямое вычисление $D(L+1)$ с применением уравнения (92) позволяет теперь доказать, что выражение (92) справедливо при всех L . Используя его в уравнении (91), получаем

$$(A_1 + A_2)D = \left\{ \left[\delta_M \left(\sum_{l=3}^L \gamma_l + \gamma_1 + \sigma_{M-1} \right) \right] + \delta_M \gamma_2 + A_1 \left(\gamma_2 \sum_{l=3}^L \gamma_l + \sigma_{M-1} \right) \right\} \prod_1^L A_k. \quad (93)$$

Пренебрегая последним членом, который пропорционален A_1^2 , в конце концов получим, что уравнение (91) сводится к красивому соотношению

$$\delta_M \left(\sum_{l=1}^L \gamma_l + \sigma_{M-1} \right) = 0, \quad (94)$$

которое и есть наш окончательный результат.

Предположив (естественным образом), что $\delta_M \neq 0$, получим, что равенство $\sum_{l=1}^L \gamma_l = 0$ возможно тогда и только тогда, когда $\sigma_{M-1} = 0$. Заметим, что для матриц Картана A_N имеем $\sigma_{M-1} \neq 0$. Весьма вероятно, что это выполняется для всех матриц Картана простых групп. В случае общих матриц $\hat{B}$ можно разрешить условие $\sigma_{M-1} = 0$, а потому существует класс матриц $\hat{B}$, в котором $\sum_{l=1}^L \gamma_l = 0$.

Поэтому можно решить связи энергии и импульса для любого заданного решения B -системы (т.е. системы уравнений с определенными выше матрицами A_{mn}), которая, к сожалению, неинтегрируема и не может быть решена аналитически.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Связи энергии и импульса для теории $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$

Покажем теперь, что связи энергии и импульса можно записать по аналогии с уравнениями (67) также и для общего решения теории $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$:

$$\mathcal{U}_1(u) + C_\mu(u) = 0, \quad \mathcal{V}_1(v) + C_\nu(v) = 0. \quad (95)$$

В простейшем примере решения Тоды X_1 и X_2 задаются формулами (22) и (58) при $N = 2$:

$$X_1 = \sum_{i=1}^3 a_i(u) b_i(v), \quad X_2 = \varepsilon_1 \Delta_2(X_1) = \varepsilon_1 \sum_{k=1}^3 W_k \bar{W}_k, \quad (96)$$

где $W_k \equiv W[a_i(u), a_j(u)]$, $\bar{W}_k \equiv W[b_i(v), b_j(v)]$, а (ijk) – циклическая перестановка индексов (123). Связь C_u (см. (24)) эквивалентна соотношению

$$\tilde{C}_u \equiv X_1'' X_2 + X_1 X_2'' - X_1' X_2' - \frac{4X_1 X_2 X_L''}{X_L} = 0, \quad (97)$$

в котором штрих обозначает ∂_u , а X_L – произвольное решение уравнения Лиувилля, удовлетворяющее условию (49), откуда находим

$$\frac{X_L''}{X_L} = \frac{a''(u)}{a(u)} \equiv \alpha(u). \quad (98)$$

Применяя соотношения (96)–(98), легко видеть, что

$$\tilde{C}_u = \sum_{m,k} b_m \bar{W}_k [a_m'' W_k - a_m' W_k' + a_m W_k'' - 4\alpha W_k]. \quad (99)$$

Получим сначала “диагональную” часть этой суммы, применив определение величины W_k и уравнение (53) при $N = 2$:

$$\sum_{m=k} [\dots] = \sum_k b_k \bar{W}_k [(a_i a_j''' - a_i''' a_j) a_k + (a_i'' W_{jk} + a_j'' W_{ki} + a_k'' W_{ij}) - 4\alpha W_k]. \quad (100)$$

В силу определения величины $\mathcal{U}_1(u)$ (см. формулы (54)) найдем, что первый член в квадратных скобках равен $-\mathcal{U}_1(u) a_k W_k$. Второй член в квадратных скобках равен константе w_a , которая представляет собой вронскиан $a_i(u)$ (см. формулы (53)). Сумма $w_a \sum_k b_k \bar{W}_k$ тождественно равна нулю, так как

$$\sum_k b_k \bar{W}_k = (b_1 b_2' - b_1' b_2) b_3 + (b_2 b_3' - b_2' b_3) b_1 + (b_3 b_1' - b_3' b_1) b_2 \equiv 0,$$

а сумма (100) поэтому равна

$$\sum_{m=k} [\dots] = -(\mathcal{U}_1(u) + 4\alpha(u)) \sum_k a_k b_k W_k \bar{W}_k. \quad (101)$$

“Недиагональную” составляющую суммы (99) можно преобразовать к виду

$$\sum_{m \neq k} [\dots] = -(\mathcal{U}_1(u) + 4\alpha(u)) \sum_{m \neq k} a_m b_k W_m \bar{W}_k, \quad (102)$$

применяя при $m \neq k$ очевидные тождества

$$a_m'' W_k - a_m' W_k' + a_m W_k'' = -\mathcal{U}_1(u) a_m(u) W_k. \quad (103)$$

Собирая воедино диагональные и недиагональные составляющие и возвращаясь к X_1 и X_2 , получим, что $\bar{C}_u$ -связь (97) эквивалентна соотношению

$$(\mathcal{U}_1(u) + 4\alpha(u)) X_1 X_2 = 0. \quad (104)$$

Повторив то же самое вычисление для C_v и вспомнив, что $X_1 X_2 \neq 0$, мы завершим доказательство формул (95) с очевидным обозначением $C_\mu(u) \equiv 4\alpha(u)$, $C_\nu(u) \equiv 4\beta(v)$.

Заметим, что число полей Лиувилля в наших вычислениях может быть произвольным. С другой стороны, простота структуры решений $\mathcal{A}_2$ имела существенное значение, а потому наше вычисление трудно напрямую применять к уравнениям типа $\mathcal{A}_N$ с $N \geq 2$.

Благодарности. Один из авторов благодарит за финансовую поддержку отдел теоретической физики университета г. Турина и INFN (секция Турина), где эта работа была завершена. Работа была частично финансово поддержана РФФИ (грант № 06-01-00627_a).

Список литературы

- [1] В. А. Белинский, В. Е. Захаров, *ЖЭТФ*, **75**:6 (1978), 1955–1971.
- [2] D. Maison, *Phys. Rev. Lett.*, **41**:8 (1978), 521–522.
- [3] P. Thomi, B. Isaak, P. Hájíček, *Phys. Rev. D*, **30**:6 (1984), 1168–1177.
- [4] P. Breitenlohner, D. Maison, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **46**:2 (1987), 215–246.
- [5] P. Breitenlohner, D. Maison, G. Gibbons, *Comm. Math. Phys.*, **120**:2 (1988), 295–333.
- [6] M. O. Katanaev, *J. Math. Phys.*, **31**:4 (1990), 882–891.
- [7] T. Banks, M. O’Loughlin, *Nucl. Phys. B*, **362**:3 (1991), 649–664.
- [8] C. G. Callan Jr., S. B. Giddings, J. A. Harvey, A. Strominger, *Phys. Rev. D*, **45**:4 (1992), R1005–R1009.
- [9] J. Gegenberg, G. Kunstatter, D. Louis-Martinez, *Phys. Rev. D*, **51**:4 (1995), 1781–1786.
- [10] M. Cavaglià, V. de Alfaro, A. T. Filippov, *Internat. J. Modern Phys. D*, **4**:5 (1995), 661–672; **5**:3 (1996), 227–250; **6**:1 (1996), 39–47.
- [11] H. Nicolai, D. Korotkin, H. Samtleben, “Integrable classical and quantum gravity”, *Quantum Fields and Quantum Space Time*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B, **364**, eds. G. ’t Hooft, A. Jaffe, G. Mack, P. K. Mitter R. Stora, Plenum, New York, 1997, 203–243; [arXiv: hep-th/9612065](#).
- [12] A. T. Filippov, *Modern Phys. Lett. A*, **11**:21 (1996), 1691–1704; *Internat. J. Modern Phys. A*, **12**:1 (1997), 13–22.
- [13] A. Lukas, B. A. Ovrut, D. Waldram, *Phys. Lett. B*, **393**:1–2 (1997), 65–71.
- [14] F. Larsen, F. Wilczek, *Phys. Rev. D*, **55**:8 (1997), 4591–4595.
- [15] H. Lü, S. Mukherji, C. N. Pope, *Internat. J. Modern Phys. A*, **14**:26 (1999), 4121–4142.

- [16] А. Т. Филиппов, *ЭЧАЯ*, **32**:7 (2001), 78–83; А. Т. Filippov, *ЯФ*, **65**:6 (2002), 997–1001 (in English).
- [17] V. de Alfaro, A. T. Filippov, *Integrable low dimensional theories describing higher dimensional branes, black holes, and cosmologies*, [arXiv: hep-th/0307269](#).
- [18] V. de Alfaro, A. T. Filippov, *Atti Accad. Sci. Torino*, **140** (2007), 139–145; *Integrable low dimensional models for black holes and cosmologies from high dimensional theories*, [arXiv: hep-th/0504101](#).
- [19] Г. А. Алексеев, *ТМФ*, **143**:2 (2005), 278–304; [arXiv: gr-qc/0503043](#).
- [20] А. Т. Филиппов, *ТМФ*, **146**:1 (2006), 115–131; [arXiv: hep-th/0505060](#).
- [21] А. Т. Filippov, “Many faces of dimensional reduction”, *Proceedings of the Workshop “Gribov-75”* (May 22–24, 2005, Budapest, Hungary), eds. Yu. L. Dokshitzer, P. Lévai, J. Nyiri, World Sci., Singapore, 2006, 510.
- [22] A. T. Filippov, *Some unusual dimensional reductions of gravity: geometric potentials, separation of variables, and static-cosmological duality*, [arXiv: hep-th/0605276](#).
- [23] В. Де Альфаро, А. Т. Филиппов, *ТМФ*, **153**:3 (2007), 422–452; [arXiv: hep-th/0612258v2](#).
- [24] A. T. Filippov, *A new integrable model of (1 + 1)-dimensional dilaton gravity coupled to Toda matter*, [arXiv: 0801.1312v2](#).
- [25] J. E. Lidsey, D. Wands, E. J. Copeland, *Phys. Rep.*, **337**:4–5 (2000), 343–492.
- [26] T. Strobl, *Gravity in two spacetime dimensions*, [arXiv: hep-th/0011240](#).
- [27] D. Grumiller, W. Kummer, D. Vassilevich, *Phys. Rep.*, **369**:4 (2002), 327–430.
- [28] M. Gasperini, G. Veneziano, *Phys. Rep.*, **373**:1–2 (2003), 1–212.
- [29] А. Эйнштейн, Н. Розен, “О гравитационных волнах”, В кн.: А. Эйнштейн, *Собрание научных трудов в четырех томах*, Т. II. Работы по теории относительности (1921–1955), Наука, М., 1966, 438–449; N. Rosen, *Phys. Z. Zowjetunion*, **12** (1937), 366–372.
- [30] K. Kuhař, *Phys. Rev. D*, **4** (1971), 986.
- [31] S. Chandrasekhar, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **408**:1835 (1986), 209–232.
- [32] F. J. Ernst, *Phys. Rev.*, **167**:5 (1968), 1175–1178.
- [33] А. Н. Лезнов, *ТМФ*, **42**:3 (1980), 343–349.
- [34] A. N. Leznov, M. V. Saveliev, *Comm. Math. Phys.*, **74**:2 (1980), 111–118.
- [35] А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **51**:1 (1982), 10–21.
- [36] А. Н. Лезнов, М. В. Савельев, *Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем*, Наука, М., 1985.
- [37] A. V. Razumov, M. V. Saveliev, *Lie Algebras, Geometry, and Toda-type Systems*, Cambridge Lecture Notes in Phys., **8**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [38] G. D. Dzordzhadze, A. K. Pogrebkov, M. K. Polivanov, *On the solutions with singularities of the Liouville equation*, Preprint IC/78/126, ICTP, Trieste, 1978.
- [39] J.-L. Gervais, *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:16 (1991), 2805–2827.
- [40] L. Castellani, A. Ceresole, R. D’Auria, S. Ferrara, P. Fré, M. Trigiante, *Nucl. Phys. B*, **527**:1–2 (1998), 142–170.
- [41] K. S. Stelle, “BPS branes in supergravity”, *Quantum Field Theory: Perspective and Prospective*, NATO Sci. Ser. C, **530**, eds. C. DeWitt-Morette, J.-B. Zuber, Kluwer, Dordrecht, 1999, 257–350; [arXiv: hep-th/9803116](#).
- [42] V. D. Ivashchuk, V. N. Melnikov, *Class. Quant. Grav.*, **18**:20 (2001), R87–R152.
- [43] P. Fré, A. S. Sorin, *Nucl. Phys. B*, **733**:3 (2006), 334–355.
- [44] V. de Alfaro, A. T. Filippov, *Two-dimensional dilaton gravity and Toda–Liouville integrable models*, [arXiv: 0811.4501v1](#).