Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Нестеренко, Уточнение определения гравитационной энергии, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 1, 150–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6461>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:11:03

© 2010 г.

Р. С. Нестеренко*

УТОЧНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ ЭНЕРГИИ

Погрешность известного “энергетического” метода вычисления центральной плотности белого карлика с предельно возможной массой анализируется в рамках теории тетрадных комплексов энергии-импульса гравитационного поля. Путем сравнения величины центральной плотности, вычисленной с помощью каждого из трех рассмотренных комплексов, с ее значением, полученным с помощью численного интегрирования уравнений Эйнштейна, производится выбор преимущественного комплекса.

Ключевые слова: гравитационная энергия, тетрадный комплекс, предел Чандрасекара.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема гравитационной энергии возникла вместе с появлением общей теории относительности. Для решения этой проблемы предлагались различные псевдотензоры, комплексы энергии-импульса и т.д. Усилия исследователей были направлены на выделение преимущественного псевдотензора/комплекса. Всякий раз оказывалось, что выбором системы координат/системы отсчета можно получить на их основе самые нелепые результаты. На наш взгляд, выбор между величинами, характеризующими гравитационную энергию, невозможно осуществить без привязки теоретических рассуждений к непробному веществу. Поэтому мы рассмотрим как можно более самосогласованную задачу, в которой материя взаимодействует с создаваемым ею гравитационным полем. Для наших целей подходящей является задача о пределе Чандрасекара для белых карликов.

Сразу отбросив псевдотензорный подход как зависящий от системы координат и затрудняющий физическую интерпретацию получаемых результатов в определенной системе отсчета, мы сосредоточимся на формализме тетрадных комплексов. Ориентируясь на книги [1], [2], будем искать приемлемый тетрадный комплекс энергии-импульса гравитационного поля путем сравнения результатов с точным методом интегрирования уравнений Эйнштейна (в которых гравитационная энергия уже учтена).

*E-mail: rs-nesterenko@mail.ru

2. СУТЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА

В этом разделе мы используем геометрические единицы $c = G = 1$.

В рамках энергетического метода считается [1], [2], что величина полной энергии есть сумма следующих слагаемых:

$$E_{\text{int}} + E_{\text{GravNewt}} + \Delta E_{\text{int}} + \Delta E_{\text{GTR}}, \quad (1)$$

где E_{int} – внутренняя энергия звезды, E_{GravNewt} – ньютоновская гравитационная энергия, ΔE_{int} – поправка, обусловленная отличием уравнения состояния от политропы с $n = 3$. Поправка общей теории относительности ΔE_{GTR} вычисляется путем разложения в ряд “энергии звезды” (за вычетом энергии покоя)

$$E_{\text{GTR}} = \int_0^R \left[\rho \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} - \rho_0 \right] dV \approx \int_0^R \rho_0 \left[u - \frac{m}{r} - u \frac{m}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{r} \right)^2 \right] dV \quad (2)$$

и вычитания из этого выражения ньютоновской энергии

$$E_{\text{Newt}} = \int_0^R \rho_0 u dV - \int_0^M \frac{m'}{r'} dm'.$$

Здесь

$$r' = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3}, \quad \rho = \rho_0(1 + u), \quad dm = \rho 4\pi r^2 dr, \quad dm' = \rho_0 dV, \quad \rho_0 = m_B n,$$

где m_B – масса бариона, n – концентрация барионов, $dV = (1 - 2m/r)^{-1/2} 4\pi r^2 dr$ – элемент собственного объема геометрии Шварцшильда, u – внутренняя энергия на единицу массы. Считая, что $\rho_0(V)$ – одна и та же функция и в теории Ньютона, и в общей теории относительности (ОТО), в книгах [1], [2] авторы сокращают член $\rho_0 u$ и далее рассматривают оставшиеся члены.

Энергетический метод в такой форме дает значение $\rho_c = 2.635 \cdot 10^{10} \text{ г/см}^3$ для центральной плотности белого карлика предельной массы (авторы монографии [1] использовали прежние значения фундаментальных констант, и у них $\rho_c = 2.646 \cdot 10^{10} \text{ г/см}^3$). Во всех расчетах мы принимаем, что отношение числа барионов к числу электронов $\mu_e = 2$.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ВНУТРЕННЕГО СТРОЕНИЯ ЗВЕЗДЫ

В этом разделе мы приводим сводку результатов численных расчетов, алгоритм которых заключается в выборе невращающихся сферически-симметричных звездных конфигураций, обладающих наибольшей массой при заданных условиях. Параметром моделей звезд можно считать центральную плотность ρ_c .

Для расчета внутреннего строения сферически-симметричной статической звезды необходимо проинтегрировать уравнения Толмана–Оппенгеймера–Волкова (ТОВ)

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad \frac{dP}{dr} = - \frac{(\rho c^2 + P)(Gm/c^2 + 4\pi G r^3 P/c^4)}{r(r - 2Gm/c^2)}, \quad (3)$$

являющиеся следствиями уравнений Эйнштейна [3]. В ньютоновской теории гравитации уравнение гидростатического равновесия упрощается и принимает вид

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho.$$

Для интегрирования уравнений внутреннего строения звезды необходимо задать уравнение состояния. Мы произвели расчеты для следующих случаев.

СЛУЧАЙ 1. Близкое к точному уравнение состояния + численное интегрирование уравнений ТОВ:

$$P = P_e(x) = \frac{\pi m_e^4 c^5}{h^3} \left[x \left(\frac{2x^2}{3} - 1 \right) \sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right],$$

$$\rho = \rho_{\text{ion}}(x) = \mu_e m_u n_e = \mu_e m_u \frac{8\pi}{3} \left(\frac{m_e c}{h} \right)^3 x^3, \quad x = \frac{p_F}{m_e c},$$

где m_u – атомная единица массы, x – релятивистский параметр, h – постоянная Планка, m_e – масса электрона, p_F – импульс Ферми. Газ электронов полностью вырожден, давление определяется электронами, вклад в плотность дает масса покоя ионов. Для $\mu_e = 2$ получаем следующие значения максимальной массы и соответствующих ей центральной плотности и радиуса белого карлика:

$$M_{\text{WD}} = 1.4254103 M_{\odot}, \quad \rho_c = 3.555 \cdot 10^{10} \text{ г/см}^3, \quad R = 9.0504 \cdot 10^7 \text{ см.} \quad (4)$$

СЛУЧАЙ 2. Политропное уравнение состояния с $n = 3$ + уравнения ТОВ:

$$P = K \rho^{1+1/n}, \quad K = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{ch}{(m_u \mu_e)^{4/3}}$$

или

$$P \approx \frac{\pi m_e^4 c^5}{h^3} \frac{2x^4}{3}, \quad \rho = \rho_{\text{ion}}(x).$$

Уравнение состояния ультрарелятивистского вырожденного электронного газа соответствует политропе индекса $n = 3$. Для этих эквивалентных случаев получаем, что кривая $M(\rho_c)$ не имеет максимума, масса M монотонно убывает с ростом ρ_c .

СЛУЧАЙ 3. Политропное уравнение состояния с поправками + уравнения ТОВ:

$$P \approx \frac{2\pi m_e^4 c^5}{3h^3} (x^4 - x^2), \quad \rho = \rho_{\text{ion}}(x).$$

Уже при учете первой поправки к политропному уравнению состояния появляется максимум на кривой $M(\rho_c)$. Результаты случаев 2 и 3 показывают, что в рамках энергетического метода следует учитывать поправки к уравнению состояния: $E = E_{\text{grav}} + E_{\text{int}} + \Delta E_{\text{grav}} + \Delta E_{\text{int}}$, отбрасывать ΔE_{int} нельзя.

СЛУЧАЙ 4. Политропное уравнение состояния с $n = 3$ + ньютоновская теория гравитации. В этом случае масса конфигурации не зависит от центральной плотности, и ее численное значение $M_{\text{Ch}} = 1.45635 M_{\odot}$ соответствует аналитической

теории, в которой

$$M_{\text{Ch}} = \frac{4K^{3/2}}{G^{3/2}\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi_1} \theta^3 \xi^2 d\xi = 1.45631 M_{\odot}. \quad (5)$$

СЛУЧАЙ 5. Близкое к точному уравнение состояния $P = P_e(x)$, $\rho = \rho_{\text{ion}}(x)$ + ньютоновская теория гравитации. При увеличении x соотношение между P и ρ стремится к политропному уравнению состояния с $n = 3$, поэтому масса должна стремиться к пределу Чандрасекара. И это действительно так, что можно увидеть из табл. 1.

Таблица 1

x_c	ρ_c , г/см ³	P_c , г/см · с ²	M_{WD} , $M_{\odot}$	R_{WD} , км
10	$1.948 \cdot 10^9$	$1.189 \cdot 10^{27}$	1.394728	$2.073 \cdot 10^3$
10^2	$1.948 \cdot 10^{12}$	$1.200 \cdot 10^{31}$	1.455556	$2.592 \cdot 10^2$
10^3	$1.948 \cdot 10^{15}$	$1.200 \cdot 10^{35}$	1.456340	26.70
10^4	$1.948 \cdot 10^{18}$	$1.200 \cdot 10^{39}$	1.456348	2.679
10^5	$1.948 \cdot 10^{21}$	$1.200 \cdot 10^{43}$	1.456348	0.2681

Можно также сделать вывод, что точность вычислений достаточна для наших целей.

4. ОПИСАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Наша модификация энергетического метода заключается в том, что мы рассматриваем величины, заведомо сохраняющиеся в ОТО. Общая схема построения тетрадных комплексов энергии-импульса гравитационного поля заключается в следующем. Уравнения Эйнштейна записываются в полутетрадном виде [4]

$$\frac{g_{\nu}(\alpha)}{\kappa} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = \theta^{\mu}(\alpha) - t^{\mu}(\alpha) = P^{\mu}(\alpha), \quad P^{\mu}(\alpha) = T^{\mu\nu} g_{\nu}(\alpha), \quad (6)$$

где $g_{\nu}(\alpha)$ – компоненты тетрады, α – лоренцев индекс, ν – координатный индекс, $T^{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса вещества. Векторы $t^{\mu}(\alpha)$ составляют так называемый тетрадный комплекс энергии-импульса гравитационного поля. Существуют законы сохранения

$$\nabla_{\mu} \theta^{\mu}(\alpha) = \nabla_{\mu} (P^{\mu}(\alpha) + t^{\mu}(\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} [\sqrt{-g} (P^{\mu}(\alpha) + t^{\mu}(\alpha))] = 0, \quad (7)$$

$$P(\alpha) = \int \sqrt{-g} [P^{\mu}(\alpha) + t^{\mu}(\alpha)] d\sigma_{\mu}. \quad (8)$$

Интеграл для $\alpha = 0$, как мы увидим ниже, дает полную энергию звезды, состоящую из внутренней энергии газа, энергии покоя и гравитационной энергии.

Для сферически-симметричной звезды линейный элемент выражается формулой

$$ds^2 = -e^{2\Phi/c^2} dt^2 c^2 + \frac{dr^2}{1 - 2Gm/c^2 r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

таким образом, для $\alpha = 0$ правая часть (8) переходит в

$$\int_0^R \theta^0(0) g_0(0) \frac{4\pi r^2 dr}{\sqrt{1 - 2Gm/c^2 r}}, \quad (9)$$

где R – радиус звезды.

Опишем дальнейшие преобразования этого интеграла, которые отвечают преобразованиям, используемым в “энергетическом” методе [1], [2]. Разлагая этот интеграл в ряд и “обезразмеривая” с помощью формул теории политропов ($\theta(\xi)$ – функция Эмдена, ξ_1 – корень функции Эмдена),

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_c \theta(\xi), & \Phi_c &= (n+1)K\rho_c^{1/n}, \\ \rho_0 &= \rho_c \theta^n, & r &= r_1 \xi, & r_1 &= \frac{(n+1)^{1/2} K^{1/2}}{(4\pi G)^{1/2}} \rho_c^{1/2n-1/2}, & n &= 3, \\ \theta'' &= -\theta^n - \frac{2}{\xi} \theta', & m(r) &= -4\pi r_1^3 \rho_c \xi^2 \theta', & m'(r) &= 4\pi r_1^3 \rho_c \theta^n \xi^2, & R &= r_1 \xi_1, \end{aligned} \quad (10)$$

мы получаем выражение для полной энергии, вычисленной с помощью какого-либо тетрадного комплекса:

$$A\rho_c^{1/3} + B\rho_c^{2/3} + C\rho_c^{-1/3} + D = E. \quad (11)$$

Равновесие достигается при $\partial E/\partial \rho_c = 0$, устойчивость нарушается при $\partial^2 E/\partial \rho_c^2 = 0$, что в явном виде записывается как

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} A\rho_c^{-2/3} + \frac{2}{3} B\rho_c^{-1/3} - \frac{1}{3} C\rho_c^{-4/3} &= 0, \\ -\frac{2}{9} A\rho_c^{-5/3} - \frac{2}{9} B\rho_c^{-4/3} + \frac{4}{9} C\rho_c^{-7/3} &= 0. \end{aligned}$$

Следуя книге [1], выражаем коэффициент при $\rho_c^{-2/3}$ из первого уравнения и подставляем во второе уравнение, но, в отличие от [1], мы не будем искусственно выделять массу M в коэффициентах разложения¹⁾. После этого мы получаем одно уравнение для ρ_c , из которого следует формула

$$\rho_c = -\frac{C}{B}. \quad (12)$$

¹⁾ Авторы книги [1] действуют полностью эквивалентным образом: сначала выделяют массу M по формуле из теории политропов, а затем, после подстановки коэффициента при $\rho_c^{-2/3}$ во второе уравнение, заменяют M обратно на ее политропное значение.

5. ТЕТРАДНЫЙ КОМПЛЕКС ФРОЛОВА

Комплекс Фролова [4] определяется следующими сохраняющимися векторами:

$$\theta^\mu(\alpha) = \frac{2}{\kappa} \nabla_\nu C^{\mu\nu}, \quad (13)$$

где $C_{\mu\nu} = (\partial_\mu g_\nu(\alpha) - \partial_\nu g_\mu(\alpha))/2$ – объекты неголономности (в книге [4] неточность: приведено выражение (13) для $\theta^\mu(\alpha)$, но векторы обозначены как $t^\mu(\alpha)$, хотя эти величины совпадают только в отсутствие непробного вещества).

Вычислим плотность гравитационной энергии для статической сферически-симметричной метрики. Имеем

$$S_{00} = g_\mu(0)\theta^\mu(0) = g_0(0)\theta^0(0) = g_0(0)\frac{1}{\kappa}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_1[\sqrt{-g}g^{00}g^{11}(-\partial_1 g_0(0))]. \quad (14)$$

Для метрики Шварцшильда

$$S_{00}(\text{Schw}) = -\frac{Gm^2}{8\pi r^4(1 - 2Gm/c^2 r)},$$

что соответствует ньютоновскому значению с поправкой, связанной с замедлением времени.

Для расчета критической центральной плотности белого карлика нужно вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^R S_{00} \frac{4\pi r^2 dr}{\sqrt{1 - 2Gm/c^2 r}} &\approx 4\pi \int_0^R r^2 S_{00} \left(1 + \frac{Gm}{c^2 r} + \frac{3G^2 m^2}{2c^4 r^2}\right) dr \approx \\ &\approx \int_0^R \left[-\frac{m^2 \Phi'' G}{4c^2} - \frac{mm' \Phi' G}{2c^2} + \frac{c^2 r^2 \Phi''}{2G} + \frac{c^2 r \Phi'}{G} - \frac{rm \Phi''}{2} - \frac{rm' \Phi'}{2} - \frac{m \Phi'}{2} \right] dr. \end{aligned}$$

Здесь S_{00} вычисляется по формуле (14) при соответствующих значениях компонент тетрады и метрики. Используя безразмерные величины, заданные с помощью формул (10), с точностью до членов порядка m^3/r^3 будем иметь в правой части последнего равенства следующее выражение:

$$\begin{aligned} & - \frac{8\rho_c^{1/3} K^{5/2} \sqrt{\pi G}}{\pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^2 (\theta')^2 d\xi - \frac{8K^3}{\pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^3 \theta^3 \theta' d\xi - \\ & - \frac{8\rho_c^{1/3} K^{5/2} \sqrt{\pi G}}{\pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^3 \theta^3 \theta' d\xi - \frac{2c^2 K^{3/2} \sqrt{\pi G}}{\pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^3 d\xi + \\ & + \frac{32\rho_c^{2/3} K^{7/2} \sqrt{\pi G}}{c^2 \pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^3 (\theta')^3 d\xi + \frac{32\rho_c^{1/3} K^4}{c^2 \pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^4 \theta^3 (\theta')^2 d\xi + \\ & + \frac{16\rho_c^{2/3} K^{7/2} \sqrt{\pi G}}{c^2 \pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^4 \theta^3 (\theta')^2 d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Вычислим коэффициенты при различных степенях ρ_c в выражении для полной энергии $A_\Phi \rho_c^{1/3} + B_\Phi \rho_c^{2/3} + D_\Phi$:

$$A_\Phi = 6.421731 \cdot 10^{52}, \quad B_\Phi = -1.054929 \cdot 10^{42}, \quad D_\Phi = 6.088957 \cdot 10^{58}.$$

6. ТЕТРАДНЫЙ КОМПЛЕКС РОДИЧЕВА

Сохраняющиеся векторы для тетрадного комплекса Родичева [4] записываются как

$$\theta^\mu(\alpha) = \frac{2}{\kappa} \nabla_\nu \Delta(\alpha)^{\mu\nu},$$

где $\Delta(\alpha)^{\mu\nu} = g^\sigma(\alpha) \Delta_\sigma^{\mu\nu}$ – коэффициенты вращения Риччи. Для $\Delta_{\mu,\alpha\nu}$ есть явное выражение [4]:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu,\alpha\nu} = & \frac{g_\nu(\beta) [\partial_\alpha g_\mu(\beta) - \partial_\mu g_\alpha(\beta)]}{2} + \frac{g_\alpha(\beta) [\partial_\mu g_\nu(\beta) - \partial_\nu g_\mu(\beta)]}{2} + \\ & + \frac{g_\mu(\beta) [\partial_\alpha g_\nu(\beta) - \partial_\nu g_\alpha(\beta)]}{2}. \end{aligned}$$

Плотность энергии для сферически-симметричной статической метрики равна

$$S_{00} = g_\mu(0) \theta^\mu(0) = g_0(0) \theta^0(0) = -\frac{2}{\kappa} g_0(0) \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_1 [\sqrt{-g} g_0^2(0) (g^{00})^2 g^{11} \partial_1 g_0(0)].$$

Для метрики и тетрады Шварцшильда получаем

$$S_{00}(\text{Schw}) = \frac{Gm^2}{4\pi r^4 (1 - 2Gm/c^2 r)}.$$

Для сферически-симметричной звезды имеем

$$\begin{aligned} \int_0^R S_{00} \frac{4\pi r^2 dr}{\sqrt{1 - 2Gm/c^2 r}} \approx \int_0^R \left[\frac{m^2 \Phi'' G}{2c^2} + \frac{mm' \Phi' G}{c^2} - \frac{c^2 r^2 \Phi''}{G} - \right. \\ \left. - \frac{2c^2 r \Phi'}{G} + rm\Phi'' + rm' \Phi' + m\Phi' \right] dr. \end{aligned}$$

Используя безразмерные величины, получаем в правой части последнего равенства

$$\begin{aligned} & - \frac{64\rho_c^{2/3} K^{7/2} \sqrt{\pi G}}{c^2 \pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^3 (\theta')^3 d\xi - \frac{64\rho_c^{1/3} K^4}{c^2 \pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^4 \theta^3 (\theta')^2 d\xi - \\ & - \frac{32\rho_c^{2/3} K^{7/2} \sqrt{\pi G}}{c^2 \pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^4 \theta^3 (\theta')^2 d\xi + \frac{16\rho_c^{1/3} K^{5/2} \sqrt{\pi G}}{\pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^2 (\theta')^2 d\xi + \\ & + \frac{16K^3}{\pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^3 \theta^3 \theta' d\xi + \frac{16\rho_c^{1/3} K^{5/2} \sqrt{\pi G}}{\pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^3 \theta^3 \theta' d\xi + \frac{4c^2 K^{3/2} \sqrt{\pi G}}{\pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^3 d\xi. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое представляет собой энергию покоя Mc^2 для политропы с $n = 3$.

Вычислим коэффициенты при различных степенях ρ_c в выражении для полной энергии $A_P \rho_c^{1/3} + B_P \rho_c^{2/3} + D_P$:

$$A_P = -1.284346 \cdot 10^{53}, \quad B_P = 2.109857 \cdot 10^{42}, \quad D_P = -1.217791 \cdot 10^{59}.$$

7. ПРЕИМУЩЕСТВЕННЫЙ ТЕТРАДНЫЙ КОМПЛЕКС

В этом разделе мы будем использовать обозначения $e_{a\mu} = g_{\mu}(a)$, $a = 0, 1, 2, 3$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Для вывода данного комплекса энергии-импульса уравнения Эйнштейна необходимо представить в полутетрадной форме

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu}, & G_{a\mu} &= e_a^\nu G_{\mu\nu} = \kappa T_{a\mu}, \\ g_{\mu\nu} &= \eta^{ab} e_{a\mu} e_{b\nu} = -e_{0\mu} e_{0\nu} + e_{1\mu} e_{1\nu} + e_{2\mu} e_{2\nu} + e_{3\mu} e_{3\nu}. \end{aligned}$$

Переписывая эти уравнения в виде

$$\mathbf{R}_a = R_{a\nu} \mathbf{d}x^\nu = \kappa \left(\mathbf{T}_a - \frac{1}{2} T \mathbf{e}_a \right)$$

и используя выражение для тензора Риччи через лапласиан и даламбертиан,

$$\mathbf{R}_a = (\Delta + \nabla^2) \mathbf{e}_a, \quad \Delta = \delta \mathbf{d} + \mathbf{d} \delta,$$

где $\mathbf{d}$ – внешний дифференциал, δ – кодифференциал, $\mathbf{d} \mathbf{d} = \delta \delta = 0$, представим уравнения Эйнштейна в квазимахвелловской форме с сохраняющейся, козамкнутой величиной в правой части:

$$\delta \mathbf{d} \mathbf{e}_a = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{S}_a, \quad (16)$$

где

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{T}_a - \frac{1}{2} T \mathbf{e}_a - \frac{1}{\kappa} (\nabla^2 \mathbf{e}_a + \mathbf{d} K_a), \quad \delta \mathbf{e}_a = K_a, \quad \delta = *^{-1} \mathbf{d} *.$$

Здесь $*$ обозначает оператор Ходжа, K_a – растяжение тетрады, равное нулю для лоренцевой ее калибровки.

Для левых и правых частей уравнений (16) выполняется закон сохранения

$$\begin{aligned} \delta \delta \mathbf{d} \mathbf{e}_a &\equiv 0, & \delta \mathbf{S}_a &= -\nabla^\mu S_{a\mu} = -\nabla^\mu (T_{a\mu} + t_{a\mu}) = 0, \\ t_{a\mu} &= \frac{1}{\kappa} (-\nabla^2 e_{a\mu} - \partial_\mu K_a) - \frac{1}{2} T e_{a\mu}. \end{aligned} \quad (17)$$

Все величины $\delta \mathbf{d} \mathbf{e}_a$ тривиальны только в мире Минковского. Более того, этот комплекс отдает предпочтение синхронной системе отсчета как привилегированной²⁾:

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{d}t \rightarrow \delta \mathbf{d} \mathbf{e}_0 \equiv 0,$$

и даже в случае искривленного пространства-времени плотность энергии S_{00} тождественно равна нулю в соответствии с принципом эквивалентности³⁾.

²⁾Используя синхронно-сопутствующую систему отсчета, можно построить новую теорию квантовой гравитации, и данная теория в настоящий момент находится в разработке.

³⁾На самом деле $\delta \mathbf{d} \mathbf{e}_0 \equiv 0$ для более широкого класса тетрад, а именно для замкнутых ($\mathbf{d} \mathbf{e}_0 = 0$), однако по лемме Пуанкаре всякая замкнутая форма локально точна.

Для тетрады Шварцшильда имеем согласующееся с ньютоновской теорией значение плотности энергии с поправкой, связанной с замедлением времени:

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{c^4} S_{00} &= e_0^\nu (\delta \mathbf{de}_0)_\nu = -\frac{e_0^\nu}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\lambda} (\partial_\lambda e_{0\nu} - \partial_\nu e_{0\lambda})] = \\ &= -\frac{e_0^0}{\sqrt{-g}} \partial_1 [\sqrt{-g} g^{11} (\partial_1 e_{00})] = \frac{G^2 m^2}{c^4 (1 - 2Gm/c^2 r) r^4}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для сферически-симметричной невращающейся звезды получаем плотность полной энергии:

$$\begin{aligned} S_{00} &= \frac{c^4}{8\pi G} \frac{1}{r^2} \left[2r^2 \left(\frac{\Phi'}{c^2} \right)^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right) + 2r \frac{\Phi'}{c^2} \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{G}{c^2} (m'r - m) \frac{\Phi'}{c^2} + r^2 \frac{\Phi''}{c^2} \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим S_{00} в интеграл и разложим в ряд до членов порядка m^3/r^3 :

$$\begin{aligned} 4\pi \int_0^R S_{00} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - 2Gm/c^2 r}} &\approx \int_0^R \left[-\frac{m^2 \Phi'' G}{4c^2} - \frac{mm' \Phi' G}{2c^2} + \frac{c^2 r^2 \Phi''}{2G} + \frac{r^2 (\Phi')^2}{G} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c^2 r \Phi'}{G} - \frac{rm \Phi''}{2} - \frac{rm (\Phi')^2}{c^2} - \frac{rm' \Phi'}{2} - \frac{m \Phi'}{2} \right] dr. \end{aligned}$$

Применим теорию политронов, получим

$$\begin{aligned} &\frac{96\rho_c^{2/3} K^{7/2} \sqrt{\pi G}}{c^2 \pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^3 (\theta')^3 d\xi + \frac{32\rho_c^{1/3} K^4}{c^2 \pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^4 \theta^3 (\theta')^2 d\xi + \\ &+ \frac{16\rho_c^{2/3} K^{7/2} \sqrt{\pi G}}{c^2 \pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^4 \theta^3 (\theta')^2 d\xi + \frac{8\rho_c^{1/3} K^{5/2} \sqrt{\pi G}}{\pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^2 (\theta')^2 d\xi - \\ &- \frac{8K^3}{\pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^3 \theta^3 \theta' d\xi - \frac{8\rho_c^{1/3} K^{5/2} \sqrt{\pi G}}{\pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^3 \theta^3 \theta' d\xi - \\ &- \frac{2c^2 K^{3/2} \sqrt{\pi G}}{\pi G^2} \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^3 d\xi. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что в данном выражении уже содержатся члены, описывающие вклад материи, поскольку сохраняющимися величинами как раз являются $\delta \mathbf{de}_a$, а справа в уравнениях (16) стоят все остальные члены из уравнений Эйнштейна.

Вычислим коэффициенты выражения $A\rho_c^{1/3} + B\rho_c^{2/3} + D$:

$$A = 6.422065 \cdot 10^{52}, \quad B = -4.488338 \cdot 10^{42}, \quad D = 6.088957 \cdot 10^{58}.$$

8. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Вычислим поправку, связанную с тем, что электроны не являются полностью релятивистскими [1]:

$$x = \left(\frac{3\pi^2 \rho \lambda_e^3}{\mu_e m_u} \right)^{1/3},$$

$$\epsilon_e = \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3} \frac{1}{8\pi^2} [x\sqrt{1+x^2}(1+2x^2) - \ln(x + \sqrt{x^2+1})] \approx$$

$$\approx \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3} \frac{1}{4\pi^2} (x^4 + x^2), \quad x \rightarrow \infty.$$

Считается, что член, пропорциональный x^4 , уже учтен, потому что он дает $3P = P/(\gamma - 1) = \epsilon'$, и это соответствует внутренней энергии адиабатического газа с уравнением состояния $P = K\rho^\gamma$. Таким образом, поправка равна

$$\Delta E_{\text{int}} = 4\pi \int_0^R \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3} \frac{1}{4\pi^2} x^2 \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - 2Gm/c^2 r}} \approx \frac{2 \cdot 3^{2/3} c^3 m_e^2 K^{3/2} \sqrt{\pi G}}{m_u^{2/3} \mu_e^{2/3} \pi^{2/3} \rho_c^{1/3} G^2 h} \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^2 d\xi -$$

$$- \frac{8 \cdot 3^{2/3} m_e^2 c K^{5/2} \sqrt{\pi G}}{m_u^{2/3} \mu_e^{2/3} \pi^{2/3} G^2 h} \int_0^{\xi_1} \xi^3 \theta^2 \theta' d\xi +$$

$$+ \frac{48 m_e^2 \pi^{1/3} \rho_c^{1/3} K^{7/2} 3^{2/3}}{c m_u^{2/3} \mu_e^{2/3} G \sqrt{\pi G} h} \int_0^{\xi_1} \xi^4 \theta^2 (\theta')^2 d\xi = C \rho_c^{-1/3} + A \rho_c^{1/3} + D,$$

где $C = 1.434069 \cdot 10^{53}$, что совпадает со значением, приведенным в [1]. Мы можем также вычислить множитель $A = 7.937262 \cdot 10^{40}$, но величины коэффициентов A и D не используются в рамках энергетического метода.

Вычисленные по формуле (12) значения ρ_c , получившиеся в рамках различных методов, отражены в табл. 2.

Таблица 2

	Метод	ρ_c , г/см ³
	Энергетический метод	$2.635 \cdot 10^{10}$
1.	Тетрадный комплекс Фролова	$13.594 \cdot 10^{10}$
2.	Тетрадный комплекс Родичева	$-6.797 \cdot 10^{10}$
3.	Преимущественный комплекс	$3.195 \cdot 10^{10}$
	Численное интегрирование	$3.555 \cdot 10^{10}$

Следовательно, наиболее точный метод из трех приведенных в таблице – это тот, который обозначен номером 3. Это означает, что данный комплекс является “привилегированным”.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предложен способ отбора подходящих величин, характеризующих гравитационную энергию в ОТО. Найден привилегированный тетрадный комплекс, который дает значение для центральной плотности белого карлика критической массы, наиболее близкое к значению центральной плотности, полученному при численном интегрировании точных уравнений совместно с близким к точному уравнением состояния. Выяснено, что данный тетрадный комплекс выделяет синхронную систему отсчета как привилегированную для пустого пространства-времени (вакуума). В синхронной системе отсчета полная плотность энергии тождественно равна нулю в соответствии с принципом эквивалентности.

Список литературы

- [1] С. Шапиро, С. Тьюколски, *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды*, Т. 1, Мир, М., 1985.
- [2] Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Теория тяготения и эволюция звезд*, Наука, М., 1971.
- [3] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*, т. 2, Мир, М., 1977.
- [4] Ю. С. Владимиров, *Системы отсчета в теории гравитации*, Энергоиздат, М., 1982.

Поступила в редакцию 6.05.2009