Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, А. А. Юшканов, Температурный скачок в вырожденных квантовых газах при наличии конденсата Бозе–Энштейна, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 1, 112–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6459>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:07:10

© 2010 г.

А. В. Латышев*, А. А. Юшканов*

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ СКАЧОК В ВЫРОЖДЕННЫХ КВАНТОВЫХ ГАЗАХ ПРИ НАЛИЧИИ КОНДЕНСАТА БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА

Построено кинетическое уравнение, моделирующее поведение вырожденного квантового бозе-газа с частотой столкновений, зависящей от импульса элементарных возбуждений. Рассмотрен случай, когда в элементарных возбуждениях определяющей является фононная компонента. Получено аналитическое решение полупространственной граничной задачи о скачке температуры на границе вырожденного бозе-газа при наличии конденсата Бозе–Эйнштейна.

Ключевые слова: вырожденный квантовый бозе-газ, конденсат Бозе–Эйнштейна, скачок температуры, фононная компонента.

1. ВВЕДЕНИЕ

Поведение квантовых газов в последнее время вызывает повышенный интерес. Это связано, в частности, с развитием экспериментальных методик получения и исследования квантовых газов при экстремально низких температурах [1]. В большинстве работ исследуются объемные свойства квантовых газов. В то же время очевидна важность учета влияния граничных эффектов на свойства таких систем. Отметим работу [2], в которой рассматриваются термодинамически равновесные свойства квантовых газов в полупространстве. Наряду с равновесными вызывают интерес неравновесные свойства ограниченных в пространстве квантовых газов. В частности, важное значение имеет такое явление, как скачок температуры на границе газ – конденсированное (в частности, твердое) тело при наличии нормального к поверхности теплового потока [3]. Такой скачок температуры часто называют скачком температуры Капицы [4]. Отметим, что до сих пор скачок Капицы вычислялся в режиме, когда учитывалось только рассеяние фононов на границе между двумя средами, а рассеянием фононов в объеме пренебрегалось [5]. В данной работе проводится учет влияния на скачок температуры именно рассеяния элементарных возбуждений бозе-газа (фононов) в объеме. Характер рассеяния фононов на поверхности учитывается при этом путем введения феноменологического коэффициента

*Московский государственный областной университет, Москва, Россия.
E-mail: avlatyshev@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

зеркальности рассеяния фононов на поверхности. Таким образом, данный подход является дополнительным по отношению к предложенному в монографии [5].

В работе [6] рассматривалась задача о скачке температуры в квантовом ферми-газе. Было получено аналитическое решение при произвольной степени вырождения газа. В работе [7] рассматривалась аналогичная задача для бозе-газа. Но газ предполагался невырожденным, т.е. не учитывалось наличие конденсата Бозе–Энштейна.

Настоящая работа посвящена анализу задачи о скачке температуры в вырожденном бозе-газе. Наличие конденсата Бозе–Энштейна приводит к существенной модификации как постановки задачи, так и метода ее решения.

При этом для описания кинетических процессов вблизи поверхности используется кинетическое уравнение с модельным интегралом столкновений. Мы будем предполагать, что граничные условия на поверхности имеют зеркально-диффузный характер.

2. ВЫВОД КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для описания поведения газа будем использовать кинетическое уравнение с модельным интегралом столкновений, аналогичное тому, которое используется для описания классического газа. При этом будет проведен необходимый учет квантового характера бозе-газа и наличия конденсата Бозе–Энштейна.

Для разреженного бозе-газа эволюция функции распределения частиц газа f описывается кинетическим уравнением [3]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \nabla f = I(f). \quad (1)$$

Здесь ε – кинетическая энергия частиц газа, $\mathbf{p}$ – их импульс, $I(f)$ – интеграл столкновений.

В случае вырожденного бозе-газа при кинетическом описании необходимо учитывать, что свойства конденсата Бозе–Энштейна могут меняться в зависимости от пространственных и временной координат, т.е., по сути дела, необходимо рассматривать двухжидкостную модель (точнее, “двухфлюидную”, так как рассматривается не жидкость, а газ). Обозначим плотность конденсата Бозе–Энштейна через $\rho_c = \rho_c(\mathbf{r}, t)$, а его скорость – через $\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_c(\mathbf{r}, t)$.

Тогда для плотностей потока массы $\mathbf{j}$, энергии $\mathbf{Q}$ и импульса Π_{ik} конденсата Бозе–Энштейна (в предположении нулевого химического потенциала) можно записать [5]

$$\mathbf{j} = \rho_c \mathbf{u}_c, \quad \mathbf{Q} = \frac{\rho_c u_c^2}{2} \mathbf{u}_c, \quad \Pi_{ik} = \rho_c u_{ci} u_{ck}.$$

Законы сохранения числа частиц, энергии и импульса требуют в стационарном случае выполнения следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{j} &= - \int I(f) d\Omega_B, & \nabla \mathbf{Q} &= - \int \varepsilon(\mathbf{p}) I(f) d\Omega_B, \\ \nabla \Pi &= - \int \mathbf{p} I(f) d\Omega_B. \end{aligned}$$

Здесь

$$d\Omega_B = \frac{(2s+1)d^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

s – спин молекулы, $\varepsilon(\mathbf{p})$ – энергия, $I(f)$ – интеграл столкновений из уравнения (1).

В дальнейшем нас будет интересовать случай движения с малыми (по сравнению с тепловыми) скоростями. Отметим, что для конденсата Бозе–Энштейна величины $\mathbf{Q}$ и Π_{ik} зависят от скорости нелинейно (пропорциональны третьей и второй степеням скорости). Поэтому в линейном приближении по скорости $\mathbf{u}_c$ законы сохранения энергии и импульса можно записать в виде

$$\int \varepsilon(\mathbf{p})I(f) d\Omega_B = 0, \quad \int \mathbf{p}I(f) d\Omega_B = 0.$$

Для слабо взаимодействующего бозе-газа согласно теории Боголюбова справедливо следующее соотношение для энергии возбуждений $\varepsilon(p)$ [3]:

$$\varepsilon(p) = \left[u_0^2 p^2 + \left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2)$$

где $u_0 = (4\pi\hbar^2 a n / m^2)^{1/2}$, a – длина рассеяния молекул газа, n – концентрация, m – масса, $\mathbf{p}$ – импульс элементарных возбуждений. Параметр a характеризует силу взаимодействия молекул газа. Для слабо взаимодействующего газа этот параметр можно считать малым.

В нашей предыдущей работе [8] рассмотрен случай, когда для достаточно малых значений величины a выполняется соотношение $u_0^2 \ll kT/m$, k – постоянная Больцмана, T – температура. В этом случае первым слагаемым в квадратных скобках в формуле (2) можно пренебречь. Выражение для энергии $\varepsilon(p)$ приобретет тот же вид, что и в случае невзаимодействующих молекул: $\varepsilon(p) = p^2/(2m)$.

Теперь же рассмотрим случай, когда в выражении (2) превалирует фононная компонента, т.е. когда $T \ll m u_0^2 / k$. В этом случае согласно соотношению (2) получаем $\varepsilon(p) = u_0 |\mathbf{p}| = u_0 p$. Следовательно, $\partial \varepsilon(\mathbf{p}) / \partial \mathbf{p} = u_0 \mathbf{p} / p$.

При рассмотрении кинетического уравнения (1) под частицами газа необходимо понимать элементарные возбуждения бозе-газа со спектром энергий (2). Характер элементарных возбуждений проявляется в свойствах интеграла столкновений. Возьмем в уравнении (1) в качестве интеграла столкновений его τ -приближение. Тогда характер элементарных возбуждений будет проявляться в зависимости частоты столкновений от импульса возбуждений [7], [9]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_0 \frac{\mathbf{p}}{p} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \nu(\mathbf{p})(f_B^* - f). \quad (3)$$

Здесь f – функция распределения, $\nu(\mathbf{p}) = \nu_0 |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^\gamma$ – зависимость частоты столкновений от импульса возбуждений, γ – постоянная. В случае, когда в элементарных возбуждениях превалирует фононная компонента, $\gamma \geq 3$ [3]. Величина $\mathbf{p}_0 = m \mathbf{v}_0$, где $\mathbf{v}_0$ – скорость нормальной компоненты бозе-газа, f_B^* – равновесная функция

распределения Бозе–Энштейна

$$f_B^* = \left[\exp\left(\frac{u_0|\mathbf{p} - \mathbf{p}_*|}{kT_*}\right) - 1 \right]^{-1},$$

ν_0 – параметр модели, имеющий смысл обратной средней длины свободного пробега l , $\nu_0 \sim 1/l$.

Параметры, входящие в f_B^* , а именно T_* , $\mathbf{u}_*$, определяются из требования выполнения законов сохранения импульса и энергии:

$$\int \nu(\mathbf{p}) \mathbf{p} [f - f_B^*] d^3p = 0, \quad \int \nu(\mathbf{p}) \varepsilon(\mathbf{p}) [f - f_B^*] d^3p = 0.$$

Закон сохранения числа частиц здесь не выполняется, так как часть частиц переходит в конденсат Бозе–Энштейна.

Будем считать, что скорость газа много меньше средней тепловой скорости, а возникающие характерные перепады температуры на длине свободного пробега l малы по сравнению с температурой газа. В этих предположениях возможна линеаризация задачи.

Будем искать функцию распределения в виде

$$f = f_B^s(C) + \varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{C})g(C),$$

где $f_B^s(C) = 1/(e^C - 1)$, φ – новая неизвестная функция, T_s – температура поверхности, $g(v) = -\partial f_B^s / \partial \varepsilon_s$, $\varepsilon_s = C$, и введены обозначения: $\mathbf{C} = u_0 \mathbf{p} / (kT_s)$, $\varepsilon_* = u_0 |\mathbf{p} - \mathbf{p}_*| / (kT_*)$. С учетом этих обозначений

$$f_B^*(\varepsilon_*) = \frac{1}{e^{\varepsilon_*} - 1}, \quad f_B^s(C) = \frac{1}{e^C - 1}, \quad g(C) = \frac{e^C}{(e^C - 1)^2}.$$

Займемся линеаризацией локального бозиама f_B^* , переходя к безразмерным величинам. Заметим, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_* &= \frac{T_s}{T_*} \frac{u_0 |\mathbf{p} - \mathbf{p}_*|}{kT_s} = \frac{T_s}{T_s + \delta T_*} \frac{u_0}{kT_s} \sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_*)^2} = \\ &= \left(1 - \frac{\delta T_*}{T_s}\right) \frac{u_0}{kT_s} \left(p - \frac{\mathbf{p} \mathbf{p}_*}{p}\right), \end{aligned}$$

или

$$\varepsilon_* = \left(1 - \frac{\delta T_*}{T_s}\right) \left(C - \frac{\mathbf{C} \mathbf{C}_*}{C}\right) = C - \frac{\mathbf{C} \mathbf{C}_*}{C} - C \frac{\delta T_*}{T_s}.$$

Поэтому

$$\delta \varepsilon_* = \varepsilon_* - \varepsilon_s = -\frac{\mathbf{C} \mathbf{C}_*}{C} - C \frac{\delta T_*}{T_s},$$

ибо $\varepsilon_s = C$.

Следовательно,

$$f_B^* = f_B^s + g(C) \left(\frac{\mathbf{C}\mathbf{C}^*}{C} + C \frac{\delta T_*}{T_s} \right).$$

Отметим, что в рассматриваемом приближении величину $\nu(\mathbf{p})$ в уравнении (3) можно заменить на $\nu_0 p^\gamma$.

Введем безразмерные время и координату $\tau = \nu_0(kT_s/u_0)^\gamma t$ и $\mathbf{r}_1 = \nu_0(kT_s/u_0)^\gamma \mathbf{r}$.

Теперь ясно, что уравнение (3) (в безразмерных переменных) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\mathbf{C}}{C} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_1} = C^\gamma \left[\frac{\mathbf{C}\mathbf{C}^*}{C} + C \frac{\delta T_*}{T_s} - \varphi \right]. \quad (4)$$

Из законов сохранения энергии и импульса находим

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_*}{T_s} &= \frac{1}{4\pi g_{\gamma+4}} \int C^{\gamma+1} \varphi(\tau, \mathbf{r}_1, \mathbf{C}) g(C) d^3 C, \\ C_* &= \frac{3}{4\pi g_{\gamma+3}} \int C^\gamma \mathbf{C} \varphi(\tau, \mathbf{r}_1, \mathbf{C}) g(C) d^3 C, \end{aligned}$$

где

$$g_{\gamma+n} = \int_0^\infty C^{\gamma+n} g(C) dC, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Представим уравнение (4) в стандартной для теории переноса форме:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\mathbf{C}}{C} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_1} + C^\gamma \varphi(\tau, \mathbf{r}_1, \mathbf{C}) = \frac{1}{4\pi} \int k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') \varphi(\tau, \mathbf{r}_1, \mathbf{C}') g(C') d^3 C', \quad (5)$$

где

$$k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = \frac{3}{g_{\gamma+3}} C^{\gamma-1} C'^\gamma \mathbf{C}\mathbf{C}' + \frac{1}{g_{\gamma+4}} C^{\gamma+1} C'^{\gamma+1}.$$

Уравнение (5) можно представить в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\mathbf{C}}{C} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_1} + C^\gamma \varphi(\tau, \mathbf{r}_1, \mathbf{C}) &= \\ &= \frac{3C^{\gamma-1}\mathbf{C}}{4\pi g_{\gamma+3}} \int C'^\gamma \mathbf{C}' \varphi g(C') d^3 C' + \frac{C^{\gamma+1}}{4\pi g_{\gamma+4}} \int C'^{\gamma+1} \varphi g(C') d^3 C'. \end{aligned}$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рассматриваемой задаче вырожденный бозе-газ занимает полупространство $x > 0$ над плоской поверхностью, на которой происходит теплообмен между конденсированной фазой и газом. Поэтому далее функцию φ можно рассматривать в виде $\varphi(\tau, \mathbf{r}_1, \mathbf{C}) = h(x, \mu, C)$. Такая функция удовлетворяет уравнению

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + C^\gamma h(x, \mu, C) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^\infty K(\mu, C; \mu', C') h(x, \mu', C') g(C') d\mu' dC', \quad (6)$$

где

$$K(\mu, C; \mu', C') = \frac{3C^{\gamma-1}\mu C'^{\gamma+3}\mu'}{g_{\gamma+3}} + \frac{C^{\gamma+1}C'^{\gamma+3}}{g_{\gamma+4}}.$$

Задача состоит в нахождении величины относительного скачка температуры $\varepsilon_T = \Delta T/T_s$, $\Delta T = T_s - T$, как функции Q_x – величины проекции потока тепла на ось x . Учитывая линейный характер задачи, можно записать: $\varepsilon_T = RQ_x$. Безразмерный коэффициент R скачка температуры называется сопротивлением Капицы.

Очевидно, что уравнение (6) имеет следующие частные решения: $h_1 = \mu$, $h_2 = C$, а функцией распределения Чепмена–Энскога является функция

$$h_{as}(x, \mu, C) = B^+ \mu - \varepsilon_T C,$$

где величина B^+ пропорциональна величине потока тепла Q_x .

Теперь, предполагая отражение элементарных возбуждений от стенки зеркально-диффузным, сформулируем граничные условия:

$$h(0, \mu, C) = qh(0, -\mu, C), \quad 0 < \mu < 1, \quad (7)$$

$$h(x, \mu, C) = B^+ \mu - \varepsilon_T C + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad -1 < \mu < 0, \quad (8)$$

где q – коэффициент зеркальности.

Итак, задача состоит в решении уравнения (6) с граничными условиями (7) и (8). Особый интерес представляет собой нахождение величины температурного скачка ε_T .

4. СВЕДЕНИЕ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Продолжим функцию h в полупространство $x < 0$ симметричным образом: $h(x, \mu, C) = h(-x, -\mu, C)$. Тогда при $x < 0$

$$h_{as}(x, \mu, C) = B^- \mu - \varepsilon_T C,$$

причем $B^+ = -B^-$. Теперь выделим у функции h распределение Чепмена–Энскога, полагая

$$h(x, \mu, C) = B^\pm \mu - \varepsilon_T C + h_c(x, \mu, C).$$

Сформулируем для функции h_c граничные условия для нижнего и верхнего полупространств:

$$h_c(+0, \mu, C) = -(1+q)B^+ \mu + (1-q)\varepsilon_T C + qh_c(+0, -\mu, C), \quad 0 < \mu < 1,$$

$$h_c(-0, \mu, C) = -(1+q)B^- \mu + (1-q)\varepsilon_T C + qh_c(-0, -\mu, C), \quad -1 < \mu < 0,$$

$$h_c(+\infty, \mu, C) = 0, \quad h_c(-\infty, \mu, C) = 0.$$

Включим эти граничные условия в кинетическое уравнение. Получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{C\gamma} \frac{\partial h}{\partial x} + h_c(x, \mu, C) &= \frac{C}{2g_{\gamma+4}} W_0(x) + \frac{3\mu}{2g_{\gamma+3}} W_1(x) + \\ &+ |\mu| \{ -(1+q)B^+ |\mu| + (1-q)\varepsilon_T C - (1-q)h_c(\mp 0, \mu, C) \} \delta(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака,

$$W_m(x) = \int_{-1}^1 \int_0^\infty \mu^m C^{\gamma+3} h(x, \mu, C) g(C) d\mu dC, \quad m = 0, 1. \quad (10)$$

Уравнение (9) фактически объединяет два уравнения. Дело в том, что слагаемое $h_c(-0, \mu, C)$ отвечает положительным значениям переменной μ : $0 < \mu < 1$, а слагаемое $h_c(+0, \mu, C)$ – отрицательным значениям μ : $-1 < \mu < 0$.

Решение уравнений (9) будем искать в виде интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} h_c(x, \mu, C) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \Phi(k, \mu, C) dk, & \delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk, \\ W_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} E_0(k) dk, & W_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} E_1(k) dk. \end{aligned}$$

Решая уравнение (10) при $x > 0$, $\mu < 0$, считая известной правую часть этого уравнения и удовлетворяя граничным условиям вдали от стенки, получаем:

$$h_c^+(x, \mu, C) = -\frac{C^\gamma}{\mu} e^{-x C^\gamma / \mu} \int_x^{+\infty} e^{t C^\gamma / \mu} W(t, \mu, C) dt,$$

где

$$W(t, \mu, C) = \frac{C}{2g_{\gamma+4}} W_0(t, \mu, C) + \frac{3\mu}{2g_{\gamma+3}} W_1(t, \mu, C).$$

После несложных вычислений находим

$$h_c^+(x, \mu, C) = \frac{C^\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx} E(k, \mu, C) dk}{C^\gamma + ik\mu},$$

где

$$E(k, \mu, C) = \frac{C}{2g_{\gamma+4}} E_0(k) + \frac{3\mu}{2g_{\gamma+3}} E_1(k).$$

Аналогично можно показать, что

$$h_c^-(x, \mu, C) = \frac{C^\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx} E(k, \mu, C) dk}{C^\gamma + ik\mu}.$$

Таким образом, из двух последних выражений с учетом четности функции $E(k, \mu, C)$ по переменной k находим

$$h_c^\pm(0, \mu, C) = \frac{C^\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(C^\gamma - ik\mu) E(k, \mu, C) dk}{C^{2\gamma} + k^2 \mu^2} = \frac{C^{2\gamma}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{E(k, \mu, C) dk}{C^{2\gamma} + k^2 \mu^2}. \quad (11)$$

Отсюда видно, что два уравнения (9) можно объединить в одно:

$$\frac{\mu}{C^\gamma} \frac{\partial h}{\partial x} + h_c(x, \mu, C) = \frac{C}{2g_{\gamma+4}} W_0(x) + \frac{3\mu}{2g_{\gamma+3}} W_1(x) + |\mu| \{ -(1+q)B^+|\mu| + (1-q)\varepsilon_T C - (1-q)h_c^\pm(0, \mu, C) \} \delta(x). \quad (12)$$

Перейдем в уравнении (12) к интегралам Фурье. Получаем уравнение

$$\begin{aligned} (C^\gamma + ik\mu)\Phi(k, \mu, C) = & \frac{C^{\gamma+1}}{2g_{\gamma+4}} E_0(k) + \frac{3C^\gamma\mu}{2g_{\gamma+3}} E_1(k) + \\ & + C^\gamma |\mu| \left[-(1+q)B^+|\mu| + (1-q)\varepsilon_T C - \right. \\ & \left. - C^{2\gamma} \frac{1-q}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{CE_0(k_1)}{2g_{\gamma+4}} + \frac{3\mu E_1(k_1)}{2g_{\gamma+3}} \right) \frac{dk_1}{C^{2\gamma} + k_1^2 \mu^2} \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Рассмотрим равенство (10). Переписав его в терминах интегралов Фурье, получаем

$$E_j(k) = \int_{-1}^1 \int_0^\infty \mu^j \Phi(k, \mu, C) C^{\gamma+3} g(C) d\mu dC, \quad j = 0, 1. \quad (14)$$

Выразим Φ из уравнения (13) и подставим его в (14) при $j = 0, 1$. Получаем систему, состоящую из двух характеристических уравнений. Не выписывая, объединим их в одно векторное характеристическое уравнение:

$$\Lambda(k)E(k) = -2(1+q)B^+T_1(k) + 2(1-q)\varepsilon_T T_2(k) - \frac{1-q}{\pi} \int_0^\infty J(k, k_1)E(k_1) dk_1. \quad (15)$$

Здесь

$$T_{m,l}(k) = \int_0^1 \int_0^\infty \frac{\mu^l C^m g(C) d\mu dC}{C^{2\gamma} + k^2 \mu^2},$$

$\Lambda(k)$ – дисперсионная матрица:

$$\Lambda(k) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{g_{\gamma+4}} T_{3\gamma+4,0}(k) & \frac{3ik}{g_{\gamma+3}} T_{2\gamma+3,2}(k) \\ \frac{ik}{g_{\gamma+4}} T_{2\gamma+4,2}(k) & 1 - \frac{3}{g_{\gamma+3}} T_{3\gamma+3,2}(k) \end{pmatrix},$$

$E(k)$ – неизвестный вектор-столбец

$$E(k) = \begin{pmatrix} E_0(k) \\ E_1(k) \end{pmatrix},$$

$T_1(k)$ и $T_2(k)$ – векторы-столбцы свободных членов

$$T_1(k) = \begin{pmatrix} T_{3\gamma+3,2}(k) \\ -ikT_{2\gamma+3,4}(k) \end{pmatrix}, \quad T_2(k) = \begin{pmatrix} T_{3\gamma+4,1}(k) \\ -ikT_{2\gamma+4,3}(k) \end{pmatrix},$$

матрица $J(k, k_1)$ – матрица-функция, которую назовем матрицей Неймана:

$$J(k, k_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_{\gamma+4}} J_{4\gamma+4,1}(k, k_1) & -\frac{3ik}{g_{\gamma+3}} J_{3\gamma+3,3}(k, k_1) \\ -\frac{ik}{g_{\gamma+4}} J_{3\gamma+4,3}(k, k_1) & \frac{3}{g_{\gamma+3}} J_{4\gamma+3,3}(k, k_1) \end{pmatrix}.$$

В матрице Неймана введены интегралы

$$J_{m,l}(k, k_1) = \int_0^1 \int_0^\infty \frac{\mu^l C^m g(C) d\mu dC}{(C^{2\gamma} + k^2 \mu^2)(C^{2\gamma} + k_1^2 \mu^2)}.$$

5. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Решение уравнения (15) будем искать в виде

$$\varepsilon_T = \frac{1+q}{1-q} [\varepsilon_0 + \varepsilon_1(1-q) + \varepsilon_2(1-q)^2 + \dots], \quad (16)$$

$$E(k) = 2(1+q) [E^{(0)}(k) + E^{(1)}(k)(1-q) + E^{(2)}(k)(1-q)^2 + \dots]. \quad (17)$$

Подставим эти равенства в характеристическое уравнение. Получаем счетную систему уравнений:

$$\Lambda(k)E^{(0)}(k) = -B^+T_1(k) + \varepsilon_0T_2(k), \quad (18)$$

$$\Lambda(k)E^{(1)}(k) = \varepsilon_1T_2(k) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J(k, k_1)E_0(k_1) dk_1, \quad (19)$$

$$\Lambda(k)E^{(2)}(k) = \varepsilon_2T_2(k) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J(k, k_1)E_1(k_1) dk_1, \quad \dots \quad (20)$$

Преобразуем элементы на главной диагонали дисперсионной матрицы:

$$1 - \frac{1}{g_{\gamma+4}} T_{3\gamma+4,0}(k) = \frac{k^2}{g_{\gamma+4}} T_{\gamma+4,2}(k), \quad 1 - \frac{1}{g_{\gamma+3}} T_{3\gamma+4,2}(k) = \frac{3k^2}{g_{\gamma+3}} T_{\gamma+3,4}(k).$$

Теперь дисперсионная матрица-функция имеет вид

$$\Lambda(k) = \begin{pmatrix} \frac{k^2}{g_{\gamma+4}} T_{\gamma+4,2}(k) & \frac{3ik}{g_{\gamma+3}} T_{2\gamma+3,2}(k) \\ \frac{ik}{g_{\gamma+4}} T_{2\gamma+4,2}(k) & \frac{3k^2}{g_{\gamma+3}} T_{\gamma+3,4}(k) \end{pmatrix}.$$

Определитель дисперсионной матрицы назовем дисперсионной функцией: $\lambda(z) \equiv \det \Lambda(z) = k^2 \omega(k)$, где

$$\omega(k) = \frac{3k^2}{g_{\gamma+3}g_{\gamma+4}} [k^2 T_{\gamma+4,2}(k) T_{\gamma+3,4}(k) + T_{2\gamma+3,2}(k) T_{2\gamma+4,2}(k)].$$

Обратная к дисперсионной матрица такова: $\Lambda^{-1}(k) = D(k)/\lambda(k)$, где

$$D(k) = \begin{pmatrix} \frac{3k^2}{g_{n+3}} T_{n+3,4}(k) & -\frac{3ik}{g_{n+3}} T_{2n+3,2}(k) \\ -\frac{ik}{g_{n+4}} T_{2n+4,2}(k) & \frac{k^2}{g_{n+4}} T_{n+4,2}(k) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим построение ряда (17). Обозначим

$$E^{(0)}(k) = \begin{pmatrix} E_0^{(0)}(k) \\ E_1^{(0)}(k) \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (18) находим

$$E^{(0)}(k) = 2 \frac{D(k)}{\lambda(k)} \begin{pmatrix} -B^+ T_{3\gamma+3,2}(k) + \varepsilon_0 T_{3\gamma+4,1}(k) \\ ik(B^+ T_{2\gamma+3,4}(k) + \varepsilon_0 T_{2\gamma+4,3}(k)) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Подставив выражение (21) в уравнение (19), находим $E^{(1)}(k)$. Затем, подставив $E^{(1)}(k)$ в уравнение (20), находим $E^{(2)}(k)$. Продолжая этот процесс неограниченно, построим все члены ряда (17). Покажем теперь, как строятся члены ряда (16). Для этого запишем векторное равенство (21) в виде двух скалярных:

$$E_0^{(0)} = \frac{1}{k^2 \omega(k)} \left\{ -\frac{3k^2}{g_{\gamma+3}} T_{\gamma+3,3}(k) [B^+ T_{3\gamma+3,2}(k) - \varepsilon_0 T_{3\gamma+4,1}(k)] + \right. \\ \left. + \frac{3k^2}{g_{\gamma+3}} T_{2\gamma+3,2}(k) [B^+ T_{2\gamma+3,4}(k) + \varepsilon_0 T_{2\gamma+4,3}(k)] \right\}, \quad (22)$$

$$E_1^{(0)} = \frac{1}{k^2 \omega(k)} \{ ik T_{2\gamma+4,2}(k) [B^+ T_{3\gamma+3,2}(k) - \varepsilon_0 T_{3\gamma+4,1}(k)] + \\ + ik^3 T_{\gamma+4,2}(k) [B^+ T_{2\gamma+3,4}(k) + \varepsilon_0 T_{2\gamma+4,3}(k)] \}. \quad (23)$$

Из выражения (22) видно, что функция $E_0^{(0)}(k)$ не имеет особенностей в нуле, в то время как согласно равенству (23) функция $E_1^{(0)}(k)$ имеет в точке $k = 0$ полюс второго порядка. Устраняя особенность в нуле, получаем

$$\varepsilon_0 = B^+ \frac{T_{3\gamma+3,2}(0)}{T_{3\gamma+4,1}(0)} = B^+ \frac{2g_{\gamma+3}}{3g_{\gamma+4}}.$$

Величина B^+ пропорциональна величине потока тепла:

$$\mathbf{Q} = \int f(x, \mathbf{p}) \frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial \mathbf{p}} \varepsilon(p) d\Omega_B.$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$\mathbf{Q} = \frac{(2s+1)u_0^2}{(2\pi\hbar)^3} \int h(x, \mathbf{p}) g(p) \mathbf{p} d^3 p.$$

Перейдя в этом выражении к интегрированию по безразмерному импульсу, получаем

$$\mathbf{Q} = \frac{(2s+1)(kT_s)^4}{(2\pi\hbar)^3 u_0^2} \int h(x, \mathbf{C}) g(C) \mathbf{C} d^3 C.$$

Заменим здесь функцию h ее разложением Чепмена–Энскога h_{as} . В результате для x -компоненты потока тепла имеем

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{(2s+1)(kT_s)^4}{(2\pi\hbar)^3 u_0^2} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} [\varepsilon_T C + B^+ \mu] g(C) C^3 \mu d\mu dC d\chi = \\ &= \frac{(2s+1)(kT_s)^4}{(2\pi\hbar)^3 u_0^2} \frac{4\pi}{3} g_3 B^+. \end{aligned}$$

Отсюда

$$B^+ = \frac{6\pi^2}{g_3} \frac{\hbar^3 u_0^2 Q_x}{(2s+1)(kT_s)^4}.$$

Таким образом, величина ε_0 равна

$$\varepsilon_0 = \frac{4\pi^2 g_{\gamma+3}}{g_3 g_{\gamma+4}} \frac{\hbar^3 u_0^2}{(2s+1)(kT_s)^4} Q_x. \quad (24)$$

Возвращаясь к формуле для скачка температуры $\Delta T = R Q_x$, получаем из выражения (24), что сопротивление Калпицы в нулевом приближении равно

$$R = \frac{4\pi^2 g_{\gamma+3}}{g_3 g_{\gamma+4}} \frac{1+q}{1-q} \frac{\hbar^3 u_0^2}{(2s+1)k^4 T_s^3}.$$

Перепишем это равенство в виде

$$R = C(\gamma, q) \frac{\hbar^3 u_0^2}{(2s+1)k^4 T_s^3},$$

где

$$C(\gamma, q) = \frac{4\pi^2 g_{\gamma+3}}{g_3 g_{\gamma+4}} \frac{1+q}{1-q} \quad (25)$$

есть (безразмерный) коэффициент скачка температуры.

Знак “плюс” в формуле (25) указывает, что температура стенки выше, чем температура фононной компоненты.

Рис. 1. Зависимость коэффициента скачка температуры от параметра γ . Кривая 1 соответствует коэффициенту зеркальности $q = 0.3$; кривая 2 – значению $q = 0.5$; кривая 3 – значению $q = 0.8$.

Рис. 2. Зависимость коэффициента скачка температуры от коэффициента зеркальности q . Кривая 1 соответствует значению параметра столкновений $\gamma = 3$; кривая 2 – значению $\gamma = 4$; кривая 3 – значению $\gamma = 5$.

Графики поведения коэффициента температурного скачка в зависимости от величин параметра γ и коэффициента зеркальности q представлены на рис. 1 и 2. Из приведенных графиков видно, что величина $C(\gamma, q)$ монотонно убывает с ростом параметра γ . При стремлении коэффициента зеркальности q к единице величина $C(\gamma, q)$ неограниченно возрастает, так как в этом пределе теплообмен между стенкой и прилегающим к ней газом становится невозможным.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено кинетическое уравнение для вырожденного квантового бозе-газа с частотой столкновений, зависящей от импульса элементарных возбуждений бозе-газа. Рассмотрен случай, когда в элементарных возбуждениях бозе-газа определяющей является фоновная компонента. Граничные условия предполагаются зеркально-диффузными. Получено решение полупространственной граничной задачи о скачке температуры на границе вырожденного бозе-газа при наличии конденсата Бозе–Эйнштейна. Выведена формула для нахождения скачка температуры и вычисления сопротивления Капицы. Разработан достаточно общий метод решения кинетических уравнений с зеркально-диффузными граничными условиями, впервые предложенный в работе [10] в задаче о скин-эффекте.

Список литературы

- [1] Л. П. Питаевский, *УФН*, **176**:4 (2006), 345–364.
- [2] L. Samaĳ, B. Jancovici, *J. Stat. Mech.*, **02** (2007), P02002; [arXiv:cond-mat/0701773](#).
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика* Т. 9. *Статистическая физика*. Часть 2, Наука, М., 1978.
- [4] А. М. Прохоров (ред.), *Физический энциклопедический словарь*, Изд-во БРЭ, М., 1995.
- [5] И. М. Халатников, *Введение в теорию сверхтекучести*, Наука, М., 1965.
- [6] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ТМФ*, **134**:2 (2003), 310–324.
- [7] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Матем. моделирование*, **15**:5 (2003), 80–94.
- [8] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ТМФ*, **155**:3 (2008), 498–511.
- [9] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения*, Изд-во МГОУ, М., 2004.
- [10] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ЖВМиМФ*, **49**:1 (2009), 137–151.

Поступила в редакцию 19.03.2009,
после доработки 20.07.2009