Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Горбачев, Новое решение уравнения движения
полевой теории суперструн, *ТМФ*, 2010, том 162, но-
мер 1, 106–111

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6458>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:31:18

© 2010 г.

Р. В. Горбачев*

НОВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ СУПЕРСТРУН

Построено новое решение уравнения движения в полевой теории суперструн. Показано, что это решение удовлетворяет двум гипотезам Сена и не требует “фантомных слагаемых”.

Ключевые слова: струнная теория поля, D-браны, конденсация тахиона.

Посвящается памяти П. Б. Медведева

1. ВВЕДЕНИЕ

Струнная теория поля получила новое развитие после нахождения решения уравнения движения бозонной струнной теории поля [1]. Решение описывает вакуум, в котором нет возбуждений открытой струны и в котором распадаются D-браны. Первое аналитическое решение полевого уравнения движения суперструны [2], [3] было получено Эрлером [4]. Это решение имеет вид регуляризованной суммы

$$\Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N \varphi'_n - \varphi_N - \frac{1}{2} \varphi'_N \right) + \Gamma, \quad (1)$$

где $\varphi_n = FcB\Omega^n cF$, $\Gamma = FB\gamma^2 F$. Слагаемые φ_N и φ'_N называются “фантомными слагаемыми”. Эти слагаемые были добавлены для того, чтобы удовлетворить уравнению движения в “сильном” $\langle\langle \Phi, Q\Phi + \Phi \star \Phi \rangle\rangle = 0$ [4] и “слабом” $\langle\langle \varphi_m, Q\Phi + \Phi \star \Phi \rangle\rangle = 0$ [5] смысле. Как следствие мы можем доказать гипотезы Сена [4]

$$E = -S(\Phi) = -\frac{1}{2} \langle\langle \Phi, Q\Phi \rangle\rangle - \frac{1}{3} \langle\langle \Phi, \Phi \star \Phi \rangle\rangle = -\frac{1}{2\pi^2}. \quad (2)$$

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия.
E-mail: rgorbachev@mi.ras.ru

2. РЕШЕНИЕ

В этой статье мы используем обозначения из работ [4], [6], [7] без детальных объяснений. Для того чтобы построить решение полевого уравнения движения суперструны, мы будем использовать следующие четыре струнных поля [4]:

$$\begin{aligned} K &= \text{грассманово четное поле,} & \text{gh\#} &= 0, \\ B &= \text{грассманово нечетное поле,} & \text{gh\#} &= -1, \\ c &= \text{грассманово нечетное поле,} & \text{gh\#} &= 1, \\ \gamma^2 &= \text{грассманово четное поле,} & \text{gh\#} &= 2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\text{gh\#}$ – духовое число. Эти поля удовлетворяют следующим алгебраическим соотношениям:

$$[B, K] = 0, \quad [B, c] = 1, \quad B^2 = c^2 = 0, \quad [B, \gamma^2] = 0, \quad [c, \gamma^2] = 0, \quad (4)$$

где $[\cdot, \cdot]$ обозначает градуированный коммутатор, и при действии БРСТ-оператора имеют вид

$$Qc = cKc + \gamma^2, \quad QB = K, \quad Q\gamma^2 = cK\gamma^2 - \gamma^2Kc, \quad QK = 0. \quad (5)$$

Также мы определим $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантный вакуум $\Omega = e^K$ и $F = \Omega^{1/2}$. Все произведения выше мы понимаем как струнное умножение.

Представление для полей K , B , c , γ^2 можно записать следующим образом:

$$K = -\frac{\pi}{2} (K_1)_L |I\rangle, \quad B = -\frac{\pi}{2} (B_1)_L |I\rangle, \quad c = -\frac{1}{\pi} c(1) |I\rangle, \quad \gamma^2 = \frac{1}{\pi} \gamma^2(1) |I\rangle,$$

здесь $|I\rangle$ является единичным струнным полем, индекс L обозначает интегрирование по положительной части единичного круга в направлении против часовой стрелки от $-i$ до $+i$, $K_1 = L_{-1} + L_1$, $B_1 = b_1 + b_{-1}$ и $\gamma^2 = \eta d\eta e^{2\phi}$.

Теперь мы можем написать решение уравнения движения для суперструны

$$Q\Phi + \Phi \star \Phi = 0 \quad (6)$$

в виде

$$\Phi = (-c - B\gamma^2 + cKBc) \frac{1}{1-K}. \quad (7)$$

Используя параметризацию Швингера [8], мы можем переписать $1/(1-K)$ в виде

$$\frac{1}{1-K} = \int_0^\infty dt e^{-t(1-K)} = \int_0^\infty dt e^{-t} \Omega^t. \quad (8)$$

С учетом (4) и (5) легко проверить, что Φ удовлетворяет уравнению (6).

Как и в случае бозонного решения [8], мы можем получить вещественное решение суперструнного уравнения движения, используя калибровочное преобразование¹⁾

$$\hat{\Phi} = U^{-1}(Q + \Psi)U = \frac{1}{\sqrt{1-K}} (Q + \Phi) \sqrt{1-K}. \quad (9)$$

¹⁾Условие вещественности означает, что $\Phi^\dagger = \Phi$. Сопряжение $\dagger$ определено как композиция эрмитова сопряжения и сопряжения Белавина–Полякова–Замолдчикова (БПЗ) [9].

Вещественное решение выглядит следующим образом:

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{1-K}} (-c - B\gamma^2 + cKBc) \frac{1}{\sqrt{1-K}}, \quad (10)$$

где

$$\frac{1}{\sqrt{1-K}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t\Omega t}. \quad (11)$$

3. КАЛИБРОВКА

Решение Эрлера удовлетворяет калибровке Шнабла $\mathcal{B}_0\Phi = 0$. Новое решение суперструнного уравнения движения удовлетворяет калибровке Эрлера–Шнабла [8]

$$\mathcal{B}_{1, \frac{1}{1-K}} \Phi = 0, \quad (12)$$

где $\mathcal{B}_0^- = \mathcal{B}_0 - \mathcal{B}_0^*$ и

$$\mathcal{B}_{f,g}\Phi = \frac{1}{2} f[\mathcal{B}_0^-(f^{-1}\Phi g^{-1})]g, \quad (13)$$

индекс $*$ обозначает сопряжение БПЗ. Для того чтобы увидеть это, мы используем следующие тождества:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{B}_0^- K &= B, & \frac{1}{2} \mathcal{B}_0^- B &= 0, \\ \frac{1}{2} \mathcal{B}_0^- c &= 0, & \frac{1}{2} \mathcal{B}_0^- \gamma^2 &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

а также тот факт, что $\mathcal{B}_0^-$ удовлетворяет правилу Лейбница. Калибровка Шнабла является частным случаем более общей калибровки Эрлера–Шнабла $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_{F,F}$.

4. ДЕЙСТВИЕ

В работе [8] было показано, что существует калибровочное преобразование между решением Шнабла и новым решением Эрлера–Шнабла. В этом разделе мы рассмотрим калибровочное преобразование между решением Эрлера полевого уравнения движения для суперструны и нашим новым решением. Для этого перепишем решения в одинаковой форме:

$$\begin{aligned} \Phi &= fc \frac{KB}{1-fg} cg - fB\gamma^2 g, \\ \Phi' &= f'c \frac{KB}{1-f'g'} cg' - f'B\gamma^2 g', \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} f' &= e^{K/2}, & g' &= e^{K/2} & \text{для решения Эрлера,} \\ f &= 1, & g &= \frac{1}{1-K} & \text{для нашего решения.} \end{aligned} \quad (16)$$

Используя (5), легко видеть, что эти решения калибровочно эквивалентны:

$$\Phi' = U^{-1}(\Phi + Q)U, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} U &= 1 - fBcg + Mf'Bcg', \\ U^{-1} &= 1 - f'Bcg' + M^{-1}fBcg. \end{aligned} \quad (18)$$

Функция M определена в виде

$$M = \frac{1 - fg}{1 - f'g'}. \quad (19)$$

Заметим, что мы имеем такое же калибровочное поле U , как и в бозонной струне.

Следовательно, действие для нового решения равно (в предположении, что уравнение движения выполняется)

$$S = \frac{1}{6} \langle\langle \Phi', Q\Phi' \rangle\rangle = \frac{1}{6} \langle\langle \Phi, Q\Phi \rangle\rangle = \frac{1}{2\pi^2}. \quad (20)$$

Как следствие энергия равна

$$E = -S(\Phi) = -\frac{1}{2\pi^2}.$$

Таким образом, новое решение удовлетворяет первой гипотезе Сена.

Вычислим непосредственно само действие. Для того чтобы корреляторы были ненулевыми, они должны иметь ϕ -импульс, равный -2 . Так как оператор смены картины имеет ϕ -импульс, равный -4 , только два слагаемых дадут нетривиальный вклад в действие:

$$S = \frac{1}{6} \langle\langle \Phi, Q\Phi \rangle\rangle = \left\langle\left\langle c\gamma^2 \frac{1}{1-K} \right\rangle\right\rangle + 2 \left\langle\left\langle BcKc \frac{1}{1-K} \gamma^2 \frac{1}{1-K} \right\rangle\right\rangle. \quad (21)$$

Для первого коррелятора мы имеем

$$\begin{aligned} \left\langle\left\langle c\gamma^2 \frac{1}{1-K} \right\rangle\right\rangle &= \int_0^\infty dt e^{-t} \langle\langle c\gamma^2 \Omega^t \rangle\rangle = \int_0^\infty dt e^{-t} \langle Y_{-2} c\gamma^2(0) \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dt e^{-t} t^2 = \frac{1}{\pi^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

для второго коррелятора

$$\begin{aligned} \left\langle\left\langle BcKc \frac{1}{1-K} \gamma^2 \frac{1}{1-K} \right\rangle\right\rangle &= \int_0^\infty dt ds e^{-t-s} \frac{d}{dn} \langle\langle \Omega^s Bc\Omega^n c\Omega^t \gamma^2 \rangle\rangle|_{n=0} = \\ &= \int_0^\infty dt ds e^{-t-s} \frac{d}{dn} \frac{s+n+t}{2\pi^2} n|_{n=0} = \frac{1}{\pi^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом,

$$S = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2} \right) = \frac{1}{2\pi^2}. \quad (24)$$

5. КОГОМОЛОГИЯ

Следуя работам [7], [10], [11], непосредственно получаем доказательство отсутствия физических возбуждений в окрестности тахионного вакуума, или, что аналогично, отсутствие кохомологии у оператора Q_Φ . Для этого необходимо найти оператор гомотопии A , удовлетворяющий выражению

$$Q_\Phi A = QA + [\Phi, A] = 1. \quad (25)$$

Найдем оператор A следующим образом [7]. Так как A имеет духовое число -1 , предположим, что оно имеет вид

$$A = BG(K), \quad (26)$$

где G – некоторое поле, зависящее только от K . Вычислим

$$Q_\Phi A = KG - (c(1 - K)Bc + B\gamma^2) \frac{1}{1 - K} BG - GB(c(1 - K)Bc + B\gamma^2) \frac{1}{1 - K}. \quad (27)$$

Если мы хотим сокращения B и c , нам следует определить поле G в виде

$$G = -\frac{1}{1 - K}. \quad (28)$$

Следовательно, оператор гомотопии имеет вид²⁾

$$A = -B \frac{1}{1 - K} = -B \int_0^\infty dt e^{-t} \Omega^t. \quad (29)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы представили простое решение уравнения движения для полевой теории суперструны. Это решение калибровочно эквивалентно решению Эрлера, а следовательно, действие для этого решения равно $1/2\pi^2$. Также мы доказали, что оператор Q_Φ не имеет кохомологий. Эта форма решения является предпочтительной, так как новая форма, как и в случае решения Эрлера–Шнабла, не требует регуляризации и “фантомных слагаемых”. Было бы интересно найти простое аналитическое решение уравнений движения в полевой теории фермионной струны [12].

Благодарности. Автор благодарен И. Я. Арефьевой за полезные дискуссии. Работа частично поддержана РФФИ (гранты № 08-01-00798, 09-01-12179-офи), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-795.2008.1) и Федеральным агентством по науке и инновациям (на выполнение НИР № 02.740.11.5057).

²⁾Заметим, что оператор гомотопии для суперструны совпадает с оператором гомотопии для бозонной струны.

Список литературы

- [1] M. Schnabl, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **10**:4 (2006), 433–501; [arXiv: hep-th/0511286](#).
- [2] I. Ya. Aref'eva, P. B. Medvedev, A. P. Zubarev, *Nucl. Phys. B*, **341**:2 (1990), 464–498; *Phys. Lett. B*, **240**:3–4 (1990), 356–362.
- [3] C. R. Preitschopf, C. B. Thorn, S. A. Yost, *Nucl. Phys. B*, **337**:2 (1990), 363–433.
- [4] T. Erler, *JHEP*, **01** (2008), 013; [arXiv: 0707.4591](#).
- [5] I. Y. Aref'eva, R. V. Gorbachev, D. A. Grigoryev, P. N. Khromov, M. V. Maltsev, P. B. Medvedev, *JHEP*, **05** (2009), 050; [arXiv: 0901.4533](#).
- [6] Y. Okawa, *JHEP*, **04** (2006), 055; [arXiv: hep-th/0603159](#).
- [7] T. Erler, *JHEP*, **05** (2007), 083; [arXiv: hep-th/0611200](#); *JHEP*, **05** (2007), 084; [arXiv: hep-th/0612050](#).
- [8] T. Erler, M. Schnabl, *JHEP*, **10** (2009), 066; [arXiv: 0906.0979](#).
- [9] M. R. Gaberdiel, B. Zwiebach, *Nucl. Phys. B*, **505**:3 (1997), 569–624; [arXiv: hep-th/9705038](#).
- [10] I. Ellwood, B. Feng, Y.-H. He, N. Moeller, *JHEP*, **07** (2001), 016; [arXiv: hep-th/0105024](#).
- [11] I. Ellwood, M. Schnabl, *JHEP*, **02** (2007), 096; [arXiv: hep-th/0606142](#).
- [12] И. Я. Арефьева, Р. В. Горбачев, П. Б. Медведев, *ТМФ*, **158**:3 (2009), 378–390; [arXiv: 0804.2017](#).

Поступила в редакцию 28.10.2009