Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Элиович, В. И. Санюк, Некоторые аспекты применения полиномов в теории поля, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 2, 163–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:38:49

© 2010 г.

А. А. Элиович*, В. И. Санюк*

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛИНОРМ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Рассматриваются некоторые возможности применения в физике псевдонорм степени выше 2 (полином) на гиперкомплексных алгебрах, прежде всего на примере алгебры бикватернионов. При этом на ряд известных вопросов можно посмотреть под новым углом зрения. В частности, показано, что рассмотрение 4-нормы в теории поля делает естественным переход от электродинамики Максвелла к нелинейной электродинамике Борна–Инфельда. Кроме того, алгебраический подход показывает естественность добавления предложенного Скирмом нелинейного члена в мезонный лагранжиан ядерных сил. При этом выявляется целесообразность введения единственного дополнительного члена четвертого порядка в лагранжиан Скирма, что может улучшить свойства модели.

Ключевые слова: гиперкомплексная алгебра, бикватернион, мультипликативная полинома, нелинейная теория поля, электродинамика Борна–Инфельда, модель Скирма.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время растет интерес к изучению связей между гиперкомплексными алгебрами, геометрией и физикой. Примеров применения гиперкомплексных алгебр в физике не так мало [1], [2]. Кватернионы – естественный язык для описания вращений твердого тела и для ньютоновой механики в целом, поскольку группа их автоморфизмов $SU(2)$ локально изоморфна группе трехмерных вращений $SO(3)$. Это построение, так называемая теория винтов, было создано Клиффордом, Котельниковым и Штуди [3]–[6]. Сходным образом язык бикватернионов (комплексных кватернионов) достаточно органичен для теории относительности, поскольку группа их автоморфизмов $SL(2, \mathbb{C})$ локально изоморфна группе Лоренца $SO(1, 3)$. Как следствие, уравнения, выражающие условие аналитичности бикватернионных переменных (уравнения Фютера), совпадают с уравнениями Максвелла (см. [1], [7]). С другой стороны, матрицы Паули образуют алгебру, изоморфную бикватернионам, что показывает связь последней алгебры с квантовой механикой, в частности с теорией спиноров. Есть и ряд других примеров.

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия.
E-mail: eliovich@mail.ru, vsanyuk@mail.ru

Однако применение гиперкомплексных алгебр в физике не носит систематического характера. Одновременно во всех известных успешных результатах никак не используется тот факт, что алгебра бикватернионов наряду с комплексной псевдонормой второго порядка обладает и вещественной псевдонормой четвертого порядка. Возникает вопрос, что может дать учет этого факта, т. е. введение в рассмотрение полиномов сверх обычных квадратичных норм.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 вводятся основные математические конструкции на ассоциативных алгебрах на примере алгебры бикватернионов. В разделе 3 демонстрируются некоторые возможности применения полученного аппарата в физике, прежде всего в нелинейной теории поля.

2. АЛГЕБРЫ И ПОЛИНОМЫ

2.1. Кватернионы и бикватернионы: краткая сводка. *Кватернионы* H (см., например, [8]) – это ближайшее обобщение комплексных чисел. Они были придуманы Гамильтоном в 1843 г. для описания вращений трехмерного пространства (подобно тому, как комплексные числа могут служить для описания преобразований плоскости). Кватернионы суть гиперкомплексные числа размерности 4:

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3, \quad (1)$$

где a_i – вещественные числа, а орты $\mathbf{q}_i$ перемножаются согласно правилу умножения

$$\mathbf{1} \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k \mathbf{1} = \mathbf{q}_k, \quad \mathbf{q}_j \mathbf{q}_k = -\delta_{jk} \mathbf{1} + \varepsilon_{jkn} \mathbf{q}_n,$$

где δ_{jk} и ε_{jkn} – символы Кронекера и Леви-Чивиты, $j, k, n = 1, 2, 3$. Умножение кватернионов некоммутативно, но ассоциативно (т. е. не зависит от расстановки скобок).

Кроме умножения и сложения, на кватернионах, как и на комплексных числах, определена важная операция сопряжения

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1 \mathbf{q}_1 - a_2 \mathbf{q}_2 - a_3 \mathbf{q}_3. \quad (2)$$

Кватернионное сопряжение является инволюцией, линейно и переставляет порядок сомножителей, т. е. является антиавтоморфизмом:

$$\bar{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}, \quad \overline{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}} = \lambda \bar{\mathbf{a}} + \mu \bar{\mathbf{b}}, \quad \overline{\mathbf{a} \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}} \bar{\mathbf{a}}, \quad (3)$$

где λ, μ – вещественные числа. Благодаря этим свойствам следующие выражения не меняются при сопряжении:

$$\operatorname{Re} \mathbf{a} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}}) \quad (\text{реальная часть}), \quad (4)$$

$$N_r(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}, \quad N_l(\mathbf{a}) \equiv N_r(\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{правая и левая 2-нормы}). \quad (5)$$

При этом $\operatorname{Re} \bar{\mathbf{a}} \equiv \operatorname{Re} \mathbf{a}$, а левая и правая нормы совпадают (это свойство выполняется не во всех алгебрах):

$$N_r(\mathbf{a}) = N_l(\mathbf{a}) \equiv N(\mathbf{a}) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \quad (6)$$

Отсюда видно, что норма кватернионов положительно определена, а их метрика имеет сигнатуру $+4$. Самое замечательное свойство кватернионов – мультипликативность их нормы, т.е. норма произведения кватернионов равна произведению их норм:

$$N(\mathbf{ab}) = N(\mathbf{a})N(\mathbf{b}). \quad (7)$$

Этот факт лежит в основе геометрических интерпретаций кватернионов. Кроме того, благодаря этому свойству для вещественных чисел имеет место замечательное тождество четырех квадратов: правильно записанное произведение сумм четырех квадратов есть снова сумма четырех квадратов.

Уникальность кватернионов вытекает из классических теорем об исключительных алгебрах (см. [8]–[10]). Высшая из исключительных алгебр – алгебра октав размерности 8 – также обладает положительно-определенной (сигнатура метрики $+8$) и мультипликативной нормой. Однако алгебра октав уже не ассоциативна, что затрудняет ее применение в геометрии и физике. Сохраняется лишь ослабленная ассоциативность (*альтернативность*): в октавах любые два элемента порождают ассоциативную подалгебру. Октавы связаны с исключительными группами Ли, значение которых для физики в последнее время растет, и с наиболее глубокими областями проективной геометрии [2], [11]. В целом роль октав в физике остается не вполне проясненной. Октавы и свойство альтернативности затронуты в данной статье лишь для прояснения общей теории и особенностей кватернионов и бикватернионов.

Бикватернионы B суть кватернионы, определенные над полем комплексных чисел ($\mathbf{i}_0^2 = -1$). Следовательно, эти числа можно по-прежнему записывать в виде (1), но коэффициенты a_i при этом – уже комплексные числа. Однако в настоящей работе принята более свободная трактовка бикватернионов как 8-мерной алгебры над полем вещественных чисел, состоящей из двух блоков:

$$\mathbf{a} = a + k \cdot \mathbf{i}_0 \quad (8)$$

или, в развернутой записи,

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 + k_0 \mathbf{i}_0 + k_1 \mathbf{i}_1 + k_2 \mathbf{i}_2 + k_3 \mathbf{i}_3, \quad (9)$$

где a, k – кватернионы с вещественными коэффициентами. Величина $\mathbf{i}_0$ является внешней единицей, коммутирующей с кватернионами a, k , $\mathbf{i}_0^2 = -1$; единицы $\mathbf{i}_j$ – результат внешнего (тензорного) произведения $\mathbf{i}_0 \otimes \mathbf{q}_j$. Отсюда вытекает правило умножения бикватернионов в блочном и табличном виде (см. таблицу, где левый верхний угол заодно представляет таблицу умножения кватернионов):

$$(a + k \cdot \mathbf{i}_0)(b + l \cdot \mathbf{i}_0) = ab - kl + (al + kb) \cdot \mathbf{i}_0. \quad (10)$$

2.2. 2-Норма и система сопряжений для бикватернионов. Ключом к пониманию свойств гиперкомплексной алгебры является не столько таблица умножения, сколько система заданных на ней сопряжений. Учитывая, что бикватернионы

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$
$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	-1	$-\mathbf{q}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1	$-\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	1	$-\mathbf{q}_1$
$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	1

представляют собой прямо удвоенные кватернионы, аналогичное *кватернионное сопряжение* $\bar{\mathbf{a}}$ для них можно ввести по очевидному правилу:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}} &= \alpha_0 - \alpha_1 \mathbf{q}_1 - \alpha_2 \mathbf{q}_2 - \alpha_3 \mathbf{q}_3, \\ \bar{\mathbf{a}} &= a_0 - a_1 \mathbf{q}_1 - a_2 \mathbf{q}_2 - a_3 \mathbf{q}_3 + k_0 \mathbf{i}_0 - k_1 \mathbf{i}_1 - k_2 \mathbf{i}_2 - k_3 \mathbf{i}_3, \\ \bar{\mathbf{a}} &= \overline{a + k \cdot \mathbf{i}_0} = \bar{a} + \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0,\end{aligned}\tag{11}$$

где первое выражение представляет собой запись с комплексными коэффициентами, второе – полную запись с вещественными коэффициентами, а третье – сокращенную запись.

С помощью данного сопряжения на алгебре бикватернионов можно определить квадратичную 2-норму, которая теперь будет не вещественным, а комплексным числом:

$$N_2(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}.\tag{12}$$

В покомпонентном виде 2-норма бикватернионов имеет вид

$$N_2(\mathbf{a}) = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2) + 4\mathbf{i}_0(a_0 k_0 + a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3).\tag{13}$$

Комплексная 2-норма в алгебре бикватернионов, как и ее аналог в алгебре биоктав (комплексных октав), также обладает замечательным свойством мультипликативности (7). На ее основе можно ввести и вещественную псевдонорму четвертого порядка, которая наследует свойство мультипликативности (см. ниже, а также работы [12], [13]).

Для построения вещественной 4-нормы и 4-скалярного произведения одного базового кватернионного сопряжения недостаточно. Поэтому введем второе, *дуальное кватернионное сопряжение* (записи в той же последовательности, что и в (11)):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}} &= \alpha_0^* - \alpha_1^* \mathbf{q}_1 - \alpha_2^* \mathbf{q}_2 - \alpha_3^* \mathbf{q}_3, \\ \tilde{\mathbf{a}} &= a_0 - a_1 \mathbf{q}_1 - a_2 \mathbf{q}_2 - a_3 \mathbf{q}_3 - k_0 \mathbf{i}_0 + k_1 \mathbf{i}_1 + k_2 \mathbf{i}_2 + k_3 \mathbf{i}_3, \\ \tilde{\mathbf{a}} &= \widetilde{a + k \cdot \mathbf{i}_0} = \bar{a} - \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0.\end{aligned}\tag{14}$$

Преобразование $\tilde{\mathbf{a}}$ (14) также может считаться сопряжением, поскольку, как и $\bar{\mathbf{a}}$ (11), является инволюционным антиавтоморфизмом. Однако, в отличие от базового сопряжения, вообще говоря, $\mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}} \neq \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}$.

Теперь рассмотрим комбинацию сопряжений $\bar{\bar{\mathbf{a}}}$:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\mathbf{a}}} &= a_0^* + a_1^* \mathbf{q}_1 + a_2^* \mathbf{q}_2 + a_3^* \mathbf{q}_3, \\ \bar{\bar{\mathbf{a}}} &= a_0 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 - k_0 \mathbf{i}_0 - k_1 \mathbf{i}_1 - k_2 \mathbf{i}_2 - k_3 \mathbf{i}_3, \\ \bar{\bar{\mathbf{a}}} &= \overline{a + k \cdot \mathbf{i}_0} = a - k \cdot \mathbf{i}_0.\end{aligned}\tag{15}$$

Отсюда видно, что преобразование $\bar{\bar{\mathbf{a}}}$ есть *комплексное сопряжение*, внешнее для кватернионов a, k . Обозначим его $\mathbf{a}^*$. Оно является инволюцией и автоморфизмом (а не антиавтоморфизмом):

$$(\mathbf{a}^*)^* = \mathbf{a}, \quad (\mathbf{ab})^* = \mathbf{a}^* \mathbf{b}^*.\tag{16}$$

Важное преимущество базового сопряжения $\bar{\mathbf{a}}$ (11) перед дуальным сопряжением $\tilde{\mathbf{a}}$ в том, что гиперкомплексные числа, инвариантные относительно основного сопряжения $\bar{\mathbf{a}}$ (их можно назвать *реальными* относительно него), содержат в себе только орты $\mathbf{1}$ и $\mathbf{i}_0$ и поэтому, подобно вещественным числам, коммутируют с любыми числами алгебры. Данное свойство базового кватернионного сопряжения $\bar{\mathbf{a}}$ и является источником ряда хороших свойств алгебр кватернионов и бикватернионов. Лишь немногие алгебры располагают таким “хорошим” сопряжением, которое называют *скалярным* или *центральной*. Алгебры с центральным сопряжением и их основные свойства изучены в работах [12], [13].

2.3. 2-Скалярное и 2-векторное произведения в алгебрах H и B . Ниже нам потребуются не только 2-норма (12), (13), но и другие квадратичные конструкции для алгебр кватернионов H и бикватернионов B . Введем *2-скалярное произведение* (для бикватернионов оно является не вещественным, а комплексным числом):

$$N(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = N(\mathbf{a}) + N(\mathbf{b}) + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})\tag{17}$$

и, следовательно,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} (N(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - N(\mathbf{a}) - N(\mathbf{b})).\tag{18}$$

Очевидно,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}), \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = N(\mathbf{a}).$$

Легко выразить 2-скалярное произведение напрямую через операции алгебры:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \operatorname{Re}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = \frac{1}{2} (\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{b}\bar{\mathbf{a}}) = \operatorname{Re}(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}).\tag{19}$$

Таким образом, в силу свойств 2-нормы на алгебрах H и B левое и правое скалярные произведения совпадают.

Введем теперь *левое* (l) и *правое* (r) *векторные произведения*; это уже не числа, а элементы алгебры кватернионов или бикватернионов:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_l &\equiv \operatorname{Im}(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}), \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_r &\equiv \operatorname{Im}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = \frac{1}{2} (\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\bar{\mathbf{a}}).\end{aligned}\tag{20}$$

С очевидностью,

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_r = \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle_l. \quad (21)$$

Отметим, что для векторных произведений

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \neq \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle, \quad \text{или} \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_r \neq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_l.$$

Однако, как показано в работе [12], в алгебрах H и B выполняется равенство

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle^2, \quad \text{т. е.} \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_r^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_l^2. \quad (22)$$

В алгебрах кватернионов и бикватернионов верно тождество

$$N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2. \quad (23)$$

Далее, если не указан индекс r или l , мы будем иметь в виду правое векторное произведение.

2.4. Мультипликативные полиномы. В основе теории полиномов лежит идея распространить на полиномы условие мультипликативности 2-нормы $N(a \cdot b) = N(a)N(b)$. Это условие естественным образом связывает псевдонорму (форму) с умножением алгебры. В 1950–60-х годах вопрос о мультипликативности форм степени выше 2 поставил и решил Шафер [14], [15] (с дополнениями МакКриммона [16]), показав, что невырожденные мультипликативные псевдонормы можно построить только над альтернативными (в частности, ассоциативными) алгебрами.

Пусть V – векторное пространство, возможно бесконечномерное, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Отображение $\mathbf{u} \rightarrow N(\mathbf{u})$ на F называется *формой степени n на V* в случае

$$N(\lambda \mathbf{u}) = \lambda^n N(\mathbf{u}) \quad \forall \lambda \in F, \mathbf{u} \in V.$$

ТЕОРЕМА ШАФЕРА. Пусть $\mathbb{U}$ – алгебра с единицей, вообще говоря бесконечномерная, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Для того чтобы на $\mathbb{U}$ существовала невырожденная форма N степени $n > 0$, допускающая композицию, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbb{U}$ являлась конечномерной сепарабельной альтернативной алгеброй, $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{U}_r$, $\mathbb{U}_i$ – простая алгебра степени t_i , $i = 1, \dots, r$, где равенство $n = t_1 f_1 + \dots + t_r f_r$ удовлетворяется при некоторых положительных целых числах $f_1, \dots, f_r$. Более того, форма N на $\mathbb{U}$ задается соотношением

$$N(\mathbf{u}) = [n_1(u_1)]^{f_1} \dots [n_r(u_r)]^{f_r}, \quad (24)$$

где $n_j(u_j)$ – форма, заданная на простой алгебре $\mathbb{U}_j$.

Здесь существенным является понятие *невырожденности* формы степени n , которое вводится следующим образом.

1. С каждой n -нормой связывается n -линейная форма n -скалярного произведения от n гиперкомплексных чисел по формуле Шафера

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = \frac{1}{n!} \left[N(\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_n) - \sum_{i=1}^n N(\mathbf{u}_1 + \dots + \check{\mathbf{u}}_i + \dots + \mathbf{u}_n) + \right. \\ \left. + \sum_{i < j} N(\mathbf{u}_1 + \dots + \check{\mathbf{u}}_i + \dots + \check{\mathbf{u}}_j + \dots + \mathbf{u}_n) - \dots + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n N(\mathbf{u}_i) \right], \quad (25)$$

где запись $\check{\mathbf{u}}_i$ означает, что $\mathbf{u}_i$ опущен. Легко видеть, что

$$N_n(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}),$$

поскольку

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k (n-k)^n = n!.$$

Форма $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ имеет все свойства, которые естественно ожидать от полилинейного обобщения понятия скалярного произведения. Она вещественна, симметрична относительно любых перестановок векторов, линейна по каждому из них (в частности, обращается в нуль, если один из векторов равен нулю). Более правильно называть эту форму n -псевдоскалярным произведением, так как она в общем случае не является положительно определенной.

2. По определению Шафера формы степени n называются *невырожденными*, если из условия, что $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = 0$ для всех $\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in V$, вытекает $\mathbf{u}_1 = 0$.

Итак, условие мультипликативности полином (вместе с условием их невырожденности) вносит существенное ограничение, значительно сужая круг рассматриваемых алгебр. Это ограничение довольно конструктивно с точки зрения применения алгебр в геометрии и физике, поскольку переход к алгебрам с псевдонормой (формой) выше квадратичной открывает слишком много степеней свободы.

2.5. 4-Норма и 4-скалярное произведение для бикватернионов. Мультипликативные вещественные 4-нормы в алгебрах бикватернионов и биоктав могут также быть построены на основе мультипликативных комплексных норм второго порядка [12]. В самом деле, умножив комплексную 2-норму этих алгебр на сопряженное комплексное число, мы получим вещественное число с наследуемым свойством мультипликативности:

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a})^* = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})^* = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}^*\bar{\mathbf{a}}^* = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}^*). \quad (26)$$

Здесь $*$ – комплексное, или двойное сопряжение $(\mathbf{a}\mathbf{b})^* = \mathbf{a}^*\mathbf{b}^*$ (см. (15)).

В сокращенном (блочном) виде 4-норма для алгебр бикватернионов равна

$$N_4(\mathbf{a}) = N_4(a + k \cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) - N_2(k))^2 + 4(a, k)^2. \quad (27)$$

В покомпонентном виде 4-норма бикватернионов принимает вид

$$N_4(\mathbf{a}) = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)^2 + 4(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3)^2. \quad (28)$$

Очевидно, что 4-норма неотрицательна. Но она не является положительно определенной (и не может являться в силу теоремы Фробениуса): из факта $N_4(\mathbf{a}) = 0$ не следует $\mathbf{a} = 0$. Именно поэтому более корректно говорить о *псевдонормах*. Как легко видеть, чтобы 4-норма обращалась в нуль, нужно взять k равным по 2-норме a и при этом перпендикулярным ему: $(a, k) = 0$. Например, $a = 3\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_3$, $k = 2\mathbf{i}_0 + 3\mathbf{i}_2$.

Формула, выражающая мультипликативность 4-нормы алгебры бикватернионов, в кватернионной записи выглядит так (с помощью (17) и ряда других кватернионных тождеств ее можно доказать напрямую):

$$\begin{aligned} & ((N_2(a) - N_2(k))^2 + 4(a, k)^2)((N_2(b) - N_2(l))^2 + 4(b, l)^2) = \\ & = (N_2(ab - kl) - N_2(al + kb))^2 + 4(ab - kl, al + kb)^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Это тождество можно записать и проверить в вещественных числах [12]. Подобно формулам суммы квадратов, это громоздкое тождество, случайное для вещественных чисел, отражает существование алгебры бикватернионов.

Для бикватернионов 4-норма, как можно показать [12], может быть представлена в ином виде, использующем дуальное сопряжение (14):

$$N_4(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})^*, \quad (30)$$

$$N_4(\mathbf{a}) = N_4(a + k \cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) + N_2(k))^2 + 4\langle k, a \rangle^2, \quad (31)$$

$$(N_2(a) - N_2(k))^2 + 4(a, k)^2 = (N_2(a) + N_2(k))^2 + 4\langle k, a \rangle^2. \quad (32)$$

Зная 4-норму, можно ввести *обратный элемент* для алгебры бикватернионов. В самом деле, поскольку

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}N_2^*(\mathbf{a}), \quad N_4(\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}N_2^*(\bar{\mathbf{a}}), \quad N_4(\bar{\mathbf{a}}) = N_4(\mathbf{a}),$$

правый и левый обратный элементы (они, конечно, существуют не всегда) равны

$$\mathbf{a}_r^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{a}}N_2^*(\mathbf{a})}{N_4(\mathbf{a})} = \frac{\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}^* \bar{\mathbf{a}}^*}{N_4(\mathbf{a})}, \quad \mathbf{a}_l^{-1} = \frac{N_2^*(\bar{\mathbf{a}})\bar{\mathbf{a}}}{N_4(\mathbf{a})} \equiv \mathbf{a}_r^{-1}. \quad (33)$$

Поскольку $N_2(\bar{\mathbf{a}}) = N_2(\mathbf{a})$, правый и левый обратные элементы совпадают. Таким образом, обратный элемент существует для каждого элемента из алгебры B с ненулевой 4-нормой.

В работе [12] 4-скалярное произведение для алгебр бикватернионов и биоктав было построено на основе формулы Шафера (25), которая для случая $n = 4$ имеет вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = & \frac{1}{24} [N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) - N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}) - \\ & - N_4(\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) - N_4(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) + N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + N_4(\mathbf{a} + \mathbf{c}) + N_4(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \\ & + N_4(\mathbf{a} + \mathbf{d}) + N_4(\mathbf{b} + \mathbf{d}) + N_4(\mathbf{c} + \mathbf{d}) - N_4(\mathbf{a}) - N_4(\mathbf{b}) - N_4(\mathbf{c}) - N_4(\mathbf{d})]. \end{aligned} \quad (34)$$

Принимая во внимание формулу (26), выражающую для алгебр бикватернионов и биоктав 4-норму через 2-норму, и выражая 2-норму суммы через 2-скалярное произведение согласно (17), получаем после ряда упрощений формулу 4-скалярного

произведения в алгебрах с центральным сопряжением с (псевдо)нормой четвертой степени:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{1}{6} [(\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{c}^*, \mathbf{d}^*) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}^*, \mathbf{d}^*) + (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*) + (\mathbf{c}, \mathbf{d})(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) + (\mathbf{b}, \mathbf{d})(\mathbf{a}^*, \mathbf{c}^*) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{a}^*, \mathbf{d}^*)]. \quad (35)$$

2.6. Основные конструкции в матричном представлении. Для приложения введенных выше конструкций к геометрии и физике целесообразно представить их в матричном виде (см. также [13]). Бикватернионы имеют точное матричное представление с помощью комплексных (2×2) -матриц. Это представление известно как алгебра матриц Паули:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{q}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{q}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{q}_3 &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \\ \mathbf{i}_0 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, & \mathbf{i}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{i}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{i}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В данном представлении бикватернион

$$\mathbf{a} = a_0 \cdot \mathbf{1} + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 + k_0 \mathbf{i}_0 + k_1 \mathbf{i}_1 + k_2 \mathbf{i}_2 + k_3 \mathbf{i}_3$$

записывается так:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + k_3 - ia_3 + ik_0 & -ia_1 - a_2 + k_1 - ik_2 \\ -ia_1 + a_2 + k_1 + ik_2 & a_0 - k_3 + ia_3 + ik_0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Основному бикватернионному сопряжению (11)

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 \cdot \mathbf{1} - a_1 \mathbf{q}_1 - a_2 \mathbf{q}_2 - a_3 \mathbf{q}_3 + k_0 \mathbf{i}_0 - k_1 \mathbf{i}_1 - k_2 \mathbf{i}_2 - k_3 \mathbf{i}_3$$

соответствует присоединенная матрица

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - k_3 + ia_3 + ik_0 & ia_1 + a_2 - k_1 + ik_2 \\ ia_1 - a_2 - k_1 - ik_2 & a_0 + k_3 - ia_3 + ik_0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

2-Норма бикватерниона, понимаемая как комплексное число, равна детерминанту его матрицы, а с другой стороны, она может быть выражена через произведение матрицы бикватерниона на присоединенную матрицу ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' = \text{Det } \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}$):

$$N_2(\mathbf{a}) = \text{Det } \mathbf{A} = \frac{1}{2} \text{Sp}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}'). \quad (38)$$

Отсюда 2-скалярное произведение (комплексное число) есть

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{4} \text{Sp}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}' + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}'). \quad (39)$$

Правое 2-векторное произведение (элемент алгебры бикватернионов) имеет вид

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}' - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}'). \quad (40)$$

Дуальному кватернионному сопряжению (вторая запись в (14)) соответствует эрмитово-сопряженная матрица

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + k_3 + ia_3 - ik_0 & ia_1 + a_2 + k_1 - ik_2 \\ ia_1 - a_2 + k_1 + ik_2 & a_0 - k_3 - ia_3 - ik_0 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Внешнему для кватернионов комплексному сопряжению (15) (равному комбинации сопряжений $\bar{\mathbf{a}}$)

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^* = a_0 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 - k_0 \mathbf{i}_0 - k_1 \mathbf{i}_1 - k_2 \mathbf{i}_2 - k_3 \mathbf{i}_3$$

соответствует матрица

$$\mathbf{A}'^+ = \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_{22}^* & -a_{21}^* \\ -a_{12}^* & a_{11}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - k_3 - ia_3 - ik_0 & -ia_1 - a_2 - k_1 + ik_2 \\ -ia_1 + a_2 - k_1 - ik_2 & a_0 + k_3 + ia_3 - ik_0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Как следствие, 4-норма равна

$$N_4(\mathbf{a}) = \frac{1}{4} \text{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{A}') [\text{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{A}')]^* = \frac{1}{4} \text{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{A}') \text{Sp}(\mathbf{A}^* \mathbf{A}^*), \quad (43)$$

а 4-скалярное произведение есть

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = & \frac{1}{96} [\text{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{B}' + \mathbf{B}\mathbf{A}') \text{Sp}(\mathbf{C}^* \mathbf{D}^{*'} + \mathbf{D}^* \mathbf{C}^{*'}) + \\ & + \text{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{C}' + \mathbf{C}\mathbf{A}') \text{Sp}(\mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*'} + \mathbf{D}^* \mathbf{B}^{*'}) + \text{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{D}' + \mathbf{D}\mathbf{A}') \text{Sp}(\mathbf{B}^* \mathbf{C}^{*'} + \mathbf{C}^* \mathbf{B}^{*'}) + \\ & + \text{Sp}(\mathbf{C}\mathbf{D}' + \mathbf{D}\mathbf{C}') \text{Sp}(\mathbf{A}^* \mathbf{B}^{*'} + \mathbf{B}^* \mathbf{A}^{*'}) + \text{Sp}(\mathbf{B}\mathbf{D}' + \mathbf{D}\mathbf{B}') \text{Sp}(\mathbf{A}^* \mathbf{C}^{*'} + \mathbf{C}^* \mathbf{A}^{*'}) + \\ & + \text{Sp}(\mathbf{B}\mathbf{C}' + \mathbf{C}\mathbf{B}') \text{Sp}(\mathbf{A}^* \mathbf{D}^{*'} + \mathbf{D}^* \mathbf{A}^{*'})]. \end{aligned} \quad (44)$$

Все формулы значительно упрощаются в важном для приложений случае чисто мнимых бикватернионов с шестью ненулевыми компонентами ($a_0 = k_0 = 0$). В этом случае

$$\bar{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}^* = -\tilde{\mathbf{a}}, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{A}' = -\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^* = -\mathbf{A}^+.$$

Тогда 2-норма, 2-скалярное и 2-векторное произведения суть

$$N_2(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}^2 = -\frac{1}{2} \text{Sp}(\mathbf{A}^2), \quad (45)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\frac{1}{4} \text{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}), \quad (46)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{B}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{B}) = \frac{1}{2} [\mathbf{B}, \mathbf{A}], \quad (47)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = -N_2(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) = \frac{1}{8} \text{Sp}([\mathbf{A}, \mathbf{B}]^2), \quad (48)$$

$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ – коммутатор матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}$. В данном случае 4-норма и 4-скалярное произведение равны

$$N_4(\mathbf{a}) = \frac{1}{4} \text{Sp}(\mathbf{A}^2) \text{Sp}(\mathbf{A}^{+2}), \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = & \frac{1}{96} [\text{Sp}(\mathbf{AB} + \mathbf{BA}) \text{Sp}(\mathbf{C}^+ \mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^+ \mathbf{C}^+) + \\
 & + \text{Sp}(\mathbf{AC} + \mathbf{CA}) \text{Sp}(\mathbf{B}^+ \mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^+ \mathbf{B}^+) + \text{Sp}(\mathbf{AD} + \mathbf{DA}) \text{Sp}(\mathbf{B}^+ \mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^+ \mathbf{B}^+) + \\
 & + \text{Sp}(\mathbf{CD} + \mathbf{DC}) \text{Sp}(\mathbf{A}^+ \mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^+ \mathbf{A}^+) + \text{Sp}(\mathbf{BD} + \mathbf{DB}) \text{Sp}(\mathbf{A}^+ \mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^+ \mathbf{A}^+) + \\
 & + \text{Sp}(\mathbf{BC} + \mathbf{CB}) \text{Sp}(\mathbf{A}^+ \mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^+ \mathbf{A}^+)].
 \end{aligned} \tag{50}$$

3. НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛИНОРМ В ФИЗИКЕ

Как хорошо известно [1], электромагнитное поле довольно естественно описывается бикватернионными переменными, в этом контексте логично искать первые приложения норм четвертого порядка и иных конструкций для алгебр с центральным сопряжением [13].

3.1. 4-Форма и элемент массы электромагнитного поля. Введем бикватернион электромагнитного поля

$$\mathbf{F} = \mathbf{q}_1 H_1 + \mathbf{q}_2 H_2 + \mathbf{q}_3 H_3 + \mathbf{i}_1 E_1 + \mathbf{i}_2 E_2 + \mathbf{i}_3 E_3 = \mathbf{H} + \mathbf{i}_0 \mathbf{E}, \tag{51}$$

где $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ – чисто мнимые кватернионы, которые могут рассматриваться просто как 3-векторы напряженности электрического и магнитного полей. Комплексная 2-норма этого бикватерниона в силу формулы (13) равна

$$\begin{aligned}
 N_2(\mathbf{F}) &= H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 + 2\mathbf{i}_0(H_1 E_1 + H_2 E_2 + H_3 E_3) = \\
 &= \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 + 2\mathbf{i}_0(\mathbf{H}, \mathbf{E}) = \mathbf{I}_s + 2\mathbf{i}_0 \mathbf{I}_p,
 \end{aligned} \tag{52}$$

т.е. она составлена из скалярного $\mathbf{I}_s = \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2$ и псевдоскалярного $\mathbf{I}_p = (\mathbf{H}, \mathbf{E})$ инвариантов электромагнитного поля. В силу (27), (28) 4-норма бикватерниона электромагнитного поля (вещественный скаляр) равна

$$\begin{aligned}
 N_4(\mathbf{F}) &= (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2)^2 + 4(H_1 E_1 + H_2 E_2 + H_3 E_3)^2 = \\
 &= (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H}, \mathbf{E})^2 = \mathbf{I}_s^2 + 4\mathbf{I}_p^2.
 \end{aligned} \tag{53}$$

Чтобы выявить скрытый смысл этого выражения, используем (32):

$$N_4(\mathbf{F}) = (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{E}, \mathbf{H})^2 = (\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H}, \mathbf{E})^2$$

или

$$N_4(\mathbf{F}) = (\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2)^2 - 4|\langle \mathbf{H}, \mathbf{E} \rangle|^2 \tag{54}$$

(последний член меньше или равен нулю). Таким образом, 4-норма электромагнитного поля имеет ясный физический смысл: она является 2-нормой 4-вектора потока энергии-импульса поля, т.е. по сути представляет собой квадрат плотности массы поля. (Эта плотность не равна нулю в силу неаддитивности массы в релятивистской физике.) Несложно также показать, что 4-норма электромагнитного поля равна свертке тензора энергии-импульса с самим собой, $T_{ik} T^{ik}$; кроме этого, квадрату 4-нормы равен детерминант матрицы тензора энергии-импульса.

3.2. 4-Форма и преобразование дуальности электромагнитного поля.

Из выражения (54) видно, что 4-норма электромагнитного поля содержит скрытую симметрию кирального типа $U(1)$. Она инвариантна при замене

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cos \theta + \mathbf{H} \sin \theta, \quad \mathbf{H}' = -\mathbf{E} \sin \theta + \mathbf{H} \cos \theta \quad (55)$$

или, в бикватернионном виде (51),

$$\mathbf{F}' = (\mathbf{H} + \mathbf{i}_0 \mathbf{E})' = \mathbf{F} e^{\mathbf{i}_0 \theta}. \quad (56)$$

Это обобщенное преобразование дуальности, оставляющее, как известно, инвариантными тензор энергии-импульса электромагнитного поля и уравнения Максвелла в вакууме [17]. При наличии зарядов его надо дополнить преобразованием

$$e' = e \cos \theta + g \sin \theta, \quad g' = -e \sin \theta + g \cos \theta, \quad (57)$$

где g – магнитный заряд (частицы в этом случае несут одновременно оба типа зарядов). Таким образом, введение в рассмотрение 4-нормы электромагнитного поля позволяет прояснить природу обобщенной дуальной инвариантности уравнений Максвелла, скрытую при стандартном квадратичном подходе.

3.3. Связь 4-формы с электродинамикой Борна–Инфельда. Формула (53) для 4-нормы электромагнитного поля содержит в качестве одного из своих членов выражение, совпадающее с лагранжианом Максвелла. Что получится, если использовать 4-норму при конструировании лагранжиана поля? Оказывается, это естественным путем ведет к нелинейной электродинамике Борна–Инфельда. В самом деле, принцип соответствия подсказывает следующий вид модифицированного лагранжиана в первом нетривиальном приближении:

$$L' = L_0 + \Lambda,$$

где L_0 – лагранжиан Максвелла, а Λ – малая в обычных условиях поправка. Таким образом, модифицированный лагранжиан, использующий 4-норму поля, должен иметь в первом постмаксвелловском приближении следующий вид:

$$L' = -\frac{1}{8\pi} [(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) + \alpha((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H}, \mathbf{E})^2)], \quad (58)$$

где α – малый параметр. Именно такое приближение дает электродинамика Борна–Инфельда. Действительно, лагранжиан здесь, как известно, имеет вид

$$L = -\frac{1}{4\pi a^2} \left[\sqrt{1 + a^2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)} - a^4(\mathbf{H}, \mathbf{E})^2 - 1 \right]. \quad (59)$$

Используя разложение корня $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2 - x^2/8$ и сохраняя члены до a^4 , получаем следующее соответствие с электродинамикой Максвелла:

$$\begin{aligned} L &\approx -\frac{1}{4\pi a^2} \left(1 + \frac{1}{2} a^2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) - \frac{1}{2} a^4(\mathbf{H}, \mathbf{E})^2 - \frac{1}{8} a^4(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 - 1 \right) = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \left((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) - \frac{1}{4} a^2((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H}, \mathbf{E})^2) \right), \end{aligned}$$

т.е. в точности представление (58).

Преобразовав лагранжиан Борна–Инфельда к виду

$$L = -\frac{1}{4\pi a^2} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{2}(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)\right)^2 - \frac{a^4}{4}((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H}, \mathbf{E})^2)} - 1 \right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi a^2} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{2}L_0\right)^2 - \frac{a^4}{4}N_4(\mathbf{F})} - 1 \right],$$

можно увидеть, что сходная ситуация будет сохраняться во всех порядках: будут комбинироваться вещественная часть 2-нормы (лагранжиан Максвелла) и 4-норма электромагнитного поля (53), т. е. скаляры второго и четвертого порядков. Заметим, что требование составлять лагранжиан из скаляров второго и четвертого порядков вместе с принципом соответствия однозначно приводит к теории Борна–Инфельда лишь в первом нетривиальном порядке. В следующих порядках этих условий недостаточно, чтобы зафиксировать коэффициенты, т. е. возникает некоторый теоретический произвол (диапазон теорий). Это принципиальная ограниченность предложенного подхода. Тем не менее несомненно, что введение в рассмотрение 4-нормы электромагнитного поля выявляет естественность нелинейного обобщения электродинамики в теории Борна–Инфельда.

3.4. О лагранжиане модели Скирма. Еще один случай, когда алгебраические соображения могут прояснить полученные интуитивным путем физические результаты, дает модель Скирма [18], [19] ядерных взаимодействий. Она была создана для описания барионов как протяженных локализованных структур с нетривиальным топологическим зарядом, который интерпретируется как барионное число. Модель Скирма оказалась простым и удачным прообразом эффективной мезонной теории (в общем виде до сих пор неизвестной), к которой должна сводиться квантовая хромодинамика в низкоэнергетическом пределе. В этом пределе сильные взаимодействия в значительной мере сводятся к обмену π -мезонами. В рамках модели Скирма удается удовлетворительным образом описывать спектроскопию основных состояний адронов и их взаимодействия.

Основной объект модели – *скирмионы* – представляют собой киральные топологические солитоны со спонтанно нарушенной киральной симметрией. Описывающее их киральное поле $U(x)$ принимает значения на полевом многообразии модели $\Phi = S^3 \simeq [SU(2)]$ и параметризуется изовекторным полем $\varphi^a(x)$, соответствующим триплету пионных полей:

$$U(x) = \varphi^0 + i(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\varphi}) = e^{i(n^a\tau^a)\Theta(x)},$$

$$n^a = \frac{\varphi^a}{|\boldsymbol{\varphi}|}, \quad \sin \Theta = \pm|\boldsymbol{\varphi}|, \quad a = 1, 2, 3, \quad (60)$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, $\boldsymbol{\tau}$ – матрицы Паули, $\Theta(x)$ – киральный угол, $x = (x^0, \mathbf{x})$. Поля (60) подчинены естественным граничным условиям на пространственной бесконечности:

$$U(x) \rightarrow \mathbf{I} \quad (\varphi^a(x) \rightarrow 0) \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (61)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная (2×2) -матрица.

Левоинвариантные киральные токи $l_\mu = U^{-1}\partial_\mu U$ принимают значения в алгебре Ли группы $SU(2)$. Динамика модели Скирма определяется плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\lambda^2} \text{Sp}(l_\mu l^\mu) + \frac{\varepsilon^2}{16} \text{Sp}([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu]), \quad (62)$$

где ε, λ – параметры модели. Первый член совпадает с лагранжианом Вайнберга–Гюрши, который в “древесном” приближении хорошо воспроизводит результаты алгебры токов для низкоэнергетической динамики пионов. Второй член четвертого порядка отвечает идее Скирма рассматривать барионы как вихри в пионной жидкости, описываемой “обобщенными скоростями” l_μ .

Однако, поскольку лагранжиан модели Скирма не выводится напрямую из КХД и не является единственным обобщением лагранжиана Вайнберга–Гюрши, возникает вопрос о возможности его обоснования с помощью алгебраических соображений.

Как легко видеть, с алгебраической точки зрения каждая из компонент токов l_μ представляет собой чисто мнимый кватернион. Это означает, что мы имеем дело с тензорным произведением $B \otimes H$ алгебры бикватернионов B (эрмитовы компоненты которой представляются матрицами Паули и отвечают пространству-времени) на алгебру кватернионов H . Такая алгебра не является алгеброй с центральным сопряжением, поэтому здесь приходится расширять технику, изложенную выше. Однако по-прежнему все формулы естественным образом выражаются на языке алгебры бикватернионов [13]. Можно показать, что в общем случае алгебра $B \otimes H$ обладает комплексной формой четвертой степени и вещественной формой восьмой степени. Однако в данном случае ситуация сильно упрощается благодаря тому, что ненулевыми являются только двенадцать компонент этой алгебры (по три чисто мнимых кватерниона на каждую из четырех эрмитовых компонент пространственно-временного бикватерниона). Благодаря этому псевдонорма сводится к вещественной форме четвертой степени. Опустив промежуточные вычисления, приведем конечный результат: в кватернионной записи 4-форма равна

$$N_4 = (|l_0|^2 - |l_1|^2 - |l_2|^2 - |l_3|^2)^2 + 4(\langle l_2, l_3 \rangle^2 + \langle l_3, l_1 \rangle^2 + \langle l_1, l_2 \rangle^2 - \langle l_0, l_1 \rangle^2 - \langle l_0, l_2 \rangle^2 - \langle l_0, l_3 \rangle^2). \quad (63)$$

Используя формулы (47), (48), можно перевести эту 4-форму на обычный тензорный язык:

$$N_4 = \frac{1}{4} (\text{Sp}(l_\mu l^\mu))^2 + \frac{1}{2} (\text{Sp}([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu])). \quad (64)$$

В согласии с принципом соответствия и по аналогии с электродинамикой Борна–Инфельда естественно считать, что лагранжиан модели (в первом постлинейном приближении) должен представлять собой сумму вещественной части псевдонормы второго порядка $N_2 = \text{Sp}(l_\mu l^\mu)/2$ и псевдонормы четвертого порядка в качестве малой поправки. Таким образом, лагранжиан в этом приближении должен иметь вид

$$\mathcal{L} = N_2 + \alpha N_4,$$

где α – малый параметр, или

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4\lambda^2} \text{Sp}(l_\mu l^\mu) + \frac{\varepsilon^2}{32} ((\text{Sp}(l_\mu l^\mu))^2 + 2 \text{Sp}([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu])). \quad (65)$$

Это выражение очень похоже на лагранжиан Скимра, поскольку естественным образом появляется введенный им нелинейный вихревой член. Однако в лагранжиане Скимра нет среднего члена. Поскольку это слагаемое представляет собой квадрат 2-нормы времениподобного вектора, т.е. дважды положительно, его добавление, по-видимому, может улучшить свойства модели. Подобный член уже вводился в эффективной мезонной теории (см. например, [20]), правда, с другими коэффициентами.

Как и в электродинамике Борна–Инфельда, алгебраические соображения вместе с принципом соответствия определяют вид модифицированного лагранжиана Скимра (65) лишь в первом постлинейном порядке. В общем случае лагранжиан может представлять собой некоторую функцию, комбинирующую псевдонормы второго и четвертого порядков, т.е. снова возникает диапазон теорий. В связи с этим приведем согласованный с алгебраическими соображениями вид модифицированного лагранжиана в форме, сходной с электродинамикой Борна–Инфельда:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= -\frac{1}{\lambda^2} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} N_2\right)^2 - \frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{4} N_4} - 1 \right] = \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4} \text{Sp}(l_\mu l^\mu)\right)^2 - \frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{16} ((\text{Sp}(l_\mu l^\mu))^2 + 2 \text{Sp}([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu]))} - 1 \right]. \quad (66) \end{aligned}$$

4. ВЫВОДЫ

Поскольку 4-норма для алгебр бикватернионов и биоктав однозначно выражается через 2-норму (которая также является мультипликативной), неясно, насколько существенными будут те новые возможности, которые создает переход от комплексной 2-нормы к вещественной 4-норме, а также введение 4-скалярного произведения. Тем не менее, как минимум, выявляются некоторые новые связи между уже известными фактами, которые затухают при стандартном квадратичном подходе.

В любом случае представляются интересными попытки придать квадраобъектам какой-либо геометрический и физический смысл. Некоторые первые шаги в этом направлении представлены здесь (прежде всего, для теории поля). При этом ряд привычных вопросов можно посмотреть под новым углом зрения. В частности, рассмотрение связанной с бикватернионами вещественной 4-нормы показывает естественность перехода от электродинамики Максвелла к нелинейной электродинамике Борна–Инфельда. Алгебраический подход демонстрирует также естественность добавления предложенного Скимром нелинейного члена в лагранжиан, описывающий ядерные взаимодействия посредством обмена пионами. При этом выявляется целесообразность введения дополнительного члена в лагранжиан Скимра, что предположительно может улучшить свойства модели. Таким образом, алгебраическое

рассмотрение позволяет прояснить интуитивные находки в нелинейных полевых теориях, а также внести в них некоторые дополнительные элементы жесткости.

Благодарности. Авторы выражают свою признательность Ю. П. Рыбакову, И. В. Воловичу, участникам семинара Отдела математической физики МИРАН за ценное обсуждение. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 68-01-00798).

Список литературы

- [1] А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев, *Кватернионы в релятивистской физике*, УРСС, М., 2003.
- [2] Я. Лыхмус, Э. Паал, Л. Соргесепп, *Труды института физики АН Эстонии*, **66** (1990), 8–22.
- [3] W. K. Clifford, *Proc. London Math. Soc.*, **4** (1873), 381–395.
- [4] А. П. Котельников, *Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике*, Типо-Литография Императорского Унив., Казань, 1895.
- [5] E. Study, *Geometry der Dynamen*, Teubner, Leipzig, 1903.
- [6] Ф. М. Диментберг, *Винтовое исчисление и его приложения в механике*, Наука, М., 1965.
- [7] Э. Садбери, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **1:2** (2004), 130–157.
- [8] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников, *Гиперкомплексные числа*, Наука, М., 1973.
- [9] Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский, *Геометрия групп Ли*, МЦНМО, М., 2003.
- [10] О. В. Мельников, В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков, Л. А. Скорняков, И. П. Шестаков, *Общая алгебра*, Т. 1, Справочная математическая библиотека, ред. Л. А. Скорняков, Наука, М., 1990.
- [11] Д. С. Базз, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **3:1(5)** (2006), 120–176; [arXiv: math/0105155](https://arxiv.org/abs/math/0105155).
- [12] А. А. Элиович, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **1:2(2)** (2004), 24–50.
- [13] А. А. Элиович, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **5:2(10)** (2008), 131–159.
- [14] Р. Д. Шафер, “О формах степени n , допускающих композицию”, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **1:1** (2004), 140–154.
- [15] R. D. Schafer, *Adv. Math.*, **4:2** (1970), 127–148.
- [16] K. McCrimmon, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127:3** (1967), 527–551.
- [17] В. И. Стражев, Л. М. Томильчик, *Электродинамика с магнитным зарядом*, Наука и техника, Минск, 1975.
- [18] В. Г. Маханьков, Ю. П. Рыбаков, В. И. Санюк, *УФН*, **162:2** (1992), 1–61.
- [19] Ю. П. Рыбаков, В. И. Санюк, *Многомерные солитоны*, Изд-во РУДН, М., 2001.
- [20] В. А. Андрианов, В. Ю. Новожилов, “Скалярные мезоны в модели Скимра и солитоны с барионным зарядом”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*, 8, Зап. научн. сем. ПОМИ, **169**, Наука, Ленинградское отделение, СПб., 1988, 3–11.

Поступила в редакцию 6.02.2009,
после доработки 17.07.2009