Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Зупник, Трехмерные $\mathcal{N} = 4$ суперконформные суперполевые теории, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 1, 87–105

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6457>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:25:02

© 2010 г.

Б. М. Зупник*

ТРЕХМЕРНЫЕ $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРКОНФОРМНЫЕ СУПЕРПОЛЕВЫЕ ТЕОРИИ

Зеркальное отображение в $D = 3$, $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии связывает левую и правую группы автоморфизмов $SU(2)$, а также суперполевые представления соответствующих $\mathcal{N} = 4$ супермультиплетов. Зеркальные $\mathcal{N} = 4$ гармонические суперпространства используют гармоники двух групп $SU(2)$ и два типа грасмановой аналитичности. Неприводимые левые и правые $\mathcal{N} = 4$ супермультиплеты определены в этих гармонических суперпространствах. Мы анализируем $\mathcal{N} = 4$ суперконформные взаимодействия калибровочных и материальных суперполей и спонтанное нарушение суперконформной симметрии. Наиболее интересное суперконформное действие обладает зеркальной симметрией и содержит два нелинейных члена абелевых левого и правого калибровочных суперполей, а также смешанное $\mathcal{N} = 4$ BF-взаимодействие, которое порождает топологические массы калибровочных полей и нетривиальное взаимодействие скалярных и псевдоскалярных полей. В эту абелеву калибровочную теорию можно включить минимальные взаимодействия $\mathcal{N} = 4$ левого и правого гипермультиплетов. Мы также рассматриваем нелинейные $\mathcal{N} = 4$ калибровочные суперполевые взаимодействия.

Ключевые слова: гармоническое суперпространство, расширенная суперсимметрия, суперконформная симметрия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Трехмерные суперконформные полевые теории с $\mathcal{N} = 6$ и $\mathcal{N} = 8$ суперсимметриями описывают мировой объем $M2$ -бран при низких энергиях [1]–[3]. Лагранжианы этих теорий содержат материальные скалярные и спинорные поля, взаимодействующие с калибровочными векторными полями Черна–Саймонса для специфического выбора калибровочных групп. Трехмерные $\mathcal{N} = 4$ модели Черна–Саймонса изучались в $\mathcal{N} = 1$ суперпространстве [4]. Алгебры высших суперсимметрий в этих моделях замыкаются только на массовой поверхности.

Явно суперсимметричное описание трехмерных систем материи Черна–Саймонса возможно для $\mathcal{N} \leq 3$ суперсимметрий в рамках суперполевого подхода [5]–[8]. Эти

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: zupnik@theor.jinr.ru

суперполевые конструкции универсальны для любых калибровочных групп. P -четность сохраняется в калибровочной группе $G \times G$, если рассматривать разность двух суперполевых действий Черна–Саймонса, соответствующих каждой группе G .

$\mathcal{N} = 6$ модель материи Черна–Саймонса для калибровочной группы $U(N) \times U(N)$ (ABJM-модель) и $\mathcal{N} = 8$ BLG-модель для калибровочной группы $SU(2) \times SU(2)$ были исследованы в $\mathcal{N} = 3$ гармоническом суперпространстве [9]. В этом формализме $\mathcal{N} = 3$ суперсимметрия явная, преобразования высших суперсимметрий связывают различные суперполя, а соответствующая алгебра преобразований замыкается на массовой поверхности.

Суперполевое описание теории Черна–Саймонса возможно в $SO(5)/U(2)$ ($\mathcal{N} = 5$) или $SO(6)/U(3)$ ($\mathcal{N} = 6$) гармонических суперпространствах [10], [11]. В первом варианте $\mathcal{N} = 6$ суперсимметрия реализуется на $\mathcal{N} = 5$ суперполях. Во втором варианте $SU(3)$ триплет гармонических $\mathcal{N} = 6$ калибровочных суперполей содержит векторное поле Черна–Саймонса и бесконечное число вспомогательных полей, например необычные фермионные поля с тремя лоренцевскими спинорными индексами и индексами группы $SO(6)$. Все вспомогательные поля исчезают на массовой поверхности в этих вариантах теории Черна–Саймонса, однако мы не знаем, как включить суперполевое взаимодействие материи.

$D = 3$, $\mathcal{N} = 8$ теорию Янга–Миллса для группы $U(N)$ можно построить в $\mathcal{N} = 4$ гармоническом суперпространстве по аналогии с четырехмерным случаем [12], однако эта теория не будет суперконформной в трех измерениях. В настоящей работе мы анализируем возможности построения суперполевых $\mathcal{N} = 4$ суперконформных моделей в трехмерном гармоническом суперпространстве [8], [13].

$D = 3$, $\mathcal{N} = 4$ суперпространство ковариантно по отношению к группе Лоренца $SO(2, 1) \sim SL(2, R)$ и группе автоморфизмов $SU_L(2) \times SU_R(2)$. Важное свойство $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии связано с дискретной симметрией по отношению к зеркальному отображению

$$\mathcal{M} : \quad SU_L(2) \leftrightarrow SU_R(2), \quad (1.1)$$

которое связывает представления (r, l) и (l, r) группы $SU_L(2) \times SU_R(2)$. Различные координатные базисы $\mathcal{N} = 4$ суперпространства рассматриваются в приложении, например, центральный базис (ЦБ) инвариантен относительно $\mathcal{M}$ -отображения. Неприводимые $D = 3$, $\mathcal{N} = 4$ супермультиплеты соответствуют различным суперполевым связям, и зеркальное отображение связывает правые и левые варианты этих связей. Соответственно мы имеем левые и правые гипермультиплеты или левые и правые векторные мультиплеты [13].

Левые и правые варианты $\mathcal{N} = 4$ гармонического суперпространства используют соответствующие изоспинорные гармоники $u_k^\pm$ или $v_a^{(\pm)}$. В приложении мы определяем левый аналитический базис (ЛАБ) и зеркальный правый аналитический базис (ПАБ), используя левое и правое условия грассмановой аналитичности. Левые и правые аналитические суперполя описывают зеркальные неприводимые супермультиплеты. В следующем разделе мы рассматриваем суперконформные преобразования в различных представлениях $\mathcal{N} = 4$ суперпространства.

Раздел 3 посвящен суперконформным взаимодействиям $\mathcal{N} = 4$ калибровочных суперполей. Левый абелев калибровочный препотенциал определен как аналитическое скалярное суперполе V_0^{++} в левом гармоническом суперпространстве. Соответствующая псевдоскалярная суперполевая напряженность W^{ab} удовлетворяет связям правого тензорного мультиплетта. Абелево суперполе $W = \sqrt{W^{ab}W_{ab}}$ играет роль суперполевого дилатона, который помогает нам строить суперконформные действия в $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве. Мы используем W как динамическую константу связи в суперконформном варианте $\mathcal{N} = 4$ суперполевого абелевого калибровочного действия S_0^W [13], а также в суперконформном взаимодействии $\mathcal{N} = 4$ неабелевых калибровочных суперполей.

Нетрудно получить правое калибровочное суперполе $A_0^{(++)}$ и соответствующую скалярную левую суперполевою напряженность L^{kl} , используя зеркальное отображение. Зеркальное абелево суперконформное действие $S_0^L(A_0^{(++)})$ содержит второй дилатон $L = \sqrt{L^{kl}L_{kl}}$.

Суперконформные взаимодействия левого гипермультиплетта и улучшенного тензорного мультиплетта $L^{++} = u_k^+ u_l^+ L^{kl}$ изучаются в разделе 4 по аналогии с соответствующими взаимодействиями $D = 4$, $\mathcal{N} = 2$ супермультиплетов. Левый гипермультиплет имеет минимальное взаимодействие только с левым векторным мультиплетом. Показано, что суперконформное абелево действие S_0^L эквивалентно аналитическому действию улучшенного тензорного мультиплетта, которое дуально свободному действию левого гипермультиплетта.

В разделе 5 мы рассматриваем $\mathcal{N} = 4$ суперполевые члены, обобщающие взаимодействия Дирака–Борна–Инфельда с производными скалярных и векторных полей. Эти члены инвариантны относительно нелинейных преобразований $\mathcal{N} = 8$ суперсимметрии.

Мы анализируем $\mathcal{N} = 4$ суперконформный абелев BF-член S_{BF}^0 , которое связывает левое $U_L(1)$ скалярное калибровочное суперполе V_0^{++} и правое $U_R(1)$ псевдоскалярное калибровочное суперполе $A_0^{(++)}$ [14]. Ранее этот член рассматривался в компонентах [15], [16]. Отметим, что $\mathcal{N} = 4$ действие S_{BF}^0 можно переписать как разность двух абелевых членов Черна–Саймонса в $\mathcal{N} = 3$ суперполевым формализме [9], в этом случае преобразования четности и четвертой суперсимметрии связывают между собой зеркальные абелевы калибровочные суперполя, определенные в одном аналитическом $\mathcal{N} = 3$ суперпространстве.

Действие S_{BF}^0 нельзя представить как разность двух суперполевых действий в $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве, поэтому мы рассматриваем его как $\mathcal{M}$ -симметричный аналог действия Черна–Саймонса для группы $U_L(1) \times U_R(1)$. Независимые взаимодействия зеркальных $\mathcal{N} = 4$ гипермультиплетов и соответствующих калибровочных мультиплетов легко включаются в эту картину. Член S_{BF}^0 порождает специфическое суперконформное взаимодействие левого и правого $\mathcal{N} = 4$ абелевых калибровочных суперполей в композитном $\mathcal{M}$ -симметричном действии $S_0^W + S_0^L + S_{\text{BF}}^0$. Это действие описывает нетривиальное взаимодействие левого псевдоскалярного и правого скалярного полей с топологически массивными векторным и псевдовекторным калибровочными полями в бозонном секторе. Неабелевы модели Черна–Саймонса невозможно сформулировать в $D = 3$, $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве.

2. СУПЕРКОНФОРМНЫЕ $D = 3$, $\mathcal{N} = 4$ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ЦБ-координаты $\mathcal{N} = 4$ суперпространства $z^M = (x^m, \theta_{ak}^\alpha)$ определены в приложении. Инфинитезимальные $\mathcal{N} = 4$ суперконформные преобразования этих координат имеют вид

$$\begin{aligned} \delta x^{\alpha\beta} &= \lambda^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta} + a_\gamma^\alpha x^{\gamma\beta} + a_\gamma^\beta x^{\alpha\gamma} + b x^{\alpha\beta} - i \epsilon_{ka}^\alpha \theta_{ka}^\beta - i \epsilon_{ka}^\beta \theta_{ka}^\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} x^{\alpha\gamma} k_{\gamma\rho} x^{\rho\beta} + \frac{1}{8} \Theta^2 k^{\alpha\beta} + \frac{1}{4} x^{\alpha\rho} \Theta k_\rho^\beta - \\ &- \frac{i}{2} \eta_{ka\gamma} \theta^{ka\alpha} x^{\gamma\beta} - \frac{i}{2} \eta_{ka\gamma} \theta^{ka\beta} x^{\gamma\alpha} + \frac{1}{4} \eta_{ka}^\beta \Theta \theta^{ka\alpha} + \frac{1}{4} \eta_{ka}^\alpha \Theta \theta^{ka\beta}, \quad (2.1) \\ \delta \theta_{ka}^\alpha &= \lambda_{ka}^\alpha = \epsilon_{ka}^\alpha + a_\beta^\alpha \theta_{ka}^\beta + \frac{1}{2} b \theta_{ka}^\alpha - \omega_k^l \theta_{la}^\alpha - \Omega_a^b \theta_{kb}^\alpha + \frac{1}{2} x^{\alpha\beta} \theta_{ka}^\gamma k_{\beta\gamma} - \\ &- \frac{i}{4} \Theta \theta_{ka}^\gamma k_\gamma^\alpha + \frac{1}{2} x^{\alpha\beta} \eta_{ka\beta} - i \theta_{lb}^\alpha \theta_{ka}^\gamma \eta_\gamma^{lb} - \frac{i}{4} \Theta \eta_{ka}^\alpha, \end{aligned}$$

где c^m , a^m , k_m и b – параметры конформной группы $SO(3, 2)$, ω_{kl} и Ω_{ab} – параметры группы $SU_L(2) \times SU_R(2)$, ϵ_{ka}^α и η_{ka}^α описывают Q - и S -суперсимметрии, а $\Theta = \theta_{ka}^\gamma \theta_\gamma^{ka}$.

Стандартное обозначение для этой суперконформной группы – $OSp(4|4)$, но мы используем краткое обозначение SC . Суперконформное преобразование интегральной меры полного суперпространства $\delta_{sc} d^{11}z = j(z) d^{11}z$ содержит суперполевой параметр

$$j(z) = \partial_m \lambda^m - \partial_\alpha^i \lambda_{ia}^\alpha = -b - k_m x^m - i \theta^{la\beta} \eta_{la\beta}. \quad (2.2)$$

Суперконформные преобразования плоского векторного дифференциала $\omega^{\alpha\beta} = dx^{\alpha\beta} - i d\theta_{ka}^\alpha \theta^{ka\beta} - i d\theta_{ka}^\beta \theta^{ka\alpha}$ и спинорной производной D_α^{ka} имеют ковариантную форму

$$\begin{aligned} \delta_{sc} \omega^{\alpha\beta} &= -j \omega^{\alpha\beta} + \chi_\rho^\alpha \omega^{\rho\beta} + \chi_\rho^\beta \omega^{\alpha\rho}, \\ \delta_{sc} D_\alpha^{ka} &= \frac{1}{2} j D_\alpha^{ka} - \chi_\alpha^\rho D_\rho^{ka} + \lambda_l^k D_\alpha^{la} + \xi_c^a D_\alpha^{kc}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Три бесследовые (2×2) -матрицы преобразований построены из параметров $SC(4|4)$

$$\begin{aligned} \chi_\beta^\rho &= \frac{1}{2} a_\beta^\rho + \frac{1}{2} (x^{\alpha\lambda} k_{\beta\lambda} - \frac{1}{2} \delta_\beta^\rho x^{\gamma\lambda} k_{\gamma\lambda}) - \frac{i}{4} \theta_{ka}^\lambda \theta_\lambda^{ka} k_\beta^\rho + i \theta_{ka}^\rho \theta_\beta^{ka} - \frac{i}{2} \delta_\beta^\rho \theta_{ka}^\lambda \eta_\lambda^{ka}, \\ \xi^{bc} &= \Omega^{bc} - \frac{i}{2} \theta^{lb\beta} \theta_l^{c\gamma} k_{\beta\gamma} - \frac{i}{2} (\theta^{lb\gamma} \eta_{l\gamma}^c + \theta^{lc\gamma} \eta_\gamma^b), \\ \lambda^{kl} &= \mathcal{M} \xi^{bc} = \omega^{kl} - \frac{i}{2} \theta^{kc\beta} \theta_c^{l\gamma} k_{\beta\gamma} - \frac{i}{2} (\theta^{kc\gamma} \eta_{c\gamma}^l + \theta^{lc\gamma} \eta_\gamma^k) \end{aligned} \quad (2.4)$$

и удовлетворяют простым соотношениям

$$\begin{aligned} D_\gamma^{ka} \chi_\beta^\rho &= -\delta_\gamma^\rho D_\beta^{ka} j + \frac{1}{2} \delta_\beta^\rho D_\gamma^{ka} j, & D_\gamma^{ka} \xi^{bc} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} D_\gamma^{kc} j + \frac{1}{2} \varepsilon^{ac} D_\gamma^{kb} j, \\ D_\alpha^{nb} \lambda^{kl} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{nk} D_\alpha^{lb} j + \frac{1}{2} \varepsilon^{nl} D_\alpha^{kb} j, & D_\gamma^{lb} j(z) &= -i \theta^{lb\lambda} k_{\gamma\lambda} - i \eta_\gamma^{lb}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

По аналогии с книгой [12] мы определим следующие $SC(4|4)$ -преобразования левых гармоник:

$$\begin{aligned}\delta_{\text{sc}} u_k^+ &= \lambda^{++} u_k^-, & \delta_{\text{sc}} u_k^- &= 0, \\ \lambda^{++} &= u_j^+ u_l^+ \lambda^{jl}(z) = \omega^{++} - \frac{i}{2} \theta^{+a\alpha} \theta_a^{+\beta} k_{\alpha\beta} - i \theta^{+a\alpha} \eta_{a\alpha}^+.\end{aligned}\tag{2.6}$$

SC -преобразования координат x_L^m , $\theta_a^{+\alpha}$ в ЛАБ (см. формулу (II.5) в приложении) явно аналитичны:

$$\begin{aligned}\lambda_L^m &= \delta_{\text{sc}} x_L^m = \frac{1}{2} (\gamma^m)_{\alpha\beta} \delta_{\text{sc}} x_L^{\alpha\beta} = b x_L^m + (x_L k) x_L^m - \frac{1}{2} x_L^2 k^m - 2i (\gamma^m)_{\alpha\beta} \epsilon_b^{-\alpha} \theta^{+b\beta} - \\ &- i (\gamma^m)_{\alpha\beta} (\gamma^n)^{\rho\beta} \eta_{b\rho}^- \theta^{+b\alpha} x_{nL} - i (\gamma^m)_{\alpha\beta} \omega^{--} \theta_a^{+\alpha} \theta^{+b\beta},\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\lambda_a^{+\alpha} &= \delta_{\text{sc}} \theta_a^{+\alpha} = \epsilon_a^{+\alpha} + \frac{1}{2} b \theta_a^{+\alpha} + \omega^{+-} \theta_a^{+\alpha} - \Omega_a^b \theta_b^{+\alpha} + \frac{1}{2} x_L^{\alpha\beta} \theta_a^{+\gamma} k_{\beta\gamma} - \\ &- i \theta_a^{+\gamma} \theta_b^{+\alpha} \eta_\gamma^{-b},\end{aligned}\tag{2.8}$$

где опущены стандартные преобразования группы Пуанкаре. Определим SC -преобразования левой аналитической интегральной меры:

$$\begin{aligned}\delta_{\text{sc}} d\zeta^{-4} du &= (\partial_m^L \lambda_L^m + \partial^{--} \lambda^{++} - \partial_\alpha^{-a} \lambda_a^{+\alpha}) d\zeta^{-4} du = -2\lambda d\zeta^{-4} du, \\ \lambda &= \omega^{+-} - \frac{1}{2} (b + k_m x_L^m) + i \theta_a^{+\alpha} \eta_\alpha^{-a}, & D^{++} \lambda &= \lambda^{++}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Суперконформные преобразования в ЦБ (2.2) и ЛАБ связаны простыми соотношениями:

$$j(z) = 2\lambda - D^{--} \lambda^{++}, \quad \lambda = \frac{1}{2} j + u_j^+ u_n^- \lambda^{jn}(z).\tag{2.10}$$

Рассмотрим суперконформные преобразования неаналитических спинорных координат:

$$\begin{aligned}\lambda_a^{-\alpha} &= \delta_{\text{sc}} \theta_a^{-\alpha} = \epsilon_a^{-\alpha} + \frac{1}{2} b \theta_a^{-\alpha} + a_\beta^\alpha \theta_a^{-\beta} - \Omega_a^b \theta_b^{-\alpha} - \omega^{+-} \theta_a^{-\alpha} + \omega^{--} \theta_a^{+\alpha} + \\ &+ \frac{1}{2} x_L^{\alpha\beta} \theta_a^{-\gamma} k_{\beta\gamma} + i \theta_a^{-\gamma} \theta_b^{-\alpha} \theta^{+b\beta} k_{\beta\gamma} + \\ &+ \frac{1}{2} x_L^{\alpha\beta} \eta_{a\beta}^- + i \theta_a^{-\gamma} \theta_b^{-\alpha} \eta_\gamma^{+b} + i \theta_b^{-\alpha} \theta^{+b\beta} \eta_{a\beta}^- - i \theta_a^{-\gamma} \theta_b^{+\alpha} \eta_\gamma^{-b}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Эта формула порождает $SC(4|4)$ -преобразование спинорной производной D_β^{+b} :

$$\delta_{\text{sc}} D_\beta^{+b} = -(D_\beta^{+b} \delta_{\text{sc}} \theta_c^{-\rho}) D_\rho^{+c} = -\chi_\beta^\rho D_\rho^{+b} + \xi_c^b D_\beta^{+c} + \lambda D_\beta^{+b},\tag{2.12}$$

где суперконформные матрицы χ_β^ρ и ξ_c^b в ЛАБ идентичны соответствующим матрицам в ЦБ (2.3).

Из этой формулы мы получаем SC -преобразования высших спинорных производных:

$$\begin{aligned}\delta_{\text{sc}} D_{\alpha\beta}^{++} &= -\chi_{\alpha}^{\rho} D_{\rho\beta}^{++} - \chi_{\beta}^{\rho} D_{\rho\alpha}^{++} + 2\lambda D_{\alpha\beta}^{++} + (D_{\alpha}^{+b} j) D_{b\beta}^{+} + (D_{\beta}^{+b} j) D_{b\alpha}^{+}, \\ \delta_{\text{sc}} D^{++ab} &= -(D^{+a\rho} j) D_{\rho}^{+b} - (D^{+b\rho} j) D_{\rho}^{+a} + \xi_c^a D^{++cb} + \xi_c^b D^{++ac} + 2\lambda D^{++ab}, \quad (2.13) \\ \delta_{\text{sc}} (D^{+})^4 &= 4\lambda (D^{+})^4.\end{aligned}$$

Суперконформные преобразования левых гармонических производных имеют вид

$$\delta_{\text{sc}} D^{++} = -\lambda^{++} D^0, \quad \delta_{\text{sc}} D^{--} = -(D^{--} \lambda^{++}) D^{--}. \quad (2.14)$$

SC -преобразования в правом гармоническом суперпространстве получаются зеркальным отображением из преобразований в ЛАБ, например

$$\begin{aligned}\delta_{\text{sc}} v_a^{(+)} &= \xi^{(++)} v_a^{(-)}, \quad \delta_{\text{sc}} v_a^{(-)} = 0, \quad \delta_{\text{sc}} \theta_k^{(\pm)\alpha} = \mathcal{M} \delta_{\text{sc}} \theta_a^{\pm\alpha}, \quad \delta_{\text{sc}} x_{\text{R}}^m = \mathcal{M} \delta_{\text{sc}} x_{\text{L}}^m, \\ \xi^{(++)} &= v_a^{(+)} v_b^{(+)} \xi^{ab} = v_a^{(+)} v_b^{(+)} \Omega^{ab} - \frac{i}{2} \theta^{(+)\alpha} \theta_l^{(+)\beta} k_{\alpha\beta} - i \theta^{(+)\alpha} \eta_{\alpha}^{(+)}.\end{aligned}$$

3. СУПЕРКОНФОРМНЫЕ $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРПОЛЕВЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим суперполевые связи левого гипермультиплета q^{ka} и левого тензорного мультиплета $L^{lj} = L^{jl}$ и их SC -преобразования в ЦБ:

$$D_{\alpha}^{ka} q^{lb} + D_{\alpha}^{la} q^{kb} = 0, \quad \delta_{\text{sc}} q^{lb} = \frac{1}{2} j q^{lb} + \lambda_n^k q^{nb} + \xi_c^b q^{lc}, \quad (3.1)$$

$$D_{\alpha}^{ka} L^{jl} + D_{\alpha}^{ja} L^{lk} + D_{\alpha}^{la} L^{kj} = 0, \quad \delta_{\text{sc}} L^{kl} = j L^{kl} + \lambda_n^k L^{nl} + \lambda_n^l L^{kn}. \quad (3.2)$$

Зеркальное отображение (1.1) позволяет получить суперполевые связи для правого гипермультиплета Q^{ka} и правого тензорного мультиплета W^{ab} :

$$D_{\alpha}^{ka} Q^{lb} + D_{\alpha}^{kb} Q^{la} = 0, \quad (3.3)$$

$$D_{\alpha}^{ka} W^{bc} + D_{\alpha}^{kb} W^{ca} + D_{\alpha}^{kc} W^{ab} = 0. \quad (3.4)$$

Суперполе W^{ab} можно интерпретировать как суперполевою напряженность левого абелевого спинорного калибровочного суперполя; зеркальное суперполе L^{kl} имеет аналогичную интерпретацию. $\mathcal{M}$ -отображение можно комбинировать с P -четностью, тогда зеркальные суперполя W^{ab} и L^{kl} будут иметь противоположные четности.

Левый неабелев калибровочный супермультиплет в $\mathcal{N} = 4$ гармоническом суперпространстве описывается матричным аналитическим препотенциалом $V^{++}(\zeta_{\text{L}}, u)$:

$$\begin{aligned}\delta_{\Lambda} V^{++} &= -D^{++} \Lambda - [V^{++}, \Lambda], \quad (V^{++})^{\dagger} = -V^{++}, \quad \text{Tr } V^{++} = 0, \\ \Lambda^{\dagger} &= -\Lambda, \quad \text{Tr } \Lambda = 0,\end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\Lambda(\zeta_{\text{L}}, u)$ – аналитический суперполевою матричный параметр калибровочной группы $SU(N)$. Мы анализируем немассовые компонентные поля ϕ_{ab} , A_m , λ_{α}^{ka}

и X^{kl} в WZ-калибровке препотенциала

$$V_{\text{WZ}}^{++} = \theta^{+a\alpha} \theta_{\alpha}^{+b} \phi_{ab} + \Theta^{++m} A_m + 2i\Theta_a^{+3\alpha} u_k^{-} \lambda_{\alpha}^{ka} + 3i(\theta^+)^4 u_k^{-} u_l^{-} X^{kl}, \quad (3.6)$$

где величины $\Theta_a^{+3\alpha}$ и $(\theta^+)^4$ определены в приложении. Компонентные поля P -четного суперполя V^{++} включают псевдоскаляр ϕ^{ab} , спинор λ_{α}^{ka} , вектор A_m и вспомогательный скаляр X^{kl} .

Неаналитическую гармоническую связность V^{--} можно разложить по степеням препотенциала [17]:

$$V^{--}(z, u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int du_1 \dots du_n \frac{V^{++}(z, u_1) V^{++}(z, u_2) \dots V^{++}(z, u_n)}{(u^+ u_1^+)(u_1^+ u_2^+) \dots (u_n^+ u^+)}, \quad (3.7)$$

где использованы гармонические обобщенные функции $(u_1^+ u_2^+)^{-1}$ [12].

Представление неабелевой калибровочной суперполевой напряженности в ЛАБ имеет вид [8], [13]

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{ab} &= -\frac{1}{4} D^{+a\alpha} D_{\alpha}^{+b} V^{--}, & \delta_{\Lambda} \mathcal{W}^{ab} &= [\Lambda, \mathcal{W}^{ab}], \\ D^{++} \mathcal{W}^{ab} + [V^{++}, \mathcal{W}^{ab}] &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Абелево $\mathcal{N} = 4$ суперполево действие содержит мнимый препотенциал V_0^{++} и константу связи g_3 размерности $1/2$:

$$\begin{aligned} S_{\text{QED}}^{\text{L}} &= -\frac{1}{4g_3^2} \int d^{11}z du V_0^{++} V_0^{--} = \\ &= \frac{1}{4g_3^2} \int d^3x [-\phi^{ab} \square \phi_{ab} + 2A^m \partial^n F_{nm} - 2i\lambda_{ka}^{\alpha} \partial_{\alpha\beta} \lambda^{ka\beta} + X^{kl} X_{kl}], \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $F_{nm} = \partial_n A_m - \partial_m A_n$.

Мы рассмотрим пассивную форму суперконформных преобразований гармонических связностей [12]

$$\delta_{\text{sc}} V^{++} = 0, \quad \delta_{\text{sc}} V^{--} = -(D^{--} \lambda^{++}) V^{--} \quad (3.10)$$

или активную (локальную) форму этих преобразований

$$\delta_{\text{sc}}^* V^{\pm\pm}(z, u) = -(\lambda^m \partial_m + \lambda_{ka}^{\alpha} \partial_{\alpha}^{ka} + \lambda^{++} D^{--}) V^{\pm\pm}(z, u) + \delta_{\text{sc}} V^{\pm\pm}, \quad (3.11)$$

где функции λ^M и λ^{++} определены выше. Действие $S_{\text{QED}}^{\text{L}}$ неинвариантно относительно этих преобразований.

Абелева суперполевая напряженность имеет простой вид

$$W^{ab}(V) = -\frac{1}{4} \int du D^{-a\alpha} D_{\alpha}^{-b} V_0^{++}(z, u), \quad \delta_{\Lambda} W^{ab} = 0, \quad \overline{W^{ab}} = W_{ab}. \quad (3.12)$$

Суперполе $W^{ab}(V)$ P -нечетное, если соответствующее калибровочное суперполе V^{++} P -четное. Мы рассматриваем его разложение в левых координатах

$$W^{ab}(x_{\text{L}}, \theta_a^{\pm}, u) = \phi^{ab} - i\theta^{-a\beta} \theta_c^{+\alpha} \partial_{\alpha\beta}^L \phi^{bc} - i\theta^{-b\beta} \theta_c^{+\alpha} \partial_{\alpha\beta}^L \phi^{ac} + \Theta^{--ab} \Theta_{cd}^{++} \square \phi^{cd} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{2}(\theta^{-b\alpha}\theta^{+a\beta} + \theta^{-a\alpha}\theta^{+b\beta})F_{\alpha\beta} + \frac{i}{2}(\theta^{+a\alpha}u_k^- - \theta^{-a\alpha}u_k^+)\lambda_\alpha^{kb} + \\
& + \frac{i}{2}(\theta^{+b\alpha}u_k^- - \theta^{-b\alpha}u_k^+)\lambda_\alpha^{ka} + i\theta^{+a\gamma}\theta_\gamma^{+b}u_k^-u_l^-X^{kl} + \\
& + i\theta^{-a\gamma}\theta_\gamma^{-b}u_k^+u_l^+X^{kl} - i\theta^{+a\gamma}\theta_\gamma^{-b}u_k^+u_l^-X^{kl} - i\theta^{-a\gamma}\theta_\gamma^{+b}u_k^+u_l^-X^{kl} + \\
& + \text{высшие члены с производными},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

где $F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\gamma}^L A_\beta^\gamma + \partial_{\beta\gamma}^L A_\alpha^\gamma$.

Суперполе W^{ab} можно связать с $W^{(++)}(\zeta_R, v) = v_a^{(+)}v_b^{(+)}W^{ab}$ – правым аналитическим суперполем. Компонентное разложение этого суперполя очень короткое в правых аналитических координатах (см. формулу (П.15) в приложении).

SC -преобразование неабелевой суперполевой напряженности можно получить, используя формулы (3.10) и (2.13):

$$\delta_{sc}\mathcal{W}^{ab} = -\frac{1}{4}\delta_{sc}(D^{++ab}V^{--}) = j\mathcal{W}^{ab} + \xi_c^a\mathcal{W}^{cb} + \xi_c^b\mathcal{W}^{ac}. \tag{3.14}$$

Важное $SU_R(2)$ -инвариантное абелево дилатонное суперполе

$$W = \sqrt{W^{ab}W_{ab}}, \quad \delta_{sc}W = j(z)W \tag{3.15}$$

удовлетворяет суперполевой связи $D_{\alpha\beta}^{++}(W^{-1}) = 0$ [13].

Суперполе W используется в суперконформном абелевом калибровочном действии [13]

$$S_0^W(V) = -\frac{1}{4}\int d^{11}z du \frac{1}{W} V_0^{++}(z, u)V_0^{--}(z, u). \tag{3.16}$$

SC -инвариантность S_0^W можно непосредственно проверить, используя преобразования интегральной меры и всех суперполей.

Спонтанное нарушение суперконформной симметрии возникает, если мы перепределим псевдоскалярное суперполе W^{ab} :

$$\begin{aligned}
W^{ab} &= \varphi(C^{ab} + w^{ab}), \quad C^{ab}C_{ab} = 2, \\
W &= \varphi\sqrt{2 + 2C^{ab}w_{ab} + w^{ab}w_{ab}},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

где w_{ab} – улучшенная суперполевая напряженность, φ – фиксирующий масштаб параметр размерности 1, а C^{ab} – безразмерные константы, описывающие спонтанное нарушение четности и $SU_R(2)$ -симметрии.

Абелево суперполе $W(V_0^{++})$ играет роль динамической константы связи в суперконформном варианте неабелевой калибровочной теории:

$$S_N(W, V^{++}) = \int d^{11}z du_1 \dots du_n \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4Wn} \frac{\text{Tr } V^{++}(z, u_1) \dots V^{++}(z, u_n)}{(u_1^+u_2^+) \dots (u_n^+u_1^+)}. \tag{3.18}$$

SC -инвариантность этого действия можно проверить методом, предложенным в книге [12], используя активные суперконформные преобразования:

$$\begin{aligned}\delta_{\text{sc}}^* V^{++}(z, u) &= -(\lambda^M \partial_M + \lambda^{++} D^{--}) V^{++}(z, u), \\ \delta_{\text{sc}}^* (W^{-1}) &= (-\lambda^M \partial_M + D^{--} \lambda^{++} - 2\lambda) W^{-1}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Использование суперполевого связи $W = g_3^2$ в формуле (3.18) нарушает конформную инвариантность; в этом случае мы получим суперполевое действие $\mathcal{N} = 4$ теории Янга–Миллса $S_N(g_3^2, V^{++})$, построенное по аналогии с четырехмерным $\mathcal{N} = 2$ калибровочным действием [17].

Правые калибровочные мультиплеты можно рассматривать как зеркальные конструкции в правом гармоническом суперпространстве (см. формулу (П.15) в приложении). Абелев правый аналитический препотенциал $V_{R0}^{(++)}(\zeta_R, v) \equiv A_0^{(++)}(\zeta_R, v)$ имеет калибровочное преобразование

$$\delta_\Lambda A_0^{(++)} = -D^{(++)} \Lambda_R(\zeta_R, v), \quad D_\alpha^{(+k)} A_0^{(++)} = 0. \quad (3.20)$$

В WZ-калибровке этот препотенциал содержит компонентные поля правого векторного мультиплета

$$\begin{aligned}A_{\text{WZ}}^{(+)} &= \theta_k^{(+)\alpha} \theta_{l\alpha}^{(+)} \Lambda^{kl} + (\theta^{(+k} \gamma^m \theta_k^{+)}) B_m + \frac{4i}{3} \theta_k^{(+)\beta} \theta_{l\beta}^{(+)} \theta^{(+l\alpha} v_a^{(-)} \rho_\alpha^{ka} + \\ &+ 3i(\theta^{(+)})^4 v_a^{(-)} v_b^{(-)} Y^{ab}.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Ниже мы используем псевдоскалярный правый препотенциал $A_0^{(++)} = P M V_0^{++}$; тогда B_m – псевдовекторное поле, ρ_α^{ka} – спинорное поле, Λ^{kl} – скалярное поле и Y^{ab} – псевдоскалярное вспомогательное поле.

Мы можем построить суперполевою напряженность правого абелевого препотенциала

$$L^{kl} = -\frac{1}{4} \int dv D^{(--kl)} A_0^{(++)}(z, v), \quad (3.22)$$

удовлетворяющую связям левого тензорного мультиплета (3.2). Она будет скалярной для P -нечетного препотенциала $A_0^{(++)}$. Суперконформное преобразование суперполя L^{kl} можно получить зеркальным отображением (3.14):

$$\delta_{\text{sc}} L^{kl} = j(z) L^{kl} + \lambda_j^k(z) L^{jl} + \lambda_j^l(z) L^{kj}. \quad (3.23)$$

Улучшенное левое суперполе l_{kl} определяется формулой

$$L^{kl} = \gamma(c^{kl} + l^{kl}), \quad c^2 = c^{kl} c_{kl} = 2, \quad (3.24)$$

где γ – некоторая константа размерности 1 и c_{kl} – безразмерные константы спонтанного нарушения $SU_L(2)$. Зеркальное дилатонное суперполе имеет вид

$$L = \sqrt{L^{kl} L_{kl}} = \gamma \sqrt{2 + 2c_{kl} l^{kl} + l_{kl} l^{kl}}, \quad \delta_{\text{sc}} L = j L. \quad (3.25)$$

Зеркальное суперконформное абелево взаимодействие содержит это суперполе L :

$$S_0^L = -\frac{1}{4} \int d^{11}z dv \frac{1}{L} A_0^{(++)} A_0^{(--)}, \quad D^{(++)} A_0^{(--) = D^{(--) A_0^{(++)}}. \quad (3.26)$$

В разделе 4 мы изучим эквивалентное левое аналитическое действие улучшенного тензорного мультиплета, которое дуально свободно действию гипермультиплета.

Мы используем спинорную производную суперполя L в суперконформной спинорной связности

$$\Gamma_\alpha^{ka} = L^{-1} D_\alpha^{ka} L, \quad \delta_{\text{sc}} \Gamma_\alpha^{ka} = D_\alpha^{ka} j + \frac{1}{2} j \Gamma_\alpha^{ka} - \chi_\alpha^\rho \Gamma_\rho^{ka} + \lambda_t^k \Gamma_\alpha^{la} + \xi_c^a \Gamma_\alpha^{kc}, \quad (3.27)$$

которая помогает строить SC -ковариантные производные суперполей, например

$$\hat{D}_\alpha^{kd} W^{ab} = D_\alpha^{kd} W^{ab} - 2\Gamma_\alpha^{kd} W^{ab} + \Gamma_\alpha^{ka} W^{bd} + \Gamma_\alpha^{kb} W^{ad}, \quad (3.28)$$

или ее зеркальный образ $\hat{D}_\alpha^{kd} L^{lj}$. Очевидно, что суперполе W/L является инвариантом суперконформной группы.

4. $\mathcal{N} = 4$ ТЕНЗОРНЫЕ МУЛЬТИПЛЕТЫ И ГИПЕРМУЛЬТИПЛЕТЫ

Трехмерный левый аналитический гипермультиплет q^{+a} имеет свободное действие

$$S_q^0 = \frac{1}{2} \int d\zeta_L^{-4} du q_a^+ D^{++} q^{+a}, \quad \widetilde{q^{+a}} = q_a^+. \quad (4.1)$$

Естественная размерность q^{+a} равна $1/2$, и соответствующее суперконформное преобразование содержит аналитический параметр (2.9):

$$\delta_{\text{sc}} q^{+a} = \lambda q^{+a}, \quad \delta_{\text{sc}} S_q^0 = 0. \quad (4.2)$$

Этот гипермультиплет взаимодействует с левым $U_L(1)$ -калибровочным препотенциалом

$$S(q^+, V_0^{++}) = \frac{1}{2} \int d\zeta_L^{-4} du q_a^+ [D^{++} q^{+a} + (\tau_3)_b^a V_0^{++} q^{+b}], \quad (4.3)$$

где τ_3 – матрица Паули. Зеркальное отображение $\mathcal{M}S(q^+, V_0^{++}) = S(Q^{(+)}, A_0^{(++)})$ порождает взаимодействие правого гипермультиплета $Q_k^{(+)}$ с правым абелевым препотенциалом $A_0^{(++)}$.

Аналитический свободный ω -гипермультиплет имеет аналогичное описание:

$$S_\omega^0 = -\frac{1}{2} \int d\zeta_L^{-4} du D^{++} \omega D^{++} \omega, \quad \delta_{\text{sc}} \omega = \lambda \omega. \quad (4.4)$$

В калибровочной группе $SU(N)$ мы можем использовать присоединенное представление для суперполя ω ; тогда его взаимодействие с калибровочным суперполем имеет вид

$$S(\omega, V) = -\frac{1}{2} \int d\zeta_L^{-4} du \text{Tr}(D^{++} \omega + [V^{++}, \omega])^2. \quad (4.5)$$

Сумма этого действия и действия $\mathcal{N} = 4$ теории Янга–Миллса $S_N(g_3^2, V^{++})$ инвариантна относительно преобразований $\mathcal{N} = 8$ суперсимметрии, построенных по

аналогии с $D = 4$, $\mathcal{N} = 4$ случаем [12]:

$$\delta V^{++} = g_3 \hat{\epsilon}^{ka\alpha} u_k^+ \theta_{a\alpha}^+ \omega, \quad \delta \omega = -\frac{1}{2g_3} (D^+)^4 (\hat{\epsilon}^{ka\alpha} u_k^- \theta_{a\alpha}^- V^{--}), \quad (4.6)$$

где $\hat{\epsilon}^{ka\alpha}$ – спинорные параметры.

Левый тензорный мультиплет описывается левым аналитическим суперполем $L^{++} = u_k^+ u_l^+ L^{kl}(z)$ по аналогии с четырехмерным случаем [12]:

$$L^{++} = -\frac{1}{4} u_k^+ u_l^+ \int dv v_a^{(-)} v_b^{(-)} D^{ka\alpha} D_\alpha^{lb} A_0^{(++)}(z, v), \quad D_\alpha^{+a} L^{++} = 0, \quad (4.7)$$

$$D^{++} L^{++} = 0, \quad \delta_{sc} L^{++} = 2\lambda L^{++}. \quad (4.8)$$

Компонентное представление этого суперполя имеет вид

$$\begin{aligned} L^{++} = & u_k^+ u_l^+ \Lambda^{kl} - i\theta^{++m} u_k^+ u_l^- \partial_m^L \Lambda^{kl} - i\theta_a^{+\alpha} u_k^+ \rho_\alpha^{ka} + i\theta_{ab}^{++} Y^{ab} + \\ & + i(\theta^{+b} \gamma^m \theta_b^+) \varepsilon_{mnp} \partial^n B^p + \Theta_a^{+3\alpha} u_k^- \partial_{\alpha\beta} \rho^{ka\beta} + (\theta^+)^4 u_k^- u_l^- \square \Lambda^{kl}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Свободное действие левого тензорного мультиплета эквивалентно свободному действию правого калибровочного мультиплета.

Теперь мы рассмотрим улучшенную форму левого аналитического суперполя:

$$\begin{aligned} L^{++} = & \gamma(c^{++} + l^{++}), \quad c^{\pm\pm} = c^{kl} u_k^\pm u_l^\pm, \quad c^{++} c^{--} - (c^0)^2 = 1, \\ \delta_{sc} l^{++} = & 2\lambda(l^{++} + c^{++}) - 2\lambda^{++} c^0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Трехмерное взаимодействие l^{++} подобно соответствующему четырехмерному взаимодействию [12]:

$$\tilde{S}_0^L = -\frac{1}{\gamma} \int d\zeta^{-4} du (g^{++})^2, \quad g^{++}(l) = \frac{l^{++}}{1 + \sqrt{1 + l^{++} c^{--}}}. \quad (4.11)$$

Отметим, что это действие представляет собой дуальную форму действия (3.26). Скалярная часть компонентного действия улучшенного тензорного мультиплета имеет вид

$$\tilde{K}_L = \int d^3x \frac{\sqrt{2}}{\Lambda} \left\{ \frac{1}{4} \partial_m \Lambda^{kl} \partial^m \Lambda_{kl} - \frac{1}{6\Lambda^2} \Lambda^{rs} \Lambda^{kl} \partial_m \Lambda_{kl} \partial^m \Lambda_{rs} + \frac{1}{4} Y^{ab} Y_{ab} \right\}, \quad (4.12)$$

$$\Lambda = \sqrt{\Lambda^{kl} \Lambda_{kl}} = \sqrt{2} \gamma \sqrt{1 + c^{kl} \lambda_{kl} + \frac{1}{2} \lambda^{kl} \lambda_{kl}}, \quad \Lambda^{kl} = \gamma(c^{kl} + \lambda^{kl}).$$

Подобное компонентное $D = 4$, $\mathcal{N} = 2$ действие определено в работе [18].

Как показано в книге [12], действие улучшенного тензорного мультиплета дуально действию свободного гипермультиплета. Альтернативная форма действия (4.11) содержит неограниченное суперполе l^{++} (или его функцию $g^{++}(l)$) и аналитический лагранжев множитель ω :

$$\tilde{S}_0^L = -\frac{1}{\gamma} \int d\zeta_L^{-4} du \{ [g^{++}(l)]^2 - \omega D^{++} l^{++} \}. \quad (4.13)$$

Использование алгебраического уравнения $g^{++}(\omega) = -(1 + c^{--}D^{++}\omega)^{-1}D^{++}\omega$ порождает действие $S(\omega)$, которое эквивалентно свободному действию гипермультиплета. Таким образом, суперконформное правое действие (3.26) дуально свободному действию.

Связь между представлениями левого тензорного мультиплета в ЦБ и ЛАБ дает формула

$$L^{-1}(l_{kl}) = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \left(1 + c^{kl}l_{kl} + \frac{1}{2}l^{kl}l_{kl} \right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \int du [1 + Z(l, u)]^{-3/2}, \quad (4.14)$$

$$Z(l, u) = l^{++}c^{--} = l^{kl}(z)c^{jn}u_k^+u_l^+u_j^-u_n^-.$$

Отметим, что обе части этого соотношения описывают одно $SU_L(2)$ -инвариантное решение уравнения Лапласа в переменных l_{kl} : $\Delta_l L^{-1}(l_{kl}) = 0$. Это интегральное представление основано на формуле

$$\int du (l^{++}c^{--})^n = \frac{1}{2n+1} l^{(i_1 k_1} l^{i_2 k_2} \dots l^{i_n k_n)} c_{(i_1 k_1} c_{i_2 k_2} \dots c_{i_n k_n)}, \quad (4.15)$$

где скобки означают полную симметризацию (l_{kl}) -полиномов по $2n$ индексам.

Суперконформное взаимодействие S_0^W (3.16) эквивалентно действию улучшенного правого тензорного мультиплета $w^{(++)}$:

$$W^{(++)} = v_a^{(+)} v_b^{(+)} W^{ab} = \varphi(C^{(++)} + w^{(++)}), \quad (4.16)$$

которое зеркально к левому действию (4.11). Соответствующие скалярные члены имеют вид

$$K_R = \int d^3x \frac{\sqrt{2}}{\phi} \left\{ \frac{1}{4} \partial_m \phi^{ab} \partial^m \phi_{ab} - \frac{1}{6\phi^2} \phi^{cd} \phi^{ab} \partial_m \phi_{ab} \partial^m \phi_{cd} + \frac{1}{4} X^{kl} X_{kl} \right\}, \quad (4.17)$$

$$\phi = \sqrt{\phi^{ab} \phi_{ab}} = \varphi \sqrt{2 + 2C^{ab} \varphi_{ab} + \varphi^{ab} \varphi_{ab}}.$$

Действие улучшенного правого тензорного мультиплета $w^{(++)}$ также дуально свободному действию.

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ $\mathcal{N} = 4$ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Теперь мы обсудим возможные $\mathcal{N} = 4$ суперполевые калибровочные взаимодействия, соответствующие высшим степеням производных полей $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$, $F_{mn}^B = \partial_m B_n - \partial_n B_m$, $\partial_m \phi^{ab}$ и $\partial_m \Lambda^{kl}$ в компонентных действиях. Нелинейные суперсимметричные $D = 4$ абелевы калибровочные члены анализировались в работах [19]–[21].

Мы выберем нелинейные члены самодействия аналитического мультиплета L^{++} в следующем виде:

$$S(L^{++}) = \frac{1}{g_3^2} \int d\zeta^{-4} du \{ (L^{++})^2 [1 - 12c^2 (D^+)^4 (L^{--})^2] - \\ - 24c^2 L^{++} (D^+)^4 [(L^{+-})^2 L^{--}] \} + O(L^6), \quad (5.1)$$

$$L^{++} = u_k^+ u_l^+ L^{kl}(A_0^{(++)}), \quad L^{+-} = \frac{1}{2} D^{--} L^{++}, \quad L^{--} = \frac{1}{2} (D^{--})^2 L^{++},$$

где c – некоторая постоянная размерности -2 . Члены четвертого порядка содержат компоненты взаимодействия производных $F_{mn}^B = \partial_m B_n - \partial_n B_m$ и $\partial_m \Lambda^{kl}$.

По аналогии с нелинейными реализациями четырехмерных суперсимметрий [19] мы можем определить нелинейные f -преобразования суперполя L^{++} :

$$\begin{aligned} \delta_f L^{++} &= f^{++} [1 + c^2 (D^+)^4 (L^{--})^2] + 2c^2 L^{++} (D^+)^4 (f^{--} L^{--}) - \\ &\quad - 4c^2 (D^+)^4 (f^{+-} L^{+-} L^{--}) + 4c^2 (D^+)^4 [f^{--} (L^{+-})^2] + O(L^4), \\ f^{++} &= a^{kl} u_k^+ u_l^+ + c^{-1} \theta_a^{+\alpha} u_k^+ \epsilon_\alpha^{ka}, \\ f^{+-} &= \frac{1}{2} D^{--} f^{++}, \quad f^{--} = \frac{1}{2} (D^{--})^2 f^{++}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где a_{kl} и ϵ_α^{ka} – параметры бозонных и фермионных трансляций. Это преобразование удовлетворяет условию $D^{++} \delta_f L^{++} = 0$.

Нелинейное действие (5.1) инвариантно относительно f -преобразования с точностью до третьего порядка по суперполям. При доказательстве этой инвариантности мы учитываем только две независимые структуры третьего порядка в вариации $\delta_f S(L^{++})$:

$$f^{++} L^{++} (D^+)^4 (L^{--})^2, \quad (L^{++})^2 (D^+)^4 (f^{--} L^{--}). \quad (5.3)$$

Преобразование (5.2) описывает спонтанное нарушение $D = 3$, $\mathcal{N} = 8$ суперсимметрии. Подобное нелинейное действие можно найти для суперполя $W^{(++)}$ в правом аналитическом суперпространстве.

Нелинейные суперполевые члены четвертого порядка можно также изучать в полном $D = 3$, $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве

$$\begin{aligned} S_4 &= \int d^{11} z [A_1 W^4 + A_2 L^4 + A_3 W^2 L^2], \\ W^2 &= \varphi^2 (2 + 2C^{ab} w_{ab} + w^{ab} w_{ab}), \quad L^2 = \gamma^2 (2 + 2c^{kl} l_{kl} + l^{kl} l_{kl}), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где A_1 , A_2 и A_3 – некоторые постоянные.

Высшие степени калибровочных напряженностей возникают из суперполевых членов со спинорными производными W^{ab} , например

$$S_6 \sim \int d^{11} z W^4 A_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}, \quad A_{\alpha\beta} = \varepsilon_{kl} D_{(\alpha}^{ka} D_{\beta)}^{lb} W_{ab} \sim i F_{\alpha\beta}(x) + O(\theta). \quad (5.5)$$

Все эти нелинейные калибровочные взаимодействия нарушают суперконформную симметрию.

Суперконформные $D = 4$, $\mathcal{N} = 2$ нелинейные калибровочные взаимодействия рассматривались в работе [21], где в качестве дилатона использовалась киральная абелева суперполевая напряженность. В $D = 3$, $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве у нас есть два абелевых суперполевых дилатона W и L , поэтому нетрудно построить неполиномиальные суперконформные обобщения нелинейных членов S_4 :

$$S_{NL} = \int d^{11} z \{W^4 L^{-5} + L^4 W^{-5}\}. \quad (5.6)$$

Отметим, что дополнительные суперконформные члены с SC -инвариантной комбинацией W/L могут быть добавлены к этому взаимодействию. Суперконформные обобщения членов (5.5) можно строить с использованием связности (3.27).

Мы также можем изучать нелинейные суперконформные взаимодействия неабелевой суперполевой напряженности (3.8) с абелевыми суперполями, например

$$\int d^{11}z L^{-5}(\text{Tr } \mathcal{W}^{ab} \mathcal{W}_{ab})^2. \quad (5.7)$$

6. $\mathcal{N} = 4$ ВФ-ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛЕВОГО И ПРАВОГО КАЛИБРОВОЧНЫХ МУЛЬТИПЛЕТОВ

Мы видим, что левые и правые $\mathcal{N} = 4$ супермультиплеты живут в различных аналитических суперпространствах, поэтому исключительно сложно построить взаимодействия этих супермультиплетов. Тем не менее существует простое лево-правое калибровочное ВФ-взаимодействие, которое рассматривалось в компонентных полях [15], [16], а также в бигармоническом $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве [14].

ВФ-взаимодействие в ЛАБ имеет вид

$$S_{\text{BF}}^0 = \frac{i}{2} \beta \int d\zeta_L^{-4} du V_0^{++} L^{++}, \quad (6.1)$$

где β – константа связи, V_0^{++} – абелев левый скалярный препотенциал, а L^{++} – скалярная аналитическая напряженность правого абелевого псевдоскалярного препотенциала $A_0^{(++)}$ (4.7). Это взаимодействие явно суперконформно и сохраняет P -четность и зеркальную симметрию.

Уравнение движения абелевой ВФ-модели S_{BF}^0

$$W^{ab}(V) = 0, \quad L^{++}(B) = 0 \quad (6.2)$$

имеет только чисто калибровочные решения.

Используя суперполевые разложения (3.6) и (4.9), мы получим компонентную форму абелевого $\mathcal{N} = 4$ ВФ-действия [15], [16]:

$$S_{\text{BF}}^0 = \beta \int d^3x \left(2\varepsilon^{mnp} A_m \partial_n B_p - \frac{1}{2} \phi^{ab} Y_{ab} - \frac{1}{2} \Lambda^{ik} X_{ik} + 2\rho_\alpha^{ka} \lambda_{ka}^\alpha \right). \quad (6.3)$$

В этом представлении зеркальная симметрия $S_{\text{BF}}^0 = \mathcal{M} S_{\text{BF}}^0$ очевидна.

Если мы отождествим $SU_L(2)$ - и $SU_R(2)$ -индексы, то это действие можно трактовать как разность двух действий Черна–Саймонса для двух $\mathcal{N} = 3$ векторных мультиплетов, связанных преобразованием четности и преобразованием четвертой суперсимметрии. Калибровочные $\mathcal{N} = 3$ препотенциалы и суперполевые напряженности живут в одном аналитическом суперпространстве, а преобразования четвертой суперсимметрии отличаются для левого и правого калибровочных мультиплетов. Отметим, что не существует $\mathcal{N} = 4$ суперполевого обобщения действия Черна–Саймонса для группы $U(1)$, поскольку соответствующие калибровочные препотенциалы и суперполевые напряженности определены в разных суперпространствах.

К действию $U(1) \times U(1)$ BF-теории можно добавить минимальные взаимодействия левых гипермультиплетов q_a^+ (4.3) и правых гипермультиплетов $Q_k^{(+)} = \mathcal{M}q_a^+$ с соответствующими препотенциалами

$$S(q, Q, V_0, A_0) = S_{\text{BF}}^0 + S(q^+, V_0^{++}) + S(Q^{(+)}, A_0^{(++)}). \quad (6.4)$$

Эта модель обладает явной $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией, даже если ее переформулировать в $\mathcal{N} = 3$ суперпространстве. В этом формализме генераторы линейных преобразований четвертой суперсимметрии на левых и правых $\mathcal{N} = 3$ аналитических суперполях отличаются знаком: $Q_\alpha^4 = \pm D_\alpha^0$. Более сложные нелинейные преобразования высших суперсимметрий определены в работе [9] для неабелевых $\mathcal{N} = 3$ суперполей; алгебра этих преобразований замыкается только на уравнениях движения.

Абелев BF-член можно трактовать как нетривиальное взаимодействие в следующем суперконформном композитном действии:

$$S^\beta(V_0^{++}, A_0^{(++)}) = S_0^W + S_0^L + S_{\text{BF}}^0, \quad (6.5)$$

где первые два члена дают суперконформное описание левых и правых калибровочных суперполей. Очевидно, что это взаимодействие обладает дискретной $\mathcal{M}$ -симметрией.

Скалярная часть этого действия содержит нелинейные кинетические члены для полей Λ^{kl} (4.12) и Φ^{ab} (4.17), а также смешанный потенциальный член

$$P = -\frac{\sqrt{2}\beta^2}{4} \int d^3x (\phi^{ab} \phi_{ab} \sqrt{\Lambda^{kl} \Lambda_{kl}} + \Lambda^{kl} \Lambda_{kl} \sqrt{\phi^{ab} \phi_{ab}}), \quad (6.6)$$

который появляется из членов с вспомогательными полями X^{kl} и Y^{ab} .

Используя преобразования векторного и псевдовекторного калибровочных полей в (6.5)

$$A_m = \sqrt{\frac{\varphi}{2}}(A_m^+ + A_m^-), \quad B_m = \sqrt{\frac{\gamma}{2}}(A_m^+ - A_m^-), \quad (6.7)$$

мы получим сумму двух квадратичных калибровочных действий

$$S(A_m^+, A_m^-) = \frac{1}{2} \int d^3x (A_m^+ K_+^{mn} A_n^+ + A_m^- K_-^{mn} A_n^-), \quad (6.8)$$

$$K_\pm^{mn} = \eta^{mn} \square - \partial^m \partial^n \pm \mu \varepsilon^{mpn} \partial_p,$$

где $\mu = \beta\sqrt{\varphi\gamma}$ – параметр калибровочно-инвариантных массовых членов.

Неабелеву версию BF-теории легко построить в полном $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве с помощью суперполя $\mathcal{W}^{ab}$ (3.8) и лагранжевого множителя B_{ab} , однако мы не знаем взаимодействий этого дополнительного суперполя B_{ab} . Взаимодействия левого $\mathcal{N} = 4$ неабелевого калибровочного суперполя с правым неабелевым калибровочным суперполем мы также строить не умеем.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы провели анализ суперконформных взаимодействий $D = 3$, $\mathcal{N} = 4$ суперполей в различных представлениях. Левое и правое $\mathcal{N} = 4$ гармонические суперпространства трактуются как две зеркальные версии $D = 4$, $\mathcal{N} = 2$ гармонического суперпространства. Взаимодействие левого калибровочного суперполя и левого гипермультиплета возникает естественно, зеркальная картина связывает правые $\mathcal{N} = 4$ суперполя, в то же время трудно построить взаимодействия левых и правых супермультиплетов. Мы рассматриваем левое дилатонное суперполе W , используя абелеву калибровочную суперполевою напряженность W^{ab} и правое дилатонное суперполе L , построенное из правого абелевого калибровочного суперполя. W и L играют роль динамических констант связи в суперконформной калибровочной теории. Эти дилатоны позволяют нам построить улучшенные суперконформные варианты абелевых и неабелевых $\mathcal{N} = 4$ калибровочных теорий. Левая $\mathcal{N} = 4$ суперконформная абелева калибровочная модель S_0^W дуальна модели свободного гипермультиплета, это свойство сохраняется и в зеркальной модели S_0^L .

BF-взаимодействие в $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве рассматривается как аналог действия Черна–Саймонса для группы $U_L(1) \times U_R(1)$. Левый и правый гипермультиплеты взаимодействуют с соответствующими $\mathcal{N} = 4$ калибровочными суперполями в этой теории. Мы предлагаем комбинированное суперконформное взаимодействие левого и правого калибровочных суперполей, которое включает улучшенные левое и правое калибровочные действия $S_0^W + S_0^L$ и смешанный BF-член. Этот член порождает нетривиальное взаимодействие скалярных и векторных полей из двух зеркальных супермультиплетов.

На несуперконформном уровне мы нашли нелинейную реализацию $\mathcal{N} = 8$ суперсимметрии, связывающую различные нелинейные калибровочные члены в эффективном действии. Высшие члены нелинейных суперконформных взаимодействий левых и правых калибровочных суперполей получены с использованием суперконформных ковариантных производных суперполевых напряженностей.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Центральный базис $D = 3$, $\mathcal{N} = 4$ суперпространства

Мы рассматриваем координаты $D = 3$, $\mathcal{N} = 4$ суперпространства в ЦБ и соответствующую меру интегрирования [8], [13]

$$z = (x^m, \theta_{ka}^\alpha), \quad d^{11}z = d^3x d^8\theta, \quad (\text{П.1})$$

где k и a – двухкомпонентные индексы групп автоморфизмов $SU_L(2)$ и $SU_R(2)$ соответственно, α – двухкомпонентный индекс группы $SL(2, R)$ и $m = 0, 1, 2$ – трехмерный векторный индекс. Трехмерные γ -матрицы удовлетворяют соотношениям

$$(\gamma_m)_\alpha^\rho (\gamma_n)_\rho^\beta = -(\gamma_m)_{\alpha\rho} (\gamma_n)^{\rho\beta} = -\eta_{mn} \delta_\alpha^\beta + \varepsilon_{mnp} (\gamma^p)_\alpha^\beta, \quad (\text{П.2})$$

где $\eta_{mn} = \text{diag}(1, -1, -1)$ и ε_{mnp} – антисимметричный символ.

Мы используем преобразование P -четности

$$Px^{0,2} = x^{0,2}, \quad Px^1 = -x^1, \quad P\theta_{ka}^\alpha = (\gamma_1)_\beta^\alpha \theta_{ka}^\beta. \quad (\text{П.3})$$

Зеркальное отображение $\mathcal{M}$ меняет местами значения изоспинорных индексов групп $SU_L(2)$ и $SU_R(2)$, например $\mathcal{M}\theta_{12}^\alpha = \theta_{21}^\alpha$, и связывает представления (l, r) и (r, l) .

$\mathcal{N} = 4$ спинорные производные имеют вид

$$D_\alpha^{ka} = \partial_\alpha^{ka} + i\theta^{ka\beta}\partial_{\alpha\beta}, \quad \partial_{\alpha\beta} = (\gamma^m)_{\alpha\beta}\partial_m. \quad (\text{П.4})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Левое $D = 3$, $\mathcal{N} = 4$ гармоническое суперпространство

Левое $D = 3$, $\mathcal{N} = 4$ гармоническое суперпространство рассматривалось в работах [8], [13]. Оно использует левые $SU(2)_L/U(1)$ -гармоники $u_k^\pm$ и следующие координаты ЛАБ:

$$\zeta_L = (x_L^m, \theta_a^{+\alpha}), \quad \theta_a^{-\alpha}, \quad x_L^m = x^m + i(\gamma^m)_{\alpha\beta}\theta^{+\alpha}\theta_a^{-\beta}, \quad \theta_a^{\pm\alpha} = u_k^\pm\theta_a^{k\alpha}. \quad (\text{П.5})$$

Мы определим специальное сопряжение в этом базисе:

$$\widetilde{u_k^\pm} = u^{\pm k}, \quad \widetilde{x_L^m} = x_L^m, \quad \widetilde{\theta_a^{\pm\alpha}} = \theta^{\pm a\alpha}. \quad (\text{П.6})$$

Спинорные и гармонические производные в ЛАБ имеют вид

$$D_\alpha^{+a} = \partial_\alpha^{+a}, \quad D_\alpha^{-a} = -\partial_\alpha^{-a} + 2i\theta^{-a\beta}\partial_{\alpha\beta}^L, \quad (\text{П.7})$$

$$D^{++} = \partial^{++} - i\theta_a^{+}\gamma^m\theta^{+a}\partial_m^L + \theta_a^{+\alpha}\partial_\alpha^{+a}, \quad (\text{П.8})$$

$$D^{--} = \partial^{--} - i\theta_a^{-}\gamma^m\theta^{-a}\partial_m^L + \theta_a^{-\alpha}\partial_\alpha^{-a}.$$

Рассматриваются простые комбинации спинорных производных

$$D^{\pm\pm ab} = D^{\pm a\alpha}D_\alpha^{\pm b}, \quad D_{\alpha\beta}^{\pm\pm} = D_\alpha^{\pm a}D_{a\beta}^{\pm}, \quad (\text{П.9})$$

$$(D^\pm)^4 = \frac{1}{48}D^{\pm\pm ab}D_{ab}^{\pm\pm} = \frac{1}{16}(D^{\pm 1})^2(D^{\pm 2})^2.$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$D^{++ab}D^{++\alpha\beta} = 0,$$

$$(D^+)^4(D^{--})^2(D^+)^4 = 2\partial^m\partial_m D^{(+4)} = 2\Box(D^+)^4,$$

$$\begin{aligned} (D^+)^4(D^{--})^3(D^+)^4 &= \left[\frac{3i}{2}D_\alpha^{-b}D_{b\beta}^{-}\partial^{\alpha\beta} + 6D^{--}\Box \right] (D^+)^4 = \\ &= \left[\frac{3i}{2}\partial_\alpha^{-b}\partial_{b\beta}^{-}\partial^{\alpha\beta} + 6\partial^{--}\Box \right] (D^+)^4, \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

$$\begin{aligned} (D^+)^4(D^{--})^4(D^+)^4 &= \left[\frac{1}{2}D_{ab}^{--}D^{--ab} + 6iD^{--}D^{-a\alpha}D_a^{-\beta}\partial_{\alpha\beta} + 12(D^{--})^2 \right] \Box(D^+)^4 = \\ &= [24(\partial^-)^4 + 6i\partial^{--}\partial^{-a\alpha}\partial_a^{-\beta}\partial_{\alpha\beta} + 12(\partial^{--})^2]\Box(D^+)^4. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Аналитическая интегральная мера в ЛАБ имеет вид

$$d\zeta_L^{-4} du = d^4 x_L du (D^-)^4, \quad (\text{П.12})$$

где du описывает интегрирование по $SU_L(2)/U(1)$.

Используются независимые комбинации левых спинорных координат $\theta_a^{\pm\alpha}$:

$$\begin{aligned} \Theta_{ab}^{\pm\pm} &= \theta_a^{\pm\beta} \theta_{b\beta}^{\pm}, & \Theta_{\alpha\beta}^{\pm\pm} &= (\gamma^m)_{\alpha\beta} \Theta_m^{\pm\pm} = \theta_\alpha^{\pm a} \theta_{a\beta}^{\pm}, \\ \Theta_a^{\pm 3\alpha} &= \frac{2}{3} \theta^{\pm b\alpha} \Theta_{ab}^{\pm\pm}, & (\theta^\pm)^4 &= (\theta_1^\pm)^2 (\theta_2^\pm)^2. \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

Они удовлетворяют простым тождествам алгебры Грассмана

$$\begin{aligned} \Theta_{ab}^{\pm\pm} \Theta_{cd}^{\pm\pm} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ac} \varepsilon_{bd} + \varepsilon_{ad} \varepsilon_{bc}) (\theta^\pm)^4, \\ \Theta_{\alpha\beta}^{\pm\pm} \Theta_{\gamma\rho}^{\pm\pm} &= -\frac{1}{2} (\varepsilon_{\alpha\gamma} \varepsilon_{\beta\rho} + \varepsilon_{\alpha\rho} \varepsilon_{\beta\gamma}) (\theta^\pm)^4, \\ \theta_c^{\pm\alpha} \Theta_{ab}^{\pm\pm} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ca} \Theta_b^{\pm 3\alpha} + \frac{1}{2} \varepsilon_{cb} \Theta_a^{\pm 3\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Правое $\mathcal{N} = 4$ гармоническое суперпространство

Обозначим зеркальные $SU_R(2)/U(1)$ -гармоники как $v_a^{(\pm)} = \mathcal{M} u_k^\pm$ и зеркальные координаты ПАБ как

$$\begin{aligned} \zeta_R &= \mathcal{M} \zeta_L = (x_R^m, \theta_k^{(+)\alpha}), & \theta_k^{(-)\alpha}, \\ x_R^m &= x^m + i(\gamma^m)_{\alpha\beta} \theta^{(+)\alpha} \theta_k^{(-)\beta}, & \theta_k^{(\pm)\alpha} = v_a^{(\pm)} \theta_k^{a\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Спинорные и гармонические производные в ПАБ можно получить зеркальным отображением из (П.8), например

$$\begin{aligned} D_\alpha^{(+)\alpha} &= \partial_\alpha^{(+)\alpha}, & D_\alpha^{(-)\alpha} &= -\partial_\alpha^{(-)\alpha} + 2i\theta^{(-)\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}^R, \\ D^{(++)} &= \partial^{(++)} - i\theta_k^{(+)\alpha} \gamma^m \theta^{(+)\alpha} \partial_m^R + \theta_k^{(+)\alpha} \partial_\alpha^{(+)\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

где частные производные действуют на соответствующих правых координатах. Правые аналитические суперполя $\Phi(\zeta_R, v)$ описывают правые $\mathcal{N} = 4$ супермультиплеты.

Благодарности. Автор признателен Е. А. Иванову за интересные обсуждения. Работа частично поддержана РФФИ (гранты № 09-02-01209, 09-01-93107-НЦИ, 09-02-91349-ННИО и 08-02-90490-Укр), ИНТАС (грант № 05-10000008-7928), ННИО (грант № 436 RUS 113/669/0-4R) и программой Гейзенберг–Ландау.

Список литературы

- [1] J. Bagger, N. Lambert, *Phys. Rev. D*, **77**:6 (2008), 065008; [arXiv: 0711.0955](#); A. Gustavsson, *Nucl. Phys. B*, **811**:1–2 (2009), 66–76; [arXiv: 0709.1260](#).
- [2] M. A. Bandres, A. E. Lipstein, J. H. Schwarz, *JHEP*, **05** (2008), 025; [arXiv: 0803.3242](#).

- [3] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis, J. Maldacena, *JHEP*, **10** (2008), 091; [arXiv: 0806.1218](#).
- [4] D. Gaiotto, E. Witten, *Janus configurations, Chern–Simons coupling and the theta-angle in $N = 4$ super Yang–Mills theory*, [arXiv: 0804.2907](#).
- [5] W. Siegel, *Nucl. Phys. B*, **156**:1 (1979), 135–143; J. Schonfeld, *Nucl. Phys. B*, **185**:1 (1981), 157–171.
- [6] Б. М. Зупник, Д. Г. Пак, *ТМФ*, **77**:1 (1988), 97–106; B. M. Zupnik, D. G. Pak, *Class. Quantum Grav.*, **6**:5 (1989), 723–729; E. A. Ivanov, *Phys. Lett. B*, **268**:2 (1991), 203–208; H. Nishino, S. J. Gates Jr., *Int. J. Math. Phys. A*, **8**:19 (1993), 3371–3421; L. V. Avdeev, D. I. Kazakov, I. N. Kondrashuk, *Nucl. Phys. B*, **391**:1–2 (1993), 333–357.
- [7] Б. М. Зупник, Д. В. Хецелиус, *ЯФ*, **47**:8 (1988), 1147–1156.
- [8] B. M. Zupnik, “Harmonic superspaces for three-dimensional theories”, *Supersymmetries and Quantum Symmetries*, Lecture Notes in Phys., **524**, eds. J. Wess, E. Ivanov, Springer, Berlin, 1999, 116–123; [arXiv: hep-th/9804167](#).
- [9] I. L. Buchbinder, E. A. Ivanov, O. Lechtenfeld, N. G. Pletnev, I. B. Samsonov, B. M. Zupnik, *JHEP*, **03** (2009), 096; [arXiv: 0811.4774](#).
- [10] P. S. Howe, M. I. Leeming, *Class. Quantum Grav.*, **11**:12 (1994), 2843–2852; [arXiv: hep-th/9408062](#).
- [11] B. M. Zupnik, *Phys. Lett. B*, **660**:3 (2008), 254–259; [arXiv: 0711.4680](#); Б. М. Зупник, *ТМФ*, **157**:2 (2008), 217–234; [arXiv: 0802.0801](#).
- [12] A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, E. Sokatchev, *Harmonic Superspace*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [13] B. M. Zupnik, *Nucl. Phys. B*, **554**:1–2 (1999), 365–390; Erratum **644**:1–2 (2002), 405–406; [arXiv: hep-th/9902038](#); Б. М. Зупник, *ТМФ*, **120**:2 (1999), 324–331; [arXiv: hep-th/9812249](#).
- [14] B. M. Zupnik, “Supersymmetric Chern–Simons models in harmonic superspaces”, *Problems of Modern Theoretical Physics*, The volume dedicated to 60th birthday of Prof. I. L. Buchbinder, Изд-во ТГПУ, Томск, 2008, 349–356; [arXiv: 0805.4481](#).
- [15] R. Brooks, S. J. Gates Jr., *Nucl. Phys. B*, **432**:1–2 (1994), 205–224; [arXiv: hep-th/9407147](#).
- [16] A. Kapustin, M. Strassler, *JHEP*, **04** (1999), 021; [arXiv: hep-th/9902033](#).
- [17] B. M. Zupnik, *Phys. Lett. B*, **183**:2 (1997), 175–176; Б. М. Зупник, *ТМФ*, **69**:2 (1986), 207–213.
- [18] B. de Wit, R. Philippe, A. Van Proeyen, *Nucl. Phys. B*, **219**:1 (1983), 143–166.
- [19] J. Bagger, A. Galperin, *Phys. Rev. D*, **55**:2 (1997), 1091–1098; S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos, *Phys. Rev. D*, **64**:2 (2001), 025014; [arXiv: hep-th/0101195](#).
- [20] S. Cecotti, S. Ferrara, *Phys. Lett. B*, **187**:3–4 (1987), 335–339; S. M. Kuzenko, S. Theisen, *JHEP*, **03** (2000), 034; E. A. Ivanov, B. M. Zupnik, *Nucl. Phys. B*, **618**:1–2 (2001), 3–20; [arXiv: hep-th/0110074](#); E. A. Иванов, Б. М. Зупник, *ЯФ*, **67**:12 (2004), 2212–2224; [arXiv: hep-th/0303192](#).
- [21] I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, A. A. Tseytlin, *Phys. Rev. D*, **62**:4 (2000), 045001; [arXiv: hep-th/9911221](#).

Поступила в редакцию 4.05.2009