Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Юй-Цинь Яо, Е-Хуэй Хуань, Юнь-Бо Цзен, Двухкомпонентное уравнение Камассы–Холма с самосогласованными источниками и его многосолитонные решения, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 1, 75–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6456>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:46:48

© 2010 г. Юй-Цинь Яо*, Е-Хуэй Хуань†, Юнь-Бо Цзен†

ДВУХКОМПОНЕНТНОЕ УРАВНЕНИЕ КАМАССЫ–ХОЛМА С САМОСОГЛАСОВАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ И ЕГО МНОГОСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Выведены двухкомпонентное уравнение Камассы–Холма с самосогласованными источниками и его представление Лакса. Для этого уравнения построены законы сохранения и представлены многосолитонные решения.

Ключевые слова: двухкомпонентное уравнение Камассы–Холма с самосогласованными источниками, преобразование по решению, преобразование Дарбу, солитон.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегрируемое уравнение Камассы–Холма (КХ)

$$u_t + \kappa u_x - u_{xxt} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0 \quad (1)$$

было выведено в работах [1], [2] как волновое уравнение в мелкой воде. Здесь $u = u(x, t)$ – скорость жидкости в направлении x , а постоянная κ связана с критической скоростью волны на мелкой воде. Это уравнение впервые появилось в работе [3] по теории наследственных симметрий солитонных уравнений. Благодаря своему содержательному физическому смыслу [1], а также таким особым свойствам, как возможность применения подхода обратного рассеяния, существование пары Лакса [1], бигамильтоновой структуры [3], [4], солитонного и пиконного решений [5]–[10], уравнение КХ привлекло большое внимание.

Уравнение КХ допускает множество интегрируемых многокомпонентных обобщений [11], [12]. Двухкомпонентное обобщение уравнения КХ, называемое двухкомпонентным уравнением Камассы–Холма (далее уравнение 2-КХ), выглядит следующим образом [13], [14]:

$$m_t + U m_x + 2mU_x - \rho \rho_x = 0, \quad (2a)$$

$$\rho_t + (\rho U)_x = 0, \quad (2б)$$

*Department of Applied Mathematics, China Agricultural University, Beijing, China.
E-mail: yqyao@math.tsinghua.edu.cn

†Department of Mathematics, Tsinghua University, Beijing, China.
E-mail: huangyh@mails.tsinghua.edu.cn, yzeng@math.tsinghua.edu.cn

где $m = U - U_{xx} + \kappa/2$. При $\rho = 0$ это уравнение сводится к уравнению КХ (1). Система (2) изначально появилась в статье [15], в работе [16] уравнение 2-КХ также было выведено в контексте теории мелкой воды. В работе [14] было получено преобразование, сопоставляющее уравнению (2) первый отрицательный поток иерархии АКНС, и таким образом для уравнения 2-КХ выведены решения типа мультикинка и движущегося пикона, а в работе [17] многосолитонные решения уравнения (2) были получены с помощью преобразований Дарбу (ПД). Математические свойства этого уравнения изучались во множестве работ (см., например, [18]–[20]).

Солитонные уравнения с самосогласованными источниками (СУСИ) представляют собой важные интегрируемые модели во многих областях физики – гидродинамике, физике твердого тела, физике плазмы и т.д. [21]–[25]. Например, уравнение Кортевега–де Фриза с самосогласованными источниками (КдФСИ) описывает взаимодействие длинных и коротких гравитационно-капиллярных волн [21]. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили с самосогласованными источниками описывает взаимодействие длинной волны с коротким волновым пакетом, распространяющимся в плоскости (x, y) , под некоторым углом друг к другу [22]. У СУСИ имеются представления Лакса [25], [26] и бигамильтонова структура [27]. Стационарная система СУСИ приводит к интегрируемому связанному потоку [25], [26]. Ее можно решить с помощью обобщенного бинарного ПД [26], [28] и обратного преобразования рассеяния [21], [22], [29], у нее есть солитонное, позитонное, негатонное и пиконное решения [26], [28]–[30].

В нашей статье мы рассматриваем не изучавшееся ранее двухкомпонентное уравнение Камассы–Холма с самосогласованными источниками (уравнение 2-КХСИ). Поскольку, как и уравнение КдФ, уравнение 2-КХ возникает в теории мелкой воды, имеет смысл подумать о возможном приложении уравнения 2-КХСИ, а именно о том, что оно может описывать взаимодействие длинных и коротких волн подобно уравнению КдФСИ. Его также можно рассматривать как уравнение 2-КХ с неоднородными членами.

Настоящая статья построена следующим образом. В разделе 2 выведено уравнение 2-КХСИ и получено для него представление Лакса. Это означает, что данное уравнение интегрируемо. В разделе 3 строятся законы сохранения для уравнения 2-КХСИ. В разделе 4 мы применяем к уравнению 2-КХСИ преобразование по решению и получаем новую форму этого уравнения. В разделе 5, применяя метод вариации постоянных к решениям уравнения 2-КХ и его собственным функциям и используя преобразование по решению, мы строим многосолитонные решения уравнения 2-КХСИ.

2. УРАВНЕНИЕ 2-КХСИ И ЕГО ПАРА ЛАКСА

2.1. Уравнение 2-КХСИ. В этом пункте мы выведем уравнение 2-КХСИ. Рассмотрим следующую спектральную задачу [14]:

$$\psi_{xx} = \left(\frac{1}{4} - m\lambda + \rho^2 \lambda^2 \right) \psi, \quad (3a)$$

$$\psi_t = -\frac{1}{2} B_x \psi + B \psi_x, \quad B = -\frac{1}{2\lambda} - U. \quad (3b)$$

Условие совместности уравнений (3а) и (3б) приводит к уравнению 2-КХ (2), которое можно переписать как

$$\left(\begin{matrix} m \\ \rho^2 \end{matrix}\right)_t = J \begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta m} \\ \frac{\delta H}{\delta \rho^2} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$H = \frac{1}{2} \int (U^2 + U_x^2 - \rho^2) dx, \quad J = \begin{pmatrix} -\partial m - m\partial & -\partial \rho^2 - \rho^2 \partial \\ -\partial \rho^2 - \rho^2 \partial & 0 \end{pmatrix},$$

J – оператор Гамильтона.

Для различных действительных $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\psi_{j,xx} = \left(\frac{1}{4} - m\lambda_j + \rho^2 \lambda_j^2\right) \psi_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Легко заметить, что

$$\frac{\delta \lambda_j}{\delta m} = \lambda_j \psi_j^2, \quad \frac{\delta \lambda_j}{\delta \rho^2} = -\lambda_j^2 \psi_j^2.$$

Согласно подходу, предложенному в статьях [24]–[27], уравнение 2-КХСИ определяется задачей (5) и равенством

$$\left(\begin{matrix} m \\ \rho^2 \end{matrix}\right)_t = J \left(\begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta m} \\ \frac{\delta H}{\delta \rho^2} \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} \frac{\delta \lambda_j}{\delta m} \\ \frac{\delta \lambda_j}{\delta \rho^2} \end{pmatrix} \right), \quad (6)$$

которое приводит к уравнениям

$$m_t = -2mU_x - m_x U + \rho \rho_x + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\psi_{j,x}^2 - \psi_{j,xx}^2), \quad (7a)$$

$$\rho_t = -(\rho U)_x + \sum_{j=1}^N \lambda_j (\rho \psi_j^2)_x, \quad (7б)$$

$$\psi_{j,xx} = \left(\frac{1}{4} - m\lambda_j + \rho^2 \lambda_j^2\right) \psi_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (7в)$$

2.2. Пара Лакса для уравнения 2-КХСИ. Сравнив уравнение 2-КХСИ с уравнением 2-КХ, можно предположить, что представление Лакса для уравнения 2-КХСИ (7) имеет вид

$$\psi_{xx} = \left(\frac{1}{4} - m\lambda + \rho^2 \lambda^2\right) \psi, \quad (8a)$$

$$\psi_t = -\frac{1}{2} B_x \psi + B \psi_x, \quad (8б)$$

$$B = -\frac{1}{2\lambda} - U + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j f(\psi_j)}{\lambda - \lambda_j} + \sum_{j=1}^N \beta_j f(\psi_j), \quad (8в)$$

где $f(\psi_j)$ – неопределенная функция от ψ_j . Условие совместности уравнений (8а) и (8б) дает

$$-m_t\lambda + (\rho^2)_t\lambda^2 = LB - (2B_x m + Bm_x)\lambda + 2(B_x\rho^2 + B\rho\rho_x)\lambda^2, \quad L = \frac{-\partial^3 + \partial}{2}. \quad (9)$$

Тогда из уравнений (8в) и (9) мы имеем

$$\begin{aligned} -m_t\lambda + (\rho^2)_t\lambda^2 = & -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{\lambda - \lambda_j} \left[f''' \psi_{j,x}^3 + 3(f''\psi_j - f') \left(\frac{1}{4} - m\lambda_j + \rho^2\lambda_j^2 \right) \psi_{j,x} + \right. \\ & + 2(-m_x\lambda_j + 2\rho\rho_x\lambda_j^2) \left(\frac{1}{2}f'\psi_j - f \right) \left. \right] + \left(-2\rho^2 U_x - 2U\rho\rho_x + \right. \\ & + 2\rho^2 \sum_{j=1}^N \beta_j \psi_{j,x} f' + 2\rho\rho_x \sum_{j=1}^N \beta_j f \left. \right) \lambda^2 + \left(2mU_x + Um_x - \rho\rho_x - \right. \\ & - 2m \sum_{j=1}^N \beta_j \psi_{j,x} f' - m_x \sum_{j=1}^N \beta_j f + 2\rho^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j f' \psi_{j,x} + 2\rho\rho_x \sum_{j=1}^N \alpha_j f \left. \right) \lambda - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[\beta_j \left(\frac{1}{4} - m\lambda_j + \rho^2\lambda_j^2 \right) (3f''\psi_j + f') \psi_{j,x} + \beta_j f' (-m_x\lambda_j + 2\rho\rho_x\lambda_j^2) \psi_j + \right. \\ & \left. + (-\beta_j + 4m\alpha_j - 4\rho^2\alpha_j\lambda_j) f' \psi_{j,x} + 4\rho\rho_x (m_x - \lambda_j) \alpha_j f \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Здесь f' обозначает частную производную функции f по переменной ψ_j . Чтобы определить f , α_j и β_j , мы сравниваем в левой и правой частях равенства коэффициенты при $1/(\lambda - \lambda_j)$, λ^2 , λ и λ^0 . Сначала рассмотрим коэффициенты при $1/(\lambda - \lambda_j)$. Коэффициенты для $\psi_{j,x}^3$, $\psi_{j,x}$ и остальных членов дают соответственно

$$f''' = 0, \quad f''\psi_j - f' = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}f'\psi_j - f = 0. \quad (11)$$

Отсюда мы получаем, что $f = \psi_j^2$. Подстановка $f = \psi_j^2$ в коэффициент при λ^2 дает $\rho_t = -(\rho U)_x + \sum_{j=1}^N \beta_j (\rho \psi_j^2)_x$. Сравнив это уравнение с уравнением (7б), мы можем определить, что $\beta_j = \lambda_j$. Подстановка $f = \psi_j^2$ и $\beta_j = \lambda_j$ в коэффициент при λ дает

$$m_t = -2mU_x - Um_x + \rho\rho_x + \sum_{j=1}^N \left[4(\lambda_j m - \alpha_j \rho^2) \psi_j \psi_{j,x} + (\lambda_j m_x - 2\alpha_j \rho\rho_x) \right] \psi_j^2.$$

С другой стороны, уравнения (7а) и (7в) приводят к

$$m_t = -2mU_x - Um_x + \rho\rho_x + \sum_{j=1}^N [4(\lambda_j m - \lambda_j^2 \rho^2) \psi_j \psi_{j,x} + (\lambda_j m_x - 2\lambda_j^2 \rho\rho_x)] \psi_j^2.$$

Из этих двух уравнений мы получаем, что $\alpha_j = \lambda_j^2$. Подставляя равенства $f = \psi_j^2$, $\alpha_j = \lambda_j^2$ и $\beta_j = \lambda_j$ в коэффициент при λ^0 , находим, что он просто равен нулю.

Таким образом мы получили пару Лакса для уравнения 2-КХСИ (7):

$$\psi_{xx} = \left(\frac{1}{4} - m\lambda + \rho^2 \lambda^2 \right) \psi, \quad (12a)$$

$$\psi_t = \frac{U_x}{2} \psi - \left(\frac{1}{2\lambda} + U \right) \psi_x + \sum_{j=1}^N \frac{\lambda \lambda_j \psi_j}{\lambda - \lambda_j} (\psi_j \psi_x - \psi_{j,x} \psi). \quad (12b)$$

3. БЕСКОНЕЧНЫЙ НАБОР ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ 2-КХСИ

В данном разделе мы найдем законы сохранения с помощью хорошо известного метода. Сначала мы предположим, что функции m , U , ρ , а также ψ_j и их производные стремятся к нулю, когда $|x| \rightarrow \infty$. Положим $\Gamma = \psi_x / \psi$, тогда из равенства

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial t} \right)$$

следует, что

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_t}{\psi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U_x}{2} - \sum_{j=1}^N \frac{\lambda \lambda_j}{\lambda - \lambda_j} \psi_j \psi_x + \left(-\frac{1}{2\lambda} - U + \sum_{j=1}^N \frac{\lambda \lambda_j}{\lambda - \lambda_j} \psi_j^2 \right) \Gamma \right]. \quad (13)$$

Используя уравнение (12a), получаем

$$\Gamma_x = \frac{1}{4} - m\lambda + \rho^2 \lambda^2 - \Gamma^2. \quad (14)$$

Пусть

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \lambda^{1-k}, \quad \frac{U_x}{2} - \sum_{j=1}^N \frac{\lambda \lambda_j}{\lambda - \lambda_j} \psi_j \psi_x + \left(-\frac{1}{2\lambda} - U + \sum_{j=1}^N \frac{\lambda \lambda_j}{\lambda - \lambda_j} \psi_j^2 \right) \Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k \lambda^{1-k}.$$

Используя соотношения (13), (14), мы можем вывести законы сохранения для уравнения 2-КХСИ путем приравнивания коэффициентов при λ^{-n} . Таким образом мы можем найти, что сохраняющиеся плотности μ_k и поток законов сохранения ν_k удовлетворяют следующим рекурсивным соотношениям:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \rho, & \mu_1 &= -\frac{\rho_x + m}{2\rho}, \\ \mu_2 &= -\left(\frac{m}{4\rho^2} \right)_x - \left(\frac{\rho_x}{4\rho^2} \right)_x + \frac{m^2 - \rho_x^2 - \rho^2}{8\rho^3}, \\ \mu_k &= -\frac{(\mu_{k-1})_x + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i \mu_{k-1-i}}{2\mu_0}, & k &\geq 3, \end{aligned} \quad (15)$$

и

$$\begin{aligned}
\nu_0 &= \left(-U + \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_j^2 \right) \rho, \\
\nu_1 &= \frac{U_x}{2} - \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_j \psi_{j,x} + \left(-\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 \psi_j^2 \right) \rho - \left(-U + \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_j^2 \right) \frac{\rho_x + m}{2\rho}, \\
\nu_2 &= -\sum_{j=1}^N \lambda_j^2 \psi_j \psi_{j,x} + \rho \sum_{j=1}^N \lambda_j^3 \psi_j^2 - \frac{1}{4} \left(2 \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 \psi_j^2 - 1 \right) \frac{\rho_x + m}{\rho} + \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_j^2 - U \right) \left[-\left(\frac{m + \rho_x}{\rho^2} \right)_x + \frac{m^2 - \rho_x^2 - \rho^2}{2\rho^3} \right], \\
\nu_k &= -\frac{1}{2} \mu_{k-1} + \left(-U + \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_j^2 \right) \mu_k + \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=1}^N (\lambda_j^{2+i} \psi_j^2) \mu_{k-1-i} - \sum_{j=1}^N \lambda_j^k \psi_j \psi_{j,x}, \quad k \geq 3.
\end{aligned} \tag{16}$$

Прямое вычисление приводит к следующим сохраняющимся величинам для уравнения 2-КХСИ (7):

$$H_{-1} = \int \rho \, dx, \tag{17a}$$

$$H_{-2} = -\frac{1}{2} \int \frac{m}{\rho} \, dx, \tag{17b}$$

$$H_{-3} = \frac{1}{8} \int \left(\frac{m^2 - \rho_x^2}{\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right) dx \tag{17c}$$

и т.д.

4. ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ 2-КХСИ

С помощью обратного преобразования $dy = \rho \, dx - \rho U \, ds$, $ds = dt$, вводя обозначение $\phi = \sqrt{\rho} \psi$, мы преобразуем уравнение 2-КХ (2) в следующую систему [14]:

$$v_s = -\rho_y, \tag{18a}$$

$$2u_s = -2v\rho_y + \rho v_y, \tag{18b}$$

$$\rho_{yy} - 4\rho_y u - 2\rho u_y = 0, \tag{18c}$$

пара Лакса для которой записывается как

$$\phi_{yy} = (\lambda^2 + \lambda v + u)\phi, \tag{19a}$$

$$\phi_s = -\frac{\rho}{2\lambda} \phi_y + \frac{\rho_y}{4\lambda} \phi, \tag{19b}$$

где

$$v = -\frac{m}{\rho^2}, \quad u = \frac{1}{4\rho^2} + \frac{\rho_{yy}}{2\rho} - \frac{\rho_y^2}{4\rho^2}. \tag{20}$$

Теперь рассмотрим преобразование по решению для уравнения 2-КХСИ (7). Из уравнения (76) видно, что 1-форма

$$\omega = \rho dx + \left(-\rho U + \sum_{j=1}^N \lambda_j \rho \psi_j^2 \right) dt \quad (21)$$

замкнута, так что можно определить преобразование по решению $(x, t) \rightarrow (y, s)$ с помощью соотношений

$$dy = \rho dx + \left(-\rho U + \sum_{j=1}^N \lambda_j \rho \psi_j^2 \right) ds, \quad ds = dt. \quad (22)$$

В результате мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} + \left(-\rho U + \sum_{j=1}^N \lambda_j \rho \psi_j^2 \right) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (23)$$

После введения обозначения $\varphi_j = \sqrt{\rho} \psi_j$ и использования соотношений (20) система 2-КХСИ (7) преобразуется к следующему новому виду:

$$v_s = -\rho_y + 2 \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 \varphi_{j,y}^2, \quad (24a)$$

$$2u_s = -2v\rho_y + \rho v_y + 4 \sum_{j=1}^N \lambda_j^3 \varphi_{j,y}^2 + 4 \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 v \varphi_{j,y}^2 + 2 \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 v_x \varphi_{j,y}^2, \quad (24б)$$

$$\rho_{yyy} - 4\rho_y u - 2\rho u_y = 0, \quad (24в)$$

$$\varphi_{j,yy} = (\lambda_j^2 + \lambda_j v + u) \varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (24г)$$

а пара Лакса соответственно переписывается как

$$\varphi_{yy} = (\lambda^2 + \lambda v + u) \varphi, \quad (25a)$$

$$\varphi_s = -\frac{\rho}{2\lambda} \varphi_y + \frac{\rho_y}{4\lambda} \varphi + \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j^2 \varphi_j}{\lambda - \lambda_j} (\varphi_j \varphi_y - \varphi_{j,y} \varphi). \quad (25б)$$

Уравнения (24) можно рассматривать как уравнения (18) с самосогласованными источниками. Чтобы получить многосолитонные решения системы 2-КХСИ (7), нам нужно найти отношение между переменными (y, s) и переменными (x, t) . Из обратного преобразования имеем

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = U - \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_j^2. \quad (26)$$

Используя условие совместности этих двух уравнений, получаем

$$x(y, s) = \int \frac{dy}{\rho(y, s)}.$$

В результате решения системы 2-КХСИ (7) в переменных (y, s) даются формулами

$$\psi_j(y, s) = \frac{\varphi_j}{\sqrt{\rho}}, \quad (27a)$$

$$U(y, s) = -\rho^2 v - \rho_{ys} + \frac{\rho_y \rho_s}{\rho} + \rho \rho_y \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_{j,y}^2 + \rho^2 \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_{j,yy}^2 - \frac{\kappa}{2}, \quad (27\text{б})$$

$$x(y, s) = \int \frac{dy}{\rho}, \quad \rho = \rho(y, s). \quad (27\text{в})$$

Докажем второе из этих соотношений. Используя равенство $m = U - U_{xx} + \kappa/2$ и преобразование по решению (23), мы приходим к

$$U = m + \rho \rho_y U_y + \rho^2 U_{yy} - \frac{\kappa}{2}. \quad (28)$$

Вновь применяя преобразование (23), а также уравнение (76), получаем

$$U_y = -\frac{\rho_s}{\rho^2} + \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_{j,y}^2.$$

Подстановка этого соотношения и первого уравнения из (20) в (28) приводит к (27б).

5. МНОГОСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ 2-КХСИ

Если (u_0, v_0, ρ_0, ϕ) – известное решение системы уравнений (18), (19), функция h_0 удовлетворяет уравнениям

$$h_{0,yy} = (\lambda_1^2 + \lambda_1 v_0 + u_0) h_0, \quad h_{0,s} = -\frac{\rho_0}{2\lambda_1} h_{0,y} + \frac{\rho_{0,y}}{4\lambda_1} h_0 \quad (29)$$

и $c_0 = 1/\sqrt{2h_{0,y}/h_0 - 2\lambda_1 - v_0}$, то существует ПД [17] для системы (18), (19):

$$\phi_1 = c_0 \left[\phi_y + \left(\lambda_1 - \lambda - \frac{h_{0,y}}{h_0} \right) \phi \right], \quad (30\text{а})$$

$$u_1 = u_0 + 2 \left(\frac{h_{0,y}}{h_0} \right)^2 - \frac{2h_{0,yy}}{h_0} + \frac{2(\lambda_1 - h_{0,y}/h_0)c_{0,y} + c_{0,yy}}{c_0}, \quad (30\text{б})$$

$$v_1 = v_0 - \frac{2c_{0,y}}{c_0}, \quad (30\text{в})$$

$$\rho_1 = \rho_0 + \frac{2c_{0,s}}{c_0}, \quad (30\text{г})$$

т.е. функции u_1, v_1, ρ_1, ϕ_1 тоже удовлетворяют (18) и (19).

Пусть функции v_0 и ρ_0 постоянны, а $u_0 = 1/4\rho_0^2$, тогда из (29) получим, что $h_0 = \text{ch } \xi_1$, $\phi = \text{sh } \xi$. Здесь и далее мы используем обозначения

$$\begin{aligned} \xi &= k(2\lambda y - s\rho_0 + \alpha), & k &= \frac{\sqrt{4\rho_0^2\lambda^2 + 4v_0\rho_0^2\lambda + 1}}{4\rho_0\lambda}, \\ \xi_i &= k_i(2\lambda_i y - s\rho_0 + \alpha_i), & k_i &= \frac{\sqrt{4\rho_0^2\lambda_i^2 + 4v_0\rho_0^2\lambda_i + 1}}{4\rho_0\lambda_i}, \end{aligned} \quad (31)$$

где α, α_i – произвольные постоянные. Тогда равенства (30) приводят к односолитонному решению (18) и соответствующей собственной функции системы (18), (19), [17]:

$$v_1(y, s) = v_1(\xi_1) = v_0 \frac{8k_1^2\lambda_1^2 \text{sech}^2 \xi_1}{v_0 + 2\lambda_1 - 4k_1\lambda_1 \text{th } \xi_1}, \quad (32\text{а})$$

$$\rho_1(y, s) = \rho_1(\xi_1) = \rho_0 - \frac{4k_1^2 \lambda_1 \rho_0 \operatorname{sech}^2 \xi_1}{v_0 + 2\lambda_1 - 4k_1 \lambda_1 \operatorname{th} \xi_1}, \quad (326)$$

$$u_1(y, s) = u_1(\xi_1) = \frac{1 - \rho_{1,y}^2}{4\rho_1^2} + \frac{\rho_{1,yy}}{2\rho_1}, \quad (32B)$$

$$\phi_1(y, s, \lambda) = \phi_1(\xi_1, \lambda) = \frac{2k\lambda \operatorname{ch} \xi + (\lambda_1 - \lambda - 2k_1 \lambda_1 \operatorname{th} \xi_1) \operatorname{sh} \xi}{\sqrt{-v_0 - 2\lambda_1 + 4k_1 \lambda_1 \operatorname{th} \xi_1}}. \quad (32Г)$$

Поскольку уравнения (24) можно рассматривать как уравнения (18) с неоднородными членами, а ϕ_1 удовлетворяет уравнению (25a) при $\lambda = \lambda_1$, мы можем применить метод вариации постоянных для нахождения решения уравнения 2-КХСИ (24), используя решение (32) уравнения 2-КХ (18) и соответствующую собственную функцию. Возьмем α_i в (31) как зависящие от времени функции $\alpha_i(s)$, положим $\bar{\xi}_i = k_i(2y\lambda_i - s\rho_0 + \alpha_i(s))$ и потребуем, чтобы функции $\bar{v}_1 = v_1(\bar{\xi}_1)$, $\bar{\rho}_1 = \rho_1(\bar{\xi}_1)$, $\bar{u}_1 = u_1(\bar{\xi}_1)$ (т.е. функции (32), в которых произведена замена $\xi \rightarrow \bar{\xi}$) и функция $\varphi_1 = \beta(s)\phi_1(\bar{\xi}_1, \lambda_1)$ удовлетворяли системе (24) для $N = 1$.

Мы находим, что $\alpha_1(s)$ может быть произвольной функцией от s и

$$\beta_1(s) = \sqrt{\frac{\alpha'_1(s)}{2\lambda_1^3}}. \quad (33)$$

Таким образом, односолитонное решение системы 2-КХСИ (7) при $N = 1$ получается в переменных (y, s) из соотношений (27):

$$\rho_1(y, s) = \rho_0 - \frac{4k_1^2 \lambda_1 \rho_0 \operatorname{sech}^2 \bar{\xi}_1}{v_0 + 2\lambda_1 - 4k_1 \lambda_1 \operatorname{th} \bar{\xi}_1}, \quad (34a)$$

$$U_1(y, s) = -\frac{\rho_0^2[v_0^2 \operatorname{ch}^2 \bar{\xi}_1 + 2v_0 \lambda_1(\operatorname{ch}^2 \bar{\xi}_1 - k_1 \operatorname{sh}(2\bar{\xi}_1) - 6k_1^2) + 8k_1^2 \lambda_1^2(4k_1^2 - 1)]}{v_0 \operatorname{ch}^2 \bar{\xi}_1 + \lambda_1(1 + \operatorname{ch}(2\bar{\xi}_1) - 2k_1 \operatorname{sh}(2\bar{\xi}_1) - 4k_1^2)}, \quad (346)$$

$$\psi_1(y, s) = \frac{\sqrt{2\alpha'_1(s)} k_1 \lambda_1 \operatorname{sech} \bar{\xi}_1}{\sqrt{-\lambda_1^3 \rho_0[v_0 + \lambda_1(2 - 4k_1^2 \operatorname{sech}^2 \bar{\xi}_1 - 4k_1 \operatorname{th} \bar{\xi}_1)]}}, \quad (34B)$$

$$x(y, s) = \frac{1}{\rho_0} \left[y + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\lambda_1}(2k_1 \operatorname{tg} \bar{\xi}_1 - 1)}{\sqrt{v_0 + \lambda_1(1 - 4k_1^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_1} \sqrt{v_0 + \lambda_1(1 - 4k_1^2)}} + \frac{\alpha_1(s) - s\rho_0}{2\lambda_1} \right]. \quad (34Г)$$

На рис. 1 приведены односолитонные решения ρ_1 , U_1 и собственная функция ψ_1 при определенном выборе параметров v_0 , w_0 , λ_1 , $\alpha_1(s)$, t .

Используя (30) многократно и получив $u_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $v_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $\rho_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $\phi_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \lambda)$, мы переписываем n -кратное ПД для системы (18), (19) следующим образом:

$$h_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \phi_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \lambda_n), \quad (35a)$$

$$c_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{\sqrt{2h_{n-1,y}/h_{n-1} - 2\lambda_n - v_{n-1}}}, \quad (356)$$

$$\phi_n(\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda) = c_{n-1} \left[\phi_{n-1,y} + \left(\lambda_n - \lambda - \frac{h_{n-1,y}}{h_{n-1}} \right) \phi_{n-1} \right], \quad (35B)$$

$$u_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = u_{n-1} + 2 \left(\frac{h_{n-1,y}}{h_{n-1}} \right)^2 - \frac{2h_{n-1,yy}}{h_{n-1}} + \frac{2(\lambda_n - h_{n-1,y}/h_{n-1})c_{n-1,y} + c_{n-1,yy}}{c_{n-1}}, \quad (35\Gamma)$$

$$v_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = v_{n-1} - \frac{2c_{n-1,y}}{c_{n-1}}, \quad (35\Delta)$$

$$\rho_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \rho_{n-1} + \frac{2c_{n-1,s}}{c_{n-1}}. \quad (35\epsilon)$$

Например, при $n = 2$ мы берем

$$h_1(\xi_1, \xi_2) = \phi_1(\xi_1, \lambda_2) = \frac{2k_2\lambda_2 \operatorname{ch} \xi_2 + (\lambda_1 - \lambda_2 - 2k_1\lambda_1 \operatorname{th} \xi_1) \operatorname{sh} \xi_2}{\sqrt{-v_0 + \lambda_1(-2 + 4k_1 \operatorname{th} \xi_1)}}; \quad (36)$$

далее, используя (32), можно получить двухсолитонное решение системы (18), (19) из (35):

$$\begin{aligned} u_2(y, s) &= u_2(\xi_1, \xi_2), & v_2(y, s) &= v_2(\xi_1, \xi_2), \\ \rho_2(y, s) &= \rho_2(\xi_1, \xi_2), & \phi_2(y, s, \lambda) &= \phi_2(\xi_1, \xi_2, \lambda). \end{aligned}$$

Аналогично односолитонному случаю можно применить метод вариации постоянных, чтобы найти двухсолитонное решение уравнения (24) с $n = 2$, заменив ξ_1 и ξ_2 на $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$,

$$\bar{u}_2 = u_2(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2), \quad \bar{v}_2 = v_2(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2), \quad \bar{\rho}_2 = \rho_2(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2), \quad (37)$$

и положив

$$\varphi_i = \sqrt{\frac{\alpha'_i(s)}{2\lambda_i^3}} \phi_2(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \lambda_i), \quad i = 1, 2. \quad (38)$$

Заметим, что решение (37), (38) содержит произвольные функции $\alpha_j(s)$. Это означает, что введение источников в солитонное уравнение может привести к изменению скорости солитона. Поэтому динамика решений уравнения 2-КХСИ оказывается гораздо богаче динамики решений уравнения 2-КХ. На рис. 2 показано, что взаимодействие двухсолитонного решения для $\bar{v}_2$, $-\bar{\rho}_2$ и $-\varphi_2$ — это упругое столкновение. Сравнивая рис. 2 и рис. 3, можно понять, как влияет выбор различных $\alpha_j(s)$ на вид двухсолитонного решения для $\bar{v}_2$ и $-\bar{\rho}_2$.

Рис. 1. Односолитонные решения для ρ_1 , U_1 и собственная функция ψ_1 при $v_0 = 1$, $w_0 = 2$, $\lambda_1 = -1$, $\alpha_1(s) = -4s$, $t = -1$.

Рис. 2. Двухсолитонное решение для $\bar{v}_2$, $-\bar{\rho}_2$ и $-\varphi_2$ при $v_0 = -2$, $w_0 = 1$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1.5$, $\alpha_1(s) = -16s$, $\alpha_2(s) = -4s$.

Рис. 3. Двухсолитонное решение для $\bar{v}_2$, $-\bar{\rho}_2$ при $v_0 = -2$, $w_0 = 1$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1.5$, $\alpha_1(s) = -8s$, $\alpha_2(s) = -e^{s/3} \cos s$.

Используя ПД (35) и применяя метод вариации постоянных, чтобы найти многосолитонное решение системы (24), можно получить многосолитонное решение уравнения 2-КХСИ (7) в переменных (y, s) из (27):

$$\bar{v}_n(y, s) = v_n(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n), \quad (39a)$$

$$\bar{\rho}_n(y, s) = \rho_n(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n), \quad (39б)$$

$$\begin{aligned} U_n(y, s) = & \frac{1}{c_{n-1}^3(c_{n-1}\rho_{n-1} + 2c_{n-1,s})} \left\{ 20c_{n-1,s}^3c_{n-1,y} - 2c_{n-1}^2(6c_{n-1}v_{n-1}c_{n-1,s}^2 - \right. \\ & - 6\rho_{n-1}^2c_{n-1,s}c_{n-1,y} + c_{n-1,s}c_{n-1,y}\rho_{n-1,s} - c_{n-1,ss}c_{n-1,y} + \\ & + c_{n-1,s}^2\rho_{n-1,y} - 2c_{n-1,s}c_{n-1,ys} - 2c_{n-1,ss}c_{n-1,ys}) - \\ & - 4c_{n-1}c_{n-1,s}[2v_{n-1}c_{n-1,s}^2c_{n-1,ss}c_{n-1,y} + \\ & + c_{n-1,s}((1 - 6\rho_{n-1})c_{n-1,y} + c_{n-1,ys})] - \\ & - c_{n-1}^4(v_{n-1}\rho_{n-1}^3 - \rho_{n-1,y}\rho_{n-1,s} + \rho_{n-1,ys}) + \\ & + 2c_{n-1}^3(-3v_{n-1}\rho_{n-1}^3c_{n-1,s} + \rho_{n-1}^3c_{n-1,y} + c_{n-1,ss}\rho_{n-1,y} + \\ & + \rho_{n-1,s}c_{n-1,ys} - c_{n-1,yss}) \left. \right\} + \rho_{n-1}\rho_{n-1,y} \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_{n,y}^2 + \\ & + \rho_{n-1}^2 \sum_{j=1}^N \lambda_j (\psi_{n,y}^2)_{yy}, \end{aligned} \quad (39B)$$

$$\psi_j(y, s) = \sqrt{\frac{\alpha'_j(s)}{2\lambda_j^3}} \frac{1}{\bar{\rho}_n} \phi_n(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n, \lambda_j), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (39\text{г})$$

$$x(y, s) = \int \frac{dy}{\bar{\rho}_n}. \quad (39\text{д})$$

Благодарности. Работа была поддержана National Basic Research Programm of China (973 Program, project № 2007CB814800) и National Natural Science Foundation of China (projects № 10801083, 10901090).

Список литературы

- [1] R. Camassa, D. D. Holm, *Phys. Rev. Lett.*, **71**:11 (1993), 1661–1664.
- [2] R. Camassa, D. D. Holm, J. M. Hyman, *Adv. Appl. Mech.*, **31** (1994), 1–33.
- [3] B. Fuchssteiner, A. S. Fokas, *Physica D*, **4**:1 (1981), 47–66.
- [4] A. Constantin, V. S. Gerdjikov, R. I. Ivanov, *Inverse Probl.*, **22**:6 (2006), 2197–2207.
- [5] A. Parker, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **460**:2050 (2004), 2929–2957.
- [6] A. Constantin, W. Strauss, *Comm. Pure Appl. Math.*, **53**:5 (2000), 603–610.
- [7] R. Beals, D. H. Sattinger, J. Szmigielski, *Inverse Probl.*, **15**:1 (1999), L1–L4.
- [8] A. Constantin, *Invent. Math.*, **166**:3 (2006), 523–535.
- [9] R. S. Johnson, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **459**:2035 (2003), 1687–1708.
- [10] Y. S. Li, J. E. Zhang, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **460**:2049 (2004), 2617–2627.
- [11] A. B. Shabat, L. Martínez Alonso, “On the prolongation of a hierarchy of hydrodynamic chains”, *New Trends in Integrability, Partial Solvability*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **132**, eds. A. B. Shabat, A. González-López, M. Mañas, L. Martinez Alonso M. A. Rodriguez, Kluwer, Dordrecht, 2004, 263–280.
- [12] R. I. Ivanov, *Z. Naturforsch. A*, **61a** (2006), 133–138; [arXiv: nlin/0601066](#).
- [13] S.-Q. Liu, Y. Zhang, *J. Geom. Phys.*, **54**:4 (2005), 427–453.
- [14] M. Chen, S.-Q. Liu, Y. Zhang, *Lett. Math. Phys.*, **75**:1 (2006), 1–15.
- [15] P. J. Olver, P. Rosenau, *Phys. Rev. E*, **53**:2 (1996), 1900–1906.
- [16] A. Constantin, R. I. Ivanov, *Phys. Lett. A*, **372**:48 (2008), 7129–7132.
- [17] J. Lin, B. Ren, H.-mei Li, Y.-shen Li, *Phys. Rev. E*, **77**:3 (2008), 036605.
- [18] H. Aratyn, J. F. Gomes, A. H. Zimerman, *J. Phys. A*, **39**:5 (2006), 1099–1114.
- [19] G. Falqui, *J. Phys. A*, **39**:2 (2006), 327–342.
- [20] J. Escher, O. Lechtenfeld, Z. Yin, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **19**:3 (2007), 493–513.
- [21] V. K. Mel’nikov, *Phys. Lett. A*, **133**:9 (1988), 493–496.
- [22] V. K. Mel’nikov, *Comm. Math. Phys.*, **126**:1 (1989), 201–215.
- [23] J. Leon, A. Latifi, *J. Phys. A*, **23**:8 (1990), 1385–1403.
- [24] D. J. Kaup, *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987), 2063–2066.
- [25] Y. Zeng, *Physica D*, **73**:3 (1994), 171–188.
- [26] Y. Zeng, W.-X. Ma, Y. Shao, *J. Math. Phys.*, **42**:5 (2001), 2113–2128.
- [27] M. Błaszak, *J. Math. Phys.*, **36**:9 (1995), 4826–4831.
- [28] Y. Zeng, Y. Shao, W. Xue, *J. Phys. A*, **36**:18 (2003), 5035–5043.
- [29] R. Lin, Y. Zeng, W.-X. Ma, *Physica A*, **291**:1–4 (2001), 287–298.
- [30] Y. Huang, Y. Zeng, O. Ragnisco, *J. Phys. A*, **41**:35 (2008), 355203.

Поступила в редакцию 21.11.2008,
после доработки 14.03.2009