Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Сергеев, Вспомогательные трансфер-матрицы для трехмерных интегрируемых моделей, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 3, 391–409

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf646>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:11:44

© 2000 г.

С. М. Сергеев*

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТРАНСФЕР-МАТРИЦЫ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

Формулируется локальный комбинаторный метод построения полного набора операторов, коммутирующих с трансфер-матрицей модели Замолотчикова–Бажанова–Бакстера в вершинной формулировке. Для производящего функционала этого полного набора дается компактное функциональное уравнение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вот уже почти двадцать лет как была сформулирована первая нетривиальная трехмерная интегрируемая модель статистической механики – модель Замолотчикова. Позднее Бажанов и Бакстер получили ее обобщение на произвольное число спиновых состояний [1–3]. Бакстер вычислил статсумму модели [3, 4].

Вычислением статсуммы, однако, далеко не исчерпывается изучение интегрируемых моделей. При рассмотрении любой дискретной квантовой интегрируемой модели всегда важно построение всего набора трансфер-матриц. В этой работе излагается метод построения полного (и даже переполненного) набора матриц, коммутирующих с трансфер-матрицей модели Замолотчикова–Бажанова–Бакстера в вершинной формулировке [5]. В этом методе каждый интеграл движения сопоставляется с множеством путей определенного класса гомотопии на вспомогательной квадратной решетке с тороидальными граничными условиями.

Полный набор интегралов движения удобно описывать с помощью производящего функционала, зависящего от двух спектральных параметров $\mathbf{J}(A, B)$. Такой функционал играет роль вспомогательной трансфер-матрицы. Функционал $\mathbf{J}$, однако, не имеет структуры следа вспомогательной матрицы монодромии, а является чем-то более сложным. В методе построения этого функционала суммирование по путям похоже на построение некоторой статсуммы, а то, что суммируются матрицы, напоминает наличие спиновых цепочек в двумерных моделях.

Для нахождения спектра интегралов движения предлагается некоторое уравнение N -й степени (N – число спиновых состояний модели) на функционал $\mathbf{J}$, занимающее место функциональных уравнений для обычных трансфер-матриц в двумерных моделях.

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.
E-mail: sergeev_ms@mx.ihep.su

В данной работе указан рецепт построения вспомогательной трансфер-матрицы $\mathbf{J}$ и найдено функциональное уравнение на нее. Эти результаты получаются с помощью весьма простого метода квантовых вспомогательных линейных уравнений [6]. Поскольку этот метод относительно нов и потому малоизвестен, а его изложение занимает много места, мы приведем наши результаты без вывода в виде формулировок, определений и теорем, а вместо доказательства представим только лишь схемы доказательств в рамках общеизвестного квантового метода обратной задачи.

Далее мы договоримся об обозначениях, дав вершинную формулировку модели Замолдчикова–Бажанова–Бакстера и определив квантовую трансфер-матрицу $\mathbf{T}$ этой модели. Затем будут сформулированы локальные комбинаторные правила построения вспомогательной трансфер-матрицы $\mathbf{J}(A, B)$ – производящего функционала для полного набора интегралов движения. В следующем разделе мы исследуем структуру $\mathbf{J}$, вычислив некоторые необходимые в дальнейшем простейшие сохраняющиеся операторы. После этого будет дана схема доказательства коммутативности матриц $\mathbf{J}$ и $\mathbf{T}$ в терминах квантового метода обратной задачи. Далее мы выпишем функциональное уравнение на $\mathbf{J}$. При этом будут рассмотрены и наиболее простые случаи: случай, когда число спиновых состояний равно двум (собственно модель Замолдчикова), и суперинтегрируемый случай ($\text{tg}^2(\theta/2) = -1$). Доказательство функционального уравнения будет дано схематически в рамках уравнений вложенного бете-анзаца.

2. БОЛЬЦМАНОВСКИЕ ВЕСА ИСХОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ

В данной работе мы будем использовать вершинную формулировку модели Замолдчикова–Бажанова–Бакстера с N состояниями [5]. Основным объектом в вершинной формулировке является матрица болцмановских весов, ассоциированная с трехмерной вершиной. Спиновые переменные, принимающие значения в Z_N , ассоциируются с ребрами кубической решетки, построенной из трехмерных вершин.

Рис. 1. Графическое представление матричных элементов $\mathbf{R}$.

На рис. 1 представлена трехмерная вершина, реберные спиновые переменные которой имеют значения i_1, i_2, i_3 и j_1, j_2, j_3 . Наличие стрелок в вершине, различающих индексы i_α и j_α , а также упорядочение 1, 2, 3 существенно. Иными словами, все вершины считаются ориентированными.

Для данных значений спиновых переменных больцмановский вес, соответствующий вершине, обозначается как $R_{i_1, i_2, i_3}^{j_1, j_2, j_3}$. По виду больцмановские веса являются матричными элементами некоторой матрицы

$$R_{i_1, i_2, i_3}^{j_1, j_2, j_3} = \langle i_1, i_2, i_3 | \mathbf{R} | j_1, j_2, j_3 \rangle, \quad (1)$$

где оператор $\mathbf{R}$ действует в упорядоченном тензорном произведении трех N -мерных линейных пространств, $\mathbf{R}: V_N^{\otimes 3} \mapsto V_N^{\otimes 3}$. Чтобы подчеркнуть упорядочение в тензорном произведении пространств V , а также то, что эти пространства имеют номера 1, 2, 3, удобно использовать обозначение

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{1,2,3}. \quad (2)$$

При рассмотрении тензорного произведения большего количества пространств считается, что оператор $\mathbf{R}_{1,2,3}$ дополнен произведением единичных матриц для компонент тензорного произведения с номерами, например, 4, 5, 6, . . .

Как отмечалось, спиновые переменные принимают значения в Z_N , т.е. базис $|j\rangle$ пространства V циклический, $|j + N\rangle \equiv |j\rangle$.

Определим теперь вид матричных элементов $\mathbf{R}$. Подробности содержатся в работе [5]. Пусть $p = (x, y)$ – точка на кривой Ферма

$$x^N + y^N = 1. \quad (3)$$

Здесь и далее всегда будет использоваться обозначение

$$q = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right), \quad q^N = 1. \quad (4)$$

Определим с точностью до нормировки функцию $W(p|a)$, первый аргумент которой – точка на кривой Ферма, а второй аргумент принимает значение в Z_N , соотношением

$$\frac{W(p|a)}{W(p|a-1)} = \frac{y}{1 - q^a x}. \quad (5)$$

С точностью до нормировки

$$W(p|a) = W(p|0) \prod_{\sigma=1}^a \frac{y}{1 - q^\sigma x}. \quad (6)$$

Матричные элементы определяются формулой

$$R_{i_1, i_2, i_3}^{j_1, j_2, j_3} = \delta_{i_2+i_3, j_2+j_3} q^{(j_1-i_1)j_3} \frac{W(p_1|i_2-i_1)W(p_2|j_2-j_1)}{W(p_3|j_2-i_1)W(p_4|i_2-j_1)}, \quad (7)$$

где всегда предполагается, что

$$x_1 x_2 = q x_3 x_4. \quad (8)$$

Независимыми в $\mathbf{R}$ являются только три точки на кривой Ферма, например p_1, p_2, p_3 , поскольку x_4 можно найти из (8), а матрица весов инвариантна (с точностью до нормировки) относительно одновременного сдвига $y_k \mapsto qy_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Итак, получается, что матрица весов $\mathbf{R}$ является функцией от трех непрерывных и трех дискретных параметров.

Удобно выделить независимые параметры матрицы $\mathbf{R}$. Пусть

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= q^{\frac{1}{2}} \frac{x_3}{x_1} = q^{-\frac{1}{2}} \frac{x_2}{x_4}, \\ \kappa_2 &= q^{\frac{1}{2}} \frac{x_4}{x_1} = q^{-\frac{1}{2}} \frac{x_2}{x_3}, \\ \kappa_3 &= q^{\frac{1}{2}} \frac{y_3 y_4}{y_1 y_2}\end{aligned}\tag{9}$$

и

$$u = \frac{y_2}{y_3}, \quad w = q^{-\frac{1}{2}} \frac{x_1}{y_1} \frac{y_3}{x_3}, \quad v = \frac{1}{qx_3}.\tag{10}$$

Независимые параметры теперь – это значения $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ и фазы величин u, v, w . Следствием того, что величины x_k и y_k связаны соотношением Ферма, является система соотношений

$$\frac{(1+w^N)(\kappa_1^N + v^{-N})}{1 + \kappa_1^N} = \frac{(1 + \kappa_1^N v^N)(1 + \kappa_3^N u^N)}{1 + \kappa_2^N} = \frac{(1+w^N)(\kappa_3^N + u^{-N})}{1 + \kappa_3^N} = 1.\tag{11}$$

Замечательное свойство матрицы $\mathbf{R}$ – ее геометрическая параметризация углами сферического треугольника, а именно

$$\kappa_1^N = \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \right)^2, \quad \kappa_2^N = \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} \right)^2, \quad \kappa_3^N = \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_3}{2} \right)^2.\tag{12}$$

При этом θ_α – двугранный угол между плоскостями, образующими линию с номером α в трехмерной вершине. Мы не будем пользоваться этой параметризацией (ее геометричность хороша только для параметризации уравнения тетраэдров), но отметим, что таким образом параметр κ_α ассоциирован с линией номера α и на самом деле является в определенном смысле спектральным параметром матрицы $\mathbf{R}$.

3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НА КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ И ТРАНСФЕР-МАТРИЦА

С помощью определенных выше больцмановских весов можно строить статистико-механические модели на трехмерных решетках. Простейшей решеткой является кубическая. Спиновые переменные ассоциируются с ребрами кубической решетки. Вершинам же присваиваются больцмановские веса R , зависящие от спинов окружающих вершину ребер. При этом спин каждого ребра относится к обоим вершинам, соединенным данным ребром. Для простоты решетка предполагается однородной, т.е. R как функция своих остальных (не спиновых) параметров во всех вершинах является одной и той же.

Рис. 2. Фрагмент трансфер-матрицы слой-слой.

Кубическая решетка может быть выбрана конечной и замкнутой, если наложить циклические граничные условия в трех направлениях решетки. Больцмановским весом всей решетки, соответствующим данной полной спиновой конфигурации, является произведение вершинных больцмановских весов. Сумма полного веса решетки по всем спиновым конфигурациям – это статистическая сумма модели.

Для вычисления статсуммы удобно определить трансфер-матрицу $\mathbf{T}$ типа слой-слой. Пусть M_1 и M_2 – пространственные размеры кубической решетки в первом и втором направлениях согласно нумерации линий в $\mathbf{R}$ -матрице. Рассмотрим сечение кубической решетки двумя близлежащими плоскостями, ортогональными линиям номер 3. Фрагмент такого сечения показан на рис. 2а. В этом сечении возникает набор открытых ребер третьего типа. Ребра же первого и второго типов замкнутые, и по их спином надлежит выполнять суммирование. Статсумма, соответствующая такому сечению, является матрицей по спиновым переменным открытых ребер и записывается в виде

$$\langle \gamma | \mathbf{T} | \gamma' \rangle = \sum_{\{\alpha, \beta\}} \prod_{n, m} \langle \alpha_{n, m}, \beta_{m, n}, \gamma_{n, m} | \mathbf{R} | \alpha_{n, m+1}, \beta_{m, n+1}, \gamma'_{n, m} \rangle. \quad (13)$$

Здесь по причине большого количества подобных линий мы использовали нумерацию α, β, γ вместо предыдущих обозначений 1, 2, 3 и ввели целочисленные индексы для системы спиновых переменных, как это показано на рис. 2б. В частности, использовано мультииндексное обозначение

$$\gamma = \{\gamma_{n, m}, n = 1, \dots, M_2, m = 1, \dots, M_1\}. \quad (14)$$

Циклические граничные условия означают, что

$$\phi_{n+M_2, m} = \phi_{n, m+M_1} = \phi_{n, m} \quad \forall \phi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}. \quad (15)$$

Теперь статсумма кубической решетки, имеющей M_3 слов в третьем направлении, есть

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}(\mathbf{T}^{M_3}). \quad (16)$$

Известно, что данная трехмерная модель интегрируема. Это следует из того, что матрицы $\mathbf{T}$ образуют коммутативное семейство. В терминах четырех точек на кривой Ферма $\mathbf{T}$ зависит (с точностью до нормировки) только от величин x_k (три из которых независимы) и от фазы числа $y_1 y_2 / y_3 y_4$. Вырождение параметрической зависимости происходит по причине инвариантности матрицы $\mathbf{T}$ относительно скрытых калибровочных преобразований $\mathbf{R}$ в первом и втором пространствах. В терминах параметров $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ и u, v, w это означает зависимость от трех комплексных параметров κ_k и от фазы числа w . Отметим, что изменение фазы w соответствует всего лишь изменению нормировки матрицы $\mathbf{T}$ (что соответствует калибровочному преобразованию $\mathbf{R}$ в третьем пространстве), так что можно считать

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3). \quad (17)$$

В силу того что матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет трехмерному локальному условию интегрируемости – уравнению тетраэдров [7, 5], имеет место следующее соотношение:

$$\mathbf{T}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \mathbf{T}(\kappa_4, \kappa_5, \kappa_3) = \mathbf{T}(\kappa_4, \kappa_5, \kappa_3) \mathbf{T}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3), \quad (18)$$

т.е. две различные трансфер-матрицы коммутируют, если у них совпадает третий параметр (выделенность третьего параметра соответствует выделению третьего направления при построении трансфер-матрицы). С точки зрения квантового метода обратной задачи рассеяния такая коммутативность означает, что при разложении трансфер-матрицы $\mathbf{T}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ в ряд по некоторому базису функций от κ_1 и κ_2 ,

$$\mathbf{T}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \sum_{a,b} f_a(\kappa_1) f_b(\kappa_2) \mathbf{t}_{a,b}(\kappa_3), \quad (19)$$

мы получаем набор коммутативных матриц $\mathbf{t}_{a,b}(\kappa_3)$, имеющих смысл полного набора интегралов движения динамической системы. Параметры κ_1 и κ_2 действительно являются спектральными параметрами модели, а параметр κ_3 в этом случае играет роль модуля.

Задача диагонализации трансфер-матрицы сводится к задаче диагонализации набора $\mathbf{t}_{a,b}(\kappa_3)$, в частности к получению его спектра. В данной работе дается альтернативный метод (не использующий исходную квантовую трансфер-матрицу $\mathbf{T}$) построения коммутативного семейства матриц $\mathbf{t}_{a,b}(\kappa)$, объединяемых в некоторую *вспомогательную* трансфер-матрицу $\mathbf{J}$. Для вспомогательной трансфер-матрицы $\mathbf{J}$ приводится функциональное соотношение, производящее абелеву алгебру $\mathbf{t}_{a,b}$. Решения этого функционального соотношения дают спектр $\mathbf{t}_{a,b}$ и, таким образом, параметризуют собственные состояния исходной трансфер-матрицы $\mathbf{T}$.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ КВАДРАТНАЯ РЕШЕТКА

Рассмотрим *вспомогательную* квадратную решетку с циклическими граничными условиями, вершины V которой пронумерованы парой индексов $V_{n,m}$, $n \in \mathbb{Z}_{M_2}$,

Рис. 3. Фрагмент вспомогательной решетки.

$m \in Z_{M_1}$, в точности так, как это было при построении трансфер-матрицы $\mathbf{T}$ (рис. 3). При этом индекс n нумерует вертикальные линии, а индекс m — горизонтальные.

Определим на этой решетке множество путей особого вида. Пусть каждый такой путь проходит следующим образом:

- а) по каждой клетке решетки ровно один раз;
- б) через каждую вершину решетки ровно один раз;
- в) выходит из каждой вершины строго определенным способом, а именно вверх и влево.

Последнее требование означает, что у любого пути есть всего четыре возможности пройти сквозь вершину, и эти возможности изображены на рис. 4.

Рис. 4. Прохождение путей сквозь вершину.

Пример части некоторого пути приведен на рис. 5а. Естественно, каждый путь распадается на несколько связных компонент, и простейшая компонента связности есть тривиальная петля, как на рис. 4а.

Вследствие циклических граничных условий вспомогательная решетка является тором, циклы которого обозначим как $\mathcal{A}$ — цикл обхода тора снизу вверх — и $\mathcal{B}$ — цикл обхода тора в направлении слева направо — в соответствии со стрелками вспомогательной решетки (см. рис. 5б). Все пути можно классифицировать по их гомотопическим классам. Гомотопическим классом несвязного пути является суперпозиция гомотопических

Рис. 5. Пример фрагмента пути и циклы.

классов компонент связности. В силу заданного направления выходов путей возможные гомотопические классы путей имеют вид

$$\mathcal{W}(P) = a\mathcal{A} - b\mathcal{B}, \quad 0 \leq a \leq M_2, \quad 0 \leq b \leq M_1, \quad (20)$$

где P – некоторый путь, а $\mathcal{W}(P)$ – его гомотопический класс.

Далее ассоциируем с каждой вершиной вспомогательной решетки N -мерное линейное циклическое пространство V (V уже использовалось в определении матрицы $\mathbf{R}$ в первом разделе). То, что для вершин и для пространств используется одна и та же буква, не приведет к неоднозначностям. Для каждого V определим базисные циклические операторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ их действием на ортонормированный базис V :

$$\mathbf{u}|\gamma\rangle = q^\gamma|\gamma\rangle, \quad \mathbf{w}|\gamma\rangle = |\gamma + 1\rangle. \quad (21)$$

Мы используем тот же самый базис V , что и при определении матричных элементов $\mathbf{R}$ в формуле (1). Очевидно, что

$$\mathbf{u}\mathbf{w} = q\mathbf{w}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^N = \mathbf{w}^N = 1. \quad (22)$$

Мы будем работать с тензорным произведением M_1M_2 копий пространства V , так что полное гильбертово пространство системы имеет базис

$$|\gamma\rangle = |\gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{n,m}, \dots\rangle. \quad (23)$$

Компоненты же тензорного произведения операторов будем обозначать парой индексов, например

$$\mathbf{u}_{n,m} = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \underbrace{\mathbf{u}}_{n,m\text{-е место}} \otimes 1 \otimes \dots \quad (24)$$

и т. д.

Ассоциируем далее с каждым прохождением пути сквозь вершину некоторую комбинацию операторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ для этой вершины, как это показано на рис. 4. При этом на

рис. 4 в κ – числовой параметр, общий для всех вершин. С некоторым полным путем P мы ассоциируем *произведение* этих вершинных факторов, соответствующих всем вершинным фрагментам пути. Обозначим это произведение вершинных вкладов пути P как $\mathbf{J}_P(\kappa)$, где подчеркивается наличие параметра κ в списке вершинных вкладов. Вопрос с упорядочением не возникает, поскольку ассоциированные с разными вершинами операторнозначные множители коммутируют. Заметим, что всем тривиальным петлям соответствуют единичные множители в $\mathbf{J}_P(\kappa)$.

Выделим далее все пути P с гомотопическим классом

$$\mathcal{W}(P) = a\mathcal{A} - b\mathcal{B}.$$

Пусть

$$\mathbf{J}_{a,b}(\kappa) = (-1)^{M_1 M_2} \sum_{P: \mathcal{W}(P)=a\mathcal{A}-b\mathcal{B}} (-1)^{\sigma(P)} \mathbf{J}_P(\kappa), \quad (25)$$

где $\sigma(P)$ – число петель в пути P , включая тривиальные. Описанные правила, при которых сначала вводится путь P определенного оператора $\mathbf{J}_P$, устроенного как тензорное произведение коммутирующих операторов, а затем выполняется суммирование по всем возможным путям, весьма напоминают построение гамильтонианов для одномерных спиновых цепочек. Поэтому эти правила можно назвать “двумерной спиновой цепью”.

Операторы $\mathbf{J}_{a,b}$ удобно объединить в операторнозначный полином

$$\mathbf{J}(A, B|\kappa) = \sum_{a=0}^{M_2} \sum_{b=0}^{M_1} A^a B^b \mathbf{J}_{a,b}(\kappa). \quad (26)$$

Заметим также, что операторы $\mathbf{J}_{a,b}(\kappa)$ между собой не коммутируют.

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Функционал $\mathbf{J}(A, B)$ сохраняется трансфер-матрицей $\mathbf{T}$,*

$$\mathbf{T}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \mathbf{J}(A, B|\kappa_3) = \mathbf{J}(A, B|\kappa_3) \mathbf{T}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3). \quad (27)$$

Более того, система $\mathbf{J}_{a,b}(\kappa)$ содержит единожды переполненный набор интегралов движения матрицы $\mathbf{T}$.

Доказательство теоремы 1 будет проведено следующим образом. Сначала мы анализируем структуру полинома $\mathbf{J}(A, B)$ и объясним, что означает фраза “единожды переполненный набор интегралов”, а затем (в разделе 6) изложим схему алгебраического доказательства этой теоремы.

5. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ОПЕРАТОРОВ $\mathbf{J}_{a,b}$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Операторы $\mathbf{J}_{a,b}$, определенные формулой (25), удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\mathbf{J}_{a,b}\mathbf{J}_{a',b'} = q^{ba'-ab'}\mathbf{J}_{a',b'}\mathbf{J}_{a,b}. \quad (28)$$

Заметим, что оператор $\mathbf{J}_{0,0} = 1$. Он коммутирует со всеми остальными операторами. Доказательства этого утверждения мы пока не имеем.

Множество индексов (a, b) операторов $\mathbf{J}_{a,b}$, $0 \leq a \leq M_2$, $0 \leq b \leq M_1$, образует целочисленный прямоугольник на плоскости (a, b) . Каков периметр этого прямоугольника?

Периметрические операторы $\mathbf{J}_{a,b}$ соответствуют минимальным или же максимальным намоткам путей на тор. И в том, и в другом случаях соответствующие $\mathbf{J}_{a,b}$ легко вычисляются комбинаторно.

Рассмотрим путь класса $\mathcal{A}$, проходящий через все вершины вертикальной линии с номером n . Во всех остальных вершинах при этом подразумеваются тривиальные петли. Этому пути соответствует (с точностью до знаков) выражение

$$\mathbf{W}_n = \prod_{m=1}^{M_1} \mathbf{w}_{n,m}. \quad (29)$$

С помощью таких выражений легко вычислить, рассматривая пути P класса $\mathcal{W}(P) = a\mathcal{A}$, сумму

$$\sum_{a=0}^{M_2} A^a \mathbf{J}_{a,0} = \prod_{n=1}^{M_2} (1 - (-1)^{M_1} A \mathbf{W}_n). \quad (30)$$

Аналогично для путей P класса $\mathcal{W}(P) = -b\mathcal{B}$ введем величины

$$\mathbf{U}_m = \prod_{n=1}^{M_2} \mathbf{u}_{n,m} \quad (31)$$

и вычислим сумму

$$\sum_{b=0}^{M_1} B^b \mathbf{J}_{0,b} = \prod_{m=1}^{M_1} (1 - (-1)^{M_2} q^{\frac{M_2}{2}} B \mathbf{U}_m). \quad (32)$$

Несколько сложнее, но тоже достаточно просто вычисляются частичные производящие функционалы путей

$$P: \mathcal{W}(P) = a\mathcal{A} - M_1\mathcal{B},$$

имеющие вид

$$\sum_{a=0}^{M_2} A^a \mathbf{J}_{a,M_1} = (-1)^{M_1(M_2-1)} q^{\frac{M_1 M_2}{2}} \prod_{m=1}^{M_1} \mathbf{U}_m \prod_{n=1}^{M_2} (1 - (-1)^{M_1} q^{-\frac{M_1}{2}} \kappa^{M_1} A \mathbf{W}_n). \quad (33)$$

Для путей

$$P: \mathcal{W}(P) = M_2\mathcal{A} - b\mathcal{B}$$

находим

$$\sum_{b=0}^{M_1} B^b \mathbf{J}_{M_2, b} = (-1)^{M_2(M_1-1)} \prod_{m=1}^{M_1} (1 - (-1)^{M_2} \kappa^{M_2} B \mathbf{U}_m) \prod_{n=1}^{M_2} \mathbf{W}_n. \quad (34)$$

Видно, что периметрическими элементами системы $\mathbf{J}_{a, b}$ являются симметричные полиномы от $\mathbf{U}_m$ и $\mathbf{W}_n$. Используя точный вид $\mathbf{R}$ -матрицы (7), нетрудно убедиться, что не только симметрические полиномы, но и сами матрицы $\mathbf{U}_m$, $\mathbf{W}_m$ коммутируют с $\mathbf{T}$.

Итак, установлено, что периметрические элементы системы $\mathbf{J}_{a, b}$ соответствуют $M_1 + M_2$ независимым нетривиальным операторам: это M_1 штук матриц $\mathbf{U}_m$ и M_2 штук матриц $\mathbf{W}_n$. Имеется также единичная матрица $\mathbf{J}_{0, 0} = 1$. Алгебра матриц $\mathbf{U}_m$ и $\mathbf{W}_n$ определяется соотношениями

$$\mathbf{U}_m \mathbf{W}_n = q \mathbf{W}_n \mathbf{U}_m \quad \forall n, m. \quad (35)$$

Выделим произвольным способом из системы матриц $\mathbf{U}_m$, $\mathbf{W}_n$ некоммутативную пару $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$ (например, при простейшем выборе $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1$ и $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1$; выбор, приводящий к обобщенной киральной модели Поттса [8], есть

$$\mathbf{U}^{M_1} = \prod_{m=1}^{M_1} \mathbf{U}_m$$

и $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1$) и отнормируем все остальные матрицы $\mathbf{U}_m$, $\mathbf{W}_n$,

$$\mathbf{U}_m = \mathbf{U} \mathbf{U}'_m, \quad \mathbf{W}_n = \mathbf{W} \mathbf{W}'_n. \quad (36)$$

Теперь система матриц $\mathbf{U}'_m$, $\mathbf{W}'_n$ стала коммутативной. Аналогично поступим со всеми элементами системы $\mathbf{J}_{a, b}$:

$$\mathbf{J}_{a, b} = \mathbf{U}^b \mathbf{W}^a \mathbf{t}_{a, b}. \quad (37)$$

В силу соотношений (28) операторы $\mathbf{t}_{a, b}$ коммутируют между собой и с $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$. Это, кстати, означает, что матрицы

$$\tau(A, B | \kappa) = \sum_{a, b} A^a B^b \mathbf{t}_{a, b} \quad (38)$$

при одинаковых κ образуют коммутирующее семейство.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Набор $M_1 M_2$ следующих коммутативных операторов:

- а) $(M_1 - 1)(M_2 - 1)$ операторов $\mathbf{t}_{a, b}$, отвечающих внутренности прямоугольника (a, b) : $0 < a < M_2$ и $0 < b < M_1$;
- б) $M_1 - 1$ независимых операторов $\mathbf{U}'_m$;
- в) $M_2 - 1$ независимых операторов $\mathbf{W}'_n$;
- г) любой оператор, являющийся функцией от $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$ и имеющий невырожденный спектр,

образует полный набор операторов для гильбертова пространства состояний $V^{\otimes M_1 M_2}$.

Это утверждение о полноте, так же как и предыдущее, мы приводим без доказательства.

Таким образом, система интегралов движения полна, а из-за наличия некоммутативной пары переполнена. Очевидно, что операторы $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$ имеют смысл канонических переменных центра инерции.

6. СХЕМА АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Схема алгебраического доказательства теоремы 1 основана на приемах квантового метода обратной задачи: двумерной R -матрице, L -операторе и уравнении сплетения.

Рис. 6. Образование матричного элемента $L_{m,m+p}^{(1)}$.

Факторизуем функционал $\mathbf{J}(A, B)$ по параметру B :

$$\mathbf{J}(A, B) = \sum_{b=0}^{M_1} B^b \mathbf{J}_b(A). \quad (39)$$

Коммутативность операторов $\mathbf{J}_0(A)$ и $\mathbf{J}_{M_1}(A)$ с $\mathbf{T}$ уже обсуждалась, она тривиальна. Вернемся на вспомогательную плоскость и рассмотрим теперь функционал $\mathbf{J}_1(A)$. Он образуется путями P с гомотопическим классом $\mathcal{W}(P) = a\mathcal{A} - \mathcal{B}$, $0 \leq a \leq M_2$. Выделим мысленно на вспомогательной плоскости n -ю вертикальную линию. Очевидно, что все пути обсуждаемого класса пересекают каждую вертикальную линию ровно один раз. Две возможности такого пересечения представлены на рис. 6. Оба нарисованных

фрагмента обладают одним и тем же свойством: они подходят к n -й вертикальной линии над горизонтальной линией с номером $m + p$ и перескакивают с n -й вертикальной линии на $(n + 1)$ -ю сразу над горизонтальной линией с номером m . Определим операторнозначную матрицу $L^{(1)}(A)_{m,m'}$ размера $M_1 \times M_1$ по следующим правилам:

$$(L^{(1)}(A)_n)_{m,m+p} = -(-x)^p (\kappa \mathbf{u}_{n,m+p-1} - q^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{n,m+p}) \mathbf{w}_{n,m} \dots \mathbf{w}_{n,m+p-1}, \quad (40)$$

$$(L^{(1)}(A)_n)_{m,m} = -(q^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{n,m} - (-x)^{M_1} \kappa \mathbf{u}_{n,m-1} \mathbf{W}_n), \quad (41)$$

где $x^{M_1} \equiv A$. Множитель $(-x)^p$ маркирует степень перескока с $(m + p)$ -й линии на m -ю. В качестве аргумента матрицы L мы указываем не x , а A , поскольку простым (но не единственным) диагональным калибровочным преобразованием все степени x , кроме x^{M_1} , можно почти везде устранить, нарушив, однако, при этом M_1 -цикличность последовательности $m, m + 1, \dots, m + p, \dots, m + M_1 \sim m$. Матричные элементы $L^{(1)}$, определенные в формулах (40), (41), очевидно, являются всевозможными фрагментами $\mathbf{J}_{a,1}$, относящимися к вертикальной линии n . Простые комбинаторные выкладки показывают, что

$$-\mathbf{J}_1(A) = \text{Tr}(L^{(1)}(A)_1 L^{(1)}(A)_2 \dots L^{(1)}(A)_n \dots L^{(1)}(A)_{M_2}), \quad (42)$$

т.е. оператор $\mathbf{J}_1(A)$ является трансфер-матрицей от L -оператора $L^{(1)}$. Напомним общепринятую терминологию: M_1 -мерное пространство L -оператора, по которому берется следматрицы монодромии, называется вспомогательным пространством, а N^{M_1} -мерное пространство, отвечающее M_1 вейлевским парам $\mathbf{u}_{n,m}, \mathbf{w}_{n,m}$, $m = 1, \dots, M_1$, — квантовым пространством. При этом трансфер-матрица $\mathbf{J}_1(A)$ называется вспомогательной трансфер-матрицей для квантовой трансфер-матрицы $\mathbf{T}$.

Несложно показать, что матрица $L^{(1)}(A)$ является L -оператором для векторного представления ω_1 алгебры $U_q(\widehat{sl(M_1)})$, т.е.

$$R \left(\frac{A}{A'} \right)_{1,2} L^{(1)}(qA)_{1,n} L^{(1)}(A')_{2,n} = L^{(1)}(qA')_{2,n} L^{(1)}(A)_{1,n} R \left(\frac{A}{A'} \right)_{1,2}, \quad (43)$$

где $R_{1,2}$ — тригонометрическая R -матрица для векторного представления $U_q(\widehat{sl(M_1)})$. В этом уравнении сплетения встречается лишний, несколько непривычный множитель q в аргументах L -операторов. Это та цена, которая заплачена за трехмерную инвариантность модели Замолотчикова–Бажанова–Бакстера по сравнению с обобщенной киральной моделью Поттса [8, 2]. Происхождение этого множителя связано с алгеброй $\mathbf{U}_m, \mathbf{W}_n$. Фактически это означает, что $L^{(1)}$ является L -оператором для $gl(M_1)$ и $\mathbf{W}_n, \mathbf{U}_m$ имеют смысл U_1 -зарядов.

Коммутативность $\mathbf{J}_1(A)$ с $\mathbf{T}$ есть следствие соотношения сплетения L -операторов по квантовым пространствам. Выделим из квантовой трансфер-матрицы $\mathbf{T}$ фрагмент, отвечающий n -й линии,

$$\langle \beta, \gamma | \mathbf{S} | \beta', \gamma' \rangle = \sum_{\{\alpha\}} \prod_{m=1}^{M_1} \langle \alpha_m, \beta_m, \gamma_m | \mathbf{R} | \alpha_{m+1}, \beta'_m, \gamma'_m \rangle. \quad (44)$$

Очевидно, что

$$\mathbf{T} = \text{Tr}_\beta (\mathbf{S}_{\beta, \gamma_1} \cdots \mathbf{S}_{\beta, \gamma_n} \cdots \mathbf{S}_{\beta, \gamma_{M_2}}). \quad (45)$$

Теперь, восстанавливая параметры κ , можно доказать соотношение

$$\tilde{L}(A, \kappa_2)_{1, \beta} L(A, \kappa_3)_{1, \gamma} \mathbf{S}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)_{\beta, \gamma} = \mathbf{S}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)_{\beta, \gamma} L(A, \kappa_3)_{1, \gamma} \tilde{L}(A, \kappa_2)_{1, \beta}. \quad (46)$$

В этом уравнении оператор $\tilde{L}$ устроен так же, как и оператор L . Единственное отличие состоит в том, что для $\tilde{L}$ (помимо другого $\kappa \mapsto \kappa_2$) параметры образующих вейлевских алгебр $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ его квантового пространства β неединичны, т.е.

$$\mathbf{u}|\beta\rangle = q^\beta|\beta\rangle, \quad \mathbf{w}|\beta\rangle = u^{-1}|\beta+1\rangle, \quad (47)$$

где параметр u определен в (10). Напомним, что именно из соотношения (46) и выводилась изначально R -матрица $\mathbf{S}$ для обобщенной киральной модели Поттса [8].

Итак, коммутативность $\mathbf{J}_1(A)$ с $\mathbf{T}$ условно доказана. Вернемся назад, к путям на вспомогательной решетке, и рассмотрим пути P класса $\mathcal{W}(P) = a\mathcal{A} - b\mathcal{B}$ для всех $0 \leq a \leq M_2$ и для фиксированного $1 \leq b < M_1$. Аналогичный комбинаторный анализ пересечения некоторым путем данного класса вертикальной линии позволит ввести L -оператор $L^{(b)}(A)_n$ матричной размерности

$$\binom{M_1}{b} \times \binom{M_1}{b},$$

что соответствует размерности фундаментального представления ω_b алгебры $sl(M_1)$. Оказывается, что $L^{(b)}(A)$ будут сплетаться по вспомогательным пространствам тригонометрическими R -матрицами представлений ω_b (правда, в соотношениях сплетения придется компенсировать наличие U_1 -зарядов множителями q^b). По квантовым же пространствам эти L -операторы будут сплетаться той же самой матрицей $\mathbf{S}_{\beta, \gamma}$. Из квантового соотношения сплетения следует, что операторы

$$\mathbf{J}_b(A) \sim \text{Tr}(L^{(b)}(A)_1 \cdots L^{(b)}(A)_n \cdots L^{(b)}(A)_{M_2}) \quad (48)$$

коммутируют с $\mathbf{T}$. Тем самым вся теорема 1 условно доказана.

Отметим еще раз, что мы получали функционал $\mathbf{J}$ отнюдь не этим алгебраическим методом, а совершенно другим, называемым методом квантовой вспомогательной линейной задачи. В этом методе полином $\mathbf{J}(A, B)$ возникает как детерминант матрицы операторнозначных коэффициентов системы линейных уравнений, и его сохранение матрицей $\mathbf{T}$ есть следствие некоторой модификации теоремы о пропорциональности детерминантов матриц коэффициентов эквивалентных систем однородных линейных уравнений. Приведем вид вспомогательной системы линейных уравнений для трансфер-матрицы $\mathbf{T}$ из работ [6]:

$$\langle \varphi_{n, m} | + \langle \varphi_{n-1, m} | q^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{n, m} + \langle \varphi_{n, m+1} | \mathbf{w}_{m, n} + \langle \varphi_{n-1, m+1} | \kappa \mathbf{u}_{n, m} \mathbf{w}_{n, m} = 0, \quad (49)$$

где подразумеваются граничные условия $\varphi_{n, m+M_1} = \varphi_{n, m} A$ и $\varphi_{n-M_2, m} = \varphi_{n, m} B$.

7. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ

В предыдущих разделах рассматривалась система путей на вспомогательной решетке и были сформулированы правила сопоставления каждому пути P некоторого оператора $\mathbf{J}_P$ с последующим взятием “статсуммы” по путям. Изменим слегка правила сопоставления, заменив подписи к вариантам прохождения пути сквозь вершину рис. 4 следующими:

$$1 \mapsto 1, \quad \mathbf{w} \mapsto \varepsilon_N \mathbf{w}^N, \quad \kappa \mathbf{u} \mathbf{w} \mapsto \kappa^N \mathbf{u}^N \mathbf{w}^N, \quad q^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \mapsto -\varepsilon_N \mathbf{u}^N, \quad (50)$$

где

$$\varepsilon_N = (-1)^{N-1}. \quad (51)$$

При нашей нормировке для каждой вершины $\mathbf{u}^N = \mathbf{w}^N = 1$ и новые правила сопоставляют пути P число J_P^f . Числовая статсумма определяется аналогично операторнозначной с точностью до замены A и B на A^N и B^N :

$$J_f(A^N, B^N | \kappa^N) = \sum_{a,b} A^{aN} B^{bN} (-1)^{M_1 M_2} \sum_{P: \mathcal{W}(P)=aA-bB} (-1)^{\sigma(P)} J_P^f. \quad (52)$$

В силу однородности вспомогательной решетки статсумма J_f вычисляется просто, и мы имеем

$$J_f(A^N, B^N | \kappa^N) = \prod_{\substack{x^{M_1}=A^N \\ y^{M_2}=B^N}} (1 - \varepsilon_N y + \varepsilon_N x + \kappa^N xy), \quad (53)$$

где произведение берется по $M_1 M_2$ множителям, отвечающим различным корням M_1 -й и M_2 -й степеней для x и y .

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место соотношение*

$$\det_{\mathbf{U}, \mathbf{W}} \mathbf{J}(A, B | \kappa) = J_f(A^N, B^N | \kappa^N), \quad (54)$$

где $\det_{\mathbf{U}, \mathbf{W}}$ обозначает детерминант по блоку некоммутативной пары $\mathbf{U}, \mathbf{W}$ в блочном представлении оператора $\mathbf{J}$.

Очевидно, что соотношение (54) производит абелеву алгебру операторов $\mathbf{t}_{a,b}$.

Итак, функциональное соотношение (54) сформулировано, метод его доказательства мы обсудим в следующем разделе, а пока посмотрим на простейший по N случай детерминанта (54).

В случае $N = 2$ детерминант по паре $\mathbf{U}, \mathbf{W}$ вычисляется крайне просто:

$$\det_{\mathbf{U}, \mathbf{W}} \mathbf{J}(A, B | \kappa) = \frac{1}{2} (\tau(A, B) \tau(-A, -B) + \tau(-A, B) \tau(A, -B)), \quad (55)$$

где трансфер-матрица τ определена формулой (38), а из периметрических выражений для $\mathbf{J}$ легко получить граничные условия на τ , просто заменив $\mathbf{U}_m$ на $\mathbf{U}'_m$ и $\mathbf{W}_n$ на $\mathbf{W}'_n$.

В наиболее интересном секторе, когда $\mathbf{U}'_m = \mathbf{W}'_n = 1$ (а это и есть обобщенная киральная модель Поттса) и для простоты полагается, что $M_1 = M_2 = M$, граничные условия для полинома τ имеют вид

$$\begin{aligned}\sum_a A^a \mathbf{t}_{a,0} &= (1 - (-1)^M A)^M, \\ \sum_b B^b \mathbf{t}_{0,b} &= (1 - (-q^{\frac{1}{2}})^M B)^M, \\ \sum_a A^a \mathbf{t}_{a,M} &= q^{\frac{M^2}{2}} (1 - (-q^{-\frac{1}{2}} \kappa)^M A)^M, \\ \sum_b B^b \mathbf{t}_{M,b} &= (1 - (-\kappa)^M B)^M.\end{aligned}\tag{56}$$

Можно еще упростить функциональное соотношение, рассмотрев так называемый суперинтегрируемый случай, когда $\kappa = q^{1/2} = i$. В этом случае

$$\tau(A, B) = (1 - (-1)^M A)^M (1 - (-q^{\frac{1}{2}})^M B)^M + \sum_{a,b=1}^{M-1} \mathbf{t}'_{a,b} A^a B^b, \tag{57}$$

$$J_f(A^2, B^2) = (1 - A^2)^M (1 - (-1)^M B^2)^M. \tag{58}$$

Переопределив

$$x = (-1)^M A, \quad y = (-q^{\frac{1}{2}})^M B, \tag{59}$$

получаем уравнение

$$\tau(x, y) \tau(-x, -y) + \tau(-x, y) \tau(x, -y) = 2(1 - x^2)^M (1 - y^2)^M \tag{60}$$

с граничным условием $\tau(x, y) = (1 - x)^M (1 - y)^M + \tau'$, где τ' — полином по x, y степеней от 1 до $M - 1$.

8. СХЕМА АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2

Вместо точного доказательства теоремы 2 мы опять ограничимся лишь схемой, по которой эту теорему можно в принципе доказать с помощью методов алгебраического бете-анзаца.

Сначала рассмотрим случай $M_1 = 2$ и посмотрим на структуру уравнения (54). Мы снова факторизуем коммутативные трансфер-матрицы по параметру B , как это делалось в разделе о доказательстве теоремы 1:

$$\tau(A, B) = \sum_{b=0}^2 B^b \tau_b(A). \tag{61}$$

При этом скалярные матрицы $\tau_0(A)$ и $\tau_2(A)$ имеют вид

$$\tau_0(A) = \prod_{n=1}^{M_2} (1 - A \mathbf{W}'_n), \quad \tau_2(A) = q^{M_2} \mathbf{U}'_1 \mathbf{U}'_2 \prod_{n=1}^{M_2} (1 - q^{-1} \kappa^2 A \mathbf{W}'_n). \tag{62}$$

В этих терминах оператор $\mathbf{J}(A, B)$ представляется в виде

$$\mathbf{J}(A, B) = B\mathbf{U}(B^{-1}\mathbf{U}^{-1}\tau_0(A\mathbf{W}) + \tau_1(A\mathbf{W}) + B\mathbf{U}\tau_2(A\mathbf{W})). \quad (63)$$

Детерминант по блоку $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$, естественно, не зависит от выбора базиса в этом блоке. Удобно выбрать базис, в котором оператор $\mathbf{W}$ диагонален,

$$\mathbf{U}|\alpha\rangle = |\alpha - 1\rangle, \quad \mathbf{W}|\alpha\rangle = q^\alpha|\alpha\rangle. \quad (64)$$

При этом

$$B^{-1}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{J}(A, B)|\alpha\rangle = \tau_0(q^\alpha A)B^{-1}|\alpha + 1\rangle + \tau_1(q^\alpha A)|\alpha\rangle + \tau_2(q^\alpha A)B|\alpha - 1\rangle. \quad (65)$$

Выберем далее A и B так, чтобы $J_f = 0$, т.е. выберем пару значений x и y , удовлетворяющих условиям $x^2 = A^N$, $y^{M_2} = B^N$,

$$1 - \varepsilon_N y + \varepsilon_N x + \kappa^N xy = 0. \quad (66)$$

Если вместо x и y ввести переменные λ и η , заданные соотношениями $\lambda^2 = A$, $\eta^{M_2} = B$, то формула (66) переписется в виде

$$1 - \varepsilon_N \eta^N + \varepsilon_N \lambda^N + \kappa^N \lambda^N \eta^N = 0, \quad (67)$$

что обычно называется бакстеровской кривой для киральной модели Поттса.

На поверхности $J_f = 0$ уравнение (54) означает, что существует вектор

$$|Q\rangle = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} |\alpha\rangle \quad (68)$$

такой, что

$$\mathbf{J}(A, B)|Q\rangle = 0, \quad (69)$$

причем Q_{α} являются просто алгебраическими дополнениями матрицы $\mathbf{J}$ по любой строке в базисе $|\alpha\rangle$. Из структуры матричных элементов (65) очевидно, что

$$Q_{\alpha} = Q(q^\alpha A) \quad (70)$$

(зависимость от B подразумевается). Соотношение (70) приводит к уравнению

$$\tau_1(A)Q(A) = -\tau_0(q^{-1}A)B^{-1}Q(q^{-1}A) - \tau_2(qA)BQ(qA), \quad (71)$$

где величины A и B задаются точкой на бакстеровской кривой. Уравнение (71) есть бакстеровское $(T-Q)$ -уравнение алгебраического бете-анзаца для однородной киральной модели Поттса в случае неединичных U_1 -зарядов $\mathbf{W}'_n, \mathbf{U}'_m$.

Заметим, что процедура получения $(T-Q)$ -уравнения Бакстера из функционального уравнения (54) обратима: исходя из уравнения (71) и принимая во внимание произвольность выбора x и y с точностью до M_1 -й и M_2 -й степеней из единицы соответственно, мы

получаем уравнение (54) с точностью до нормировки, которая затем легко фиксируется через граничные условия $\tau_0(A)$ и $\tau_{M_1}(A)$. Аналогичная, но технически гораздо более утомительная процедура позволяет вывести уравнение (54) для произвольного M_1 на основании более высокого аналога $(T-Q)$ -уравнения (71), известного как система уравнений вложенного бете-анзаца.

Итак, предложена схема доказательства теоремы 2 с помощью метода вложенного бете-анзаца. Уравнение (54) выводилось с помощью метода квантовой вспомогательной линейной задачи, где оно просто тривиально. Левая и правая части (54) суть детерминант одной и той же весьма большой блочной матрицы (размером $M_1 M_2 N^{M_1 M_2} \times M_1 M_2 N^{M_1 M_2}$), рассчитанный в разных последовательностях блочного вложения.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе сформулирован локальный, комбинаторный метод построения вспомогательной трансфер-матрицы $\mathbf{J}(A, B)$ для квантовой трансфер-матрицы $\mathbf{T}$ типа слой-слой в вершинной формулировке однородной модели Замолдчикова–Бажанова–Бакстера. Приведено также функциональное уравнение для вспомогательной трансфер-матрицы, решения которого определяют спектр модели.

В конструкции функционала $\mathbf{J}(A, B)$ и уравнении (54) использовались вершинные параметры $\mathbf{u}^N = 1$, $\mathbf{w}^N = 1$ и κ , одинаковые для всей вспомогательной решетки. В общем же случае параметры $\mathbf{u}^N$, $\mathbf{w}^N$ и κ могут быть неоднородны, т.е. зависеть некоторым образом от номера вершины, при этом процедура построения операторов $\mathbf{J}(A, B)$ и $J_f(A, B)$ никак не изменится. В этом (неоднородном) случае $\mathbf{J}$ может соответствовать или неоднородной модели Замолдчикова–Бажанова–Бакстера, или некоторой существенной модификации этой модели (простейшей из модификаций является N -цветная модель на шахматной кубической решетке, основанная на модифицированном уравнении тетраэдров, см. [9]).

Помимо трансфер-матриц типа слой-слой кубической решетки, можно рассматривать трансфер-матрицы других типов, отвечающие другим сечениям кубической решетки. Или же можно рассматривать трансфер-матрицы не кубических, а, скажем, призматических трехмерных решеток (простейшей из неквадратных решеток является решетка КагOME). В любом случае, если задана квантовая трансфер-матрица, определяющая произвольную вспомогательную двумерную решетку с периодическими граничными условиями, то по приведенным правилам строится как оператор $\mathbf{J}(A, B)$, так и оператор J_f . Эти операторы связаны соотношением (54). Заметим, что в случае *неквадратной* вспомогательной решетки естественного способа ввести обозримый L -оператор и развить эквивалентную технику квантового метода обратной задачи рассеяния не существует.

Благодарности. Автор хотел бы выразить искреннюю признательность Л. Д. Фаддееву, А. Г. Изергину, Г. П. Пронько, А. Г. Пронько и Ю. Г. Строганову за проявленный к работе интерес. Особенная благодарность Игорю Корепанову и Ринату Кашаеву за исключительно полезные обсуждения в процессе получения результатов.

Эта работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 98-01-00070.

Список литературы

- [1] *A. B. Zamolodchikov*. Commun. Math. Phys. 1981. V. 79. P. 489–505.
- [2] *V. V. Bazhanov, R. J. Baxter*. J. Stat. Phys. 1992. V. 69. P. 453–485.
- [3] *V. V. Bazhanov, R. J. Baxter*. J. Stat. Phys. 1993. V. 71. P. 839–864.
- [4] *R. J. Baxter*. Physica D. 1986. V. 18. P. 321–347.
- [5] *V. V. Mangazeev, S. M. Sergeev, Yu. G. Stroganov*. J. Stat. Phys. 1996. V. 82. № 1/2.
- [6] *S. M. Sergeev*. On a two dimensional system associated with the complex of the solutions of the tetrahedron equation. solv-int/9709013; Phys. Lett. A. 1999. V. 253. № 3–4. P. 145–150; J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 5693–5714; Solitons in a 3d integrable model. solv-int/9904013; J. Nonlinear Math. Phys. 2000. V. 7. P. 1–17; *C. M. Ceperseev*. ТМФ. 1999. Т. 118. № 3. С. 479–487.
- [7] *B. B. Бажапов, Ю. Г. Стрoганов*. ТМФ. 1982. Т. 52. № 1. С. 105–113.
- [8] *V. V. Bazhanov, R. M. Kashaev, V. V. Mangazeev, Yu. G. Stroganov*. Commun. Math. Phys. 1991. V. 138. P. 393–408.
- [9] *V. V. Mangazeev, S. M. Sergeev, Yu. G. Stroganov*. Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 5517–5530.

Поступила в редакцию 24.I.2000 г.