Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Киселев, Й. В. ван де Лёр, Алгебры симметрических лагранжевых систем лиувиллева типа, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 2, 179–195

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:24:36

© 2010 г.

А. В. Киселев*, Й. В. ван де Лёр*

АЛГЕБРЫ СИММЕТРИЙ ЛАГРАНЖЕВЫХ СИСТЕМ ЛИУВИЛЛЕВА ТИПА

Явно вычислены образующие и коммутационные соотношения в алгебрах высших симметрий класса гиперболических лагранжевых систем лиувиллева типа, в частности для двумерных цепочек Тоды, связанных с полупростыми комплексными алгебрами Ли.

Ключевые слова: симметрии, двумерные цепочки Тоды, системы лиувиллева типа, гамильтоновы иерархии, скобки.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе приведено описание образующих и соотношений в алгебрах высших симметрий для класса лагранжевых гиперболических систем лиувиллева типа, интегрируемых по Дарбу [1]–[3]. Существует много неэквивалентных определений таких уравнений с частными производными [1], [3], [4]; мы исследуем системы $\mathcal{E}_L$, допускающие столько же первых интегралов у каждого из характеристических уравнений $D_y(w) \doteq 0$ и $D_x(\bar{w}) \doteq 0$ на $\mathcal{E}_L$, сколько имеется неизвестных функций. Двумерные цепочки Тоды $u_{xy} = e^{Ku}$, связанные с полупростыми комплексными алгебрами Ли, – наиболее хорошо изученный пример таких уравнений [1], [2], [5]–[7]. Известно, что системы, принадлежащие рассматриваемому классу, допускают высшие симметрии вида $\varphi = \square(\phi)$, зависящие от свободных функциональных параметров $\phi = {}^t(\phi_1(x, [w]), \dots, \phi_r(x, [w]))$ и принадлежащие образу линейных матричных дифференциальных операторов $\square$ в полных производных [6], [8]–[10]. Существование таких операторов $\square$ для систем лиувиллева типа было замечено в работах [1], [6] и [3], [10], в которых была обнаружена значимость линеаризаций $\ell_w^{(u)}$ первых интегралов w для построения операторов $\square$. В статье [9] доказано, что при дополнительном предположении о том, что уравнение $\mathcal{E}_L$ лагранжево, известный результат можно усилить и явно получить операторы $\square$ (см. ниже формулу (3)).

В настоящей работе выведены правила преобразования операторов $\square$ относительно не связанных между собой замен координат на их областях определения и в образах. Показано, что при естественных предположениях о геометрии уравнения $\mathcal{E}_L$

*Mathematical Institute, University of Utrecht, Utrecht, The Netherlands.
E-mail: A.V.Kiselev@uu.nl, J.W.vandeLeur@uu.nl

образы этих операторов замкнуты относительно коммутирования; следовательно, на областях определения операторов $\square$ также заданы структуры алгебры Ли. Возникающие при этом скобки мы вычисляем явно, что поставляет, при соответствующем индуцированном отображении структуры алгебры Ли, коммутационные соотношения в алгебрах симметрий $\text{sum } \mathcal{E}_L$. Для этой цели мы вводим вспомогательные гамильтоновы операторы с теми же областями определения, что у операторов $\square$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы не предполагаем наличия у $\mathcal{E}_L$ симметрии $x \leftrightarrow y$. Всюду мы рассматриваем x -компоненту алгебры $\text{sum } \mathcal{E}_L$, связанную с первыми интегралами $w^i \in \ker D_y|_{\mathcal{E}_L}$. Рассуждения остаются в силе и для соответствующей y -компоненты алгебры $\text{sum } \mathcal{E}_L$, причем две эти подалгебры коммутируют между собой. Для рассматриваемых нами лагранжевых систем $\mathcal{E}_L$ интегралы $\bar{w}^{\bar{i}} \in \ker D_x|_{\mathcal{E}_L}$ в доказательствах не используются, в отличие от работы [10], в которой системы лиувиллева типа произвольные.

Полный список предположений о системах $\mathcal{E}_L$ и их интегралах сформулирован в основной теореме 2 (см. также замечание 4). Отметим, впрочем, что рассуждения в разделе 2 остаются справедливыми и при менее ограничительных условиях. В частности, количество первых интегралов $w^1, \dots, w^r$ характеристического уравнения, выполненного в силу $\mathcal{E}_L$, может быть меньше, чем число неизвестных $u^1, \dots, u^m$ в $\mathcal{E}_L$. В этом случае вспомогательные матричные операторы $\hat{A}_k$ размера $r \times r$ (см. ниже формулу (7)) становятся меньше по размеру, но остаются гамильтоновыми (пример – вторая пуассонова структура для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ), построенная из двумерной цепочки Тоды с единственным интегралом, – приведен в работе [9]).

Структура статьи следующая. В разделе 2 мы определяем операторы $\square$, с помощью которых строятся образующие алгебры симметрий систем $\mathcal{E}_L$, и вводим вспомогательные гамильтоновы операторы. При этом мы заново получаем высшие пуассоновы структуры иерархий Дринфельда–Соколова [11] на двумерных цепочках Тоды, ассоциированных с полупростыми комплексными алгебрами Ли; для цепочки Тоды, заданной по алгебре A_2 , приведен пример. В разделе 3 установлена замкнутость образов операторов $\square$ относительно коммутирования и вычислены структурные соотношения в алгебрах $\text{sum } \mathcal{E}_L$; в качестве иллюстрации приведено уравнение Каупа–Буссинеска. Наконец, в разделе 4 обсуждаются некоторые свойства операторов, задающих симметрии систем лиувиллева типа, но не обязательно лагранжевых.

Все используемые понятия и конструкции из геометрии дифференциальных уравнений с частными производными стандартны (см. [12]–[14]). Мы придерживаемся обозначений из работ [9], [15], [16]. В настоящей статье развиваются идеи, сформулированные в работе [9].

2. ОБРАЗУЮЩИЕ АЛГЕБРЫ СИММЕТРИЙ УРАВНЕНИЯ $\mathcal{E}_L$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система $\mathcal{E} = \{u_{xy} = f(u, u_x, u_y; x, y)\}$, состоящая из m гиперболических уравнений относительно неизвестных $u = (u^1, \dots, u^m)$, является системой *лиувиллева типа*, если существуют нетривиальные первые интегралы

$$w^1, \dots, w^r \in \ker D_y|_{\mathcal{E}}; \quad \bar{w}^1, \dots, \bar{w}^{\bar{r}} \in \ker D_x|_{\mathcal{E}}, \quad 0 < r, \bar{r} \leq m,$$

линейных характеристических уравнений первого порядка $D_y|_{\mathcal{E}}(w^i) \doteq 0$ и $D_x|_{\mathcal{E}}(\bar{w}^{\bar{j}}) \doteq 0$, выполненных в силу $(\doteq)$ уравнения $\mathcal{E}$.

ПРИМЕР 1. В работе [2] было показано, что двумерные цепочки Тоды [5] $u_{xy}^i = e^{K_j^i u^j}$, ассоциированные с полупростыми комплексными алгебрами Ли с матрицами Картана K , допускают максимальные ($r = \bar{r} = m$) наборы интегралов. Различные методы построения интегралов $w^i, \bar{w}^{\bar{j}}$ для экспоненциально нелинейных цепочек Тоды были предложены в статьях [3], [4], [7]. После сдвига на -1 дифференциальные порядки (по u) интегралов $w^1, \dots, w^r$ равны показателям соответствующих полупростых комплексных алгебр Ли ранга r (см. с. 21 в [2]).

Например, ниже мы рассматриваем лагранжеву двумерную систему Тоды $\mathcal{E}_{\text{Тода}}$, ассоциированную с простой алгеброй Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ (см. [1], [5], [7]):

$$\mathcal{E}_{\text{Тода}} = \left\{ u_{xy} = e^{2u-v}, \quad v_{xy} = e^{-u+2v}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (1)$$

Интегралы (второго и третьего порядков) для системы (1) имеют вид соответственно (см., например, [17])

$$\begin{aligned} w^1 &= u_{xx} + v_{xx} - u_x^2 + u_x v_x - v_x^2, \\ w^2 &= u_{xxx} - 2u_x u_{xx} + u_x v_{xx} + u_x^2 v_x - u_x v_x^2. \end{aligned}$$

Производящие сечения $\varphi = \square(\phi(x, [w]))$ образующих алгебры высших симметрий уравнений лиувиллева типа задаются с помощью матричных дифференциальных операторов $\square$ в полных производных (см. [3], [6]). В случае, если система лиувиллева типа лагранжева, т.е. $\mathcal{E}_L = \{F \equiv \mathbf{E}(\mathcal{L}) = 0\}$ (см. [8], [9], [18]), существование некоторых факторизаций для по крайней мере части симметрий – закономерный факт, который легко проверить следующим образом. Для интегралов w существует оператор ∇ такой, что производная $D_y(w) = \nabla(F)$ обращается в нуль на дифференциальном идеале $\{F = 0\}^\infty$. В самом деле, производящее сечение $\psi_I = [\nabla^* \circ (\ell_w^{(u)})^* \circ (\ell_I^{(w)})^*](1)$ закона сохранения $\int I dx$ удовлетворяет уравнению $\ell_{\mathbf{E}(\mathcal{L})}^*(\psi_I) \doteq 0$ в силу $\mathcal{E}_L$ при любой функции $I(x, [w])$ (см. [12]–[14]). Из условия Гельмгольца $\ell_{\mathbf{E}(\mathcal{L})} = \ell_{\mathbf{E}(\mathcal{L})}^*$ для линеаризации (производной Фреше) следует, что вектор

$$\varphi[\phi] = [\nabla^* \circ (\ell_w^{(u)})^*](\phi(x, [w])) \in \ker \ell_{\mathbf{E}(\mathcal{L})}|_{\mathcal{E}_L} \quad (2)$$

является симметрией уравнения $\mathcal{E}_L$ для всякого сечения $\phi = (\ell_I^{(w)})^*(1) = \mathbf{E}_w(I dx)$. Стандартное гомологическое рассуждение (см. гл. 5 в [13] или § 7.8 в [14]) показывает, что формула (2) задает симметрии лагранжевой системы $\mathcal{E}_L$, даже если сечения ϕ не принадлежат образу вариационной производной $\mathbf{E}_w$ по w .

В этом разделе мы напомним процедуру построения операторов $\square$, задающих симметрии класса лагранжевых систем лиувиллева типа. Всюду предполагается, что интегралы w минимальны, т.е. из $I \in \ker D_y|_{\mathcal{E}_L}$ следует $I = I(x, [w])$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [9]. Пусть κ – обратимая симметричная постоянная вещественная матрица размера $m \times m$. Далее, пусть $\mathcal{L} = \int L dx dy$ с плотностью

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \kappa_{ij} u_x^i u_y^j - H_L(u; x, y)$$

– лагранжиан уравнения лиувиллева типа $\mathcal{E}_L = \{\mathbf{E}(L) = 0\}$. Введем канонические импульсы $\mathbf{m} = \partial L / \partial u_y$ и предположим, что $w[\mathbf{m}] = (w^1, \dots, w^r)$ – набор минимальных интегралов уравнения $\mathcal{E}_L$, принадлежащих ядру $D_y|_{\mathcal{E}_L}$. Тогда оператор

$$\square = (\ell_w^{(\mathbf{m})})^*, \quad (3)$$

сопряженный к линеаризации интегралов по импульсам, задает нётеровы симметрии φ_L уравнения $\mathcal{E}_L$ формулой

$$\varphi_L = \square \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta w} \right) \quad \forall \mathcal{H} = \int H(x, [w]) dx. \quad (4)$$

СЛЕДСТВИЕ. В предположениях и обозначениях утверждения 1 сечение

$$\varphi = \square(\phi(x, [w])) \quad (5)$$

является симметрией уравнения лиувиллева типа $\mathcal{E}_L$ для любого r -компонентного столбца $\phi = {}^t(\phi_1, \dots, \phi_r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим расслоение струй $J^\infty(\xi)$ над расслоением $\xi: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с базой $\mathbb{R} \ni x$ и слоем $\mathbb{R}^r$, координатами на котором служат $w^1, \dots, w^r$. Согласно утверждению 1 следствие справедливо для любого сечения ϕ , лежащего в образе вариационной производной $\mathbf{E}_w$. Очевидно, ее образ содержит все вариационные ковекторы ϕ с компонентами $\phi_i(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – функциями на базе нового расслоения ξ . Продолжение подстановки $w = w[\mathbf{m}[u]]: J^\infty(\pi) \rightarrow \Gamma(\xi)$ преобразует компоненты сечений ϕ в гладкие дифференциальные функции от u (одной буквой мы обозначаем все множество из m координат в слое расслоения π над той же самой базой $\mathbb{R} \ni x$). Вспомним теперь, что $\square$ – оператор в полных производных D_x , действие которых на дифференциальные функции $f[u]$ определено формулой

$$j_\infty(s)(D_x(f)) := \frac{\partial}{\partial x}(j_\infty(s)(f)),$$

т. е. через ограничение $j_\infty(s)(f)$ функции f на струи $j_\infty(s)$ сечений $u = s(x)$. Мы получаем, следовательно, $\phi_i(x) = \phi_i(x, [w[\mathbf{m}[s(x)]]])$, откуда и следует доказываемое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Приведенное выше доказательство сочетает взятие вариационных производных по w на одном пространстве струй с вычислением полных производных дифференциальных функций от u на другом пространстве струй над той же самой базой. Если эти два пространства совпадают, рассуждения сводятся к определению производной D_x . В таком случае схема доказательства называется принципом подстановки ([13], см. подробное обсуждение в [14]).

ТЕОРЕМА 1. При дифференциальных заменах $\tilde{w} = \tilde{w}[w]$ и $\tilde{u} = \tilde{u}[u]$ координат $w^1, \dots, w^r$ и $u^1, \dots, u^m$ в расслоениях бесконечных струй над ξ и π , соответствующих области определения и образу оператора $\square$, этот оператор преобразуется по формуле

$$\square \mapsto \tilde{\square} = \ell_{\tilde{u}}^{(u)} \circ \square \circ (\ell_{\tilde{w}}^{(w)})^* \Big|_{\substack{w=w[u] \\ u=u[\tilde{u}]}}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование скоростей $\tilde{\varphi} = \ell_u^{(u)}(\varphi)$ очевидно. При дифференциальных заменах $w = w[\tilde{w}]$ интегралов сечения $\phi = \delta\mathcal{H}/\delta w$ преобразуются по формуле $\phi = (\ell_{\tilde{w}}^{(w)})^*(\tilde{\phi})$, что позволяет корректно определить оператор $\square$ на всем образе $\text{im } \mathbf{E}_w$. Именно, оператор отображает вариационные ковекторы для расслоения ξ в эволюционные дифференцирования на пространстве струй над другим расслоением π . Повторяя рассуждение, использованное при доказательстве следствия утверждения 1, получаем правило (6) преобразования оператора $\square$ на всей области определения.

В теореме 1 мы показали, что сечения из области определения оператора $\square$ преобразуются по тому же правилу, что и аргументы гамильтоновых операторов. В самом деле, тому имеются глубокие причины.

Интегралы $w[\mathbf{m}]$ лагранжеских систем $\mathcal{E}_L$ лиувиллева типа порождают подстановки Миуры из коммутативных гамильтоновых иерархий $\mathfrak{B}$ (того же типа, что и модифицированное уравнение КдФ) нётеровых симметрий уравнения $\mathcal{E}_L$ во вполне интегрируемые иерархии $\mathfrak{A}$ типа КдФ высших симметрий многокомпонентных волновых уравнений $\mathcal{E}_\varnothing = \{s_{xy} = 0\}$ (см. ниже). Естественным примером служит потенциальное модифицированное уравнение КдФ

$$u_t = -\frac{1}{2}u_{xxx} + u_x^3,$$

которое преобразуется в уравнение КдФ

$$w_t = -\frac{1}{2}w_{xxx} + 3ww_x$$

посредством замены $w = u_x^2 - u_{xx}$. Этот пример был детально изучен в работе [9]. Такой метод порождения полезных дифференциальных подстановок интегралами w систем лиувиллева типа был открыт в работе [19] (см. обсуждение в [3]). Данный факт был использован в работе [20] для классификации дифференциальных подстановок первого порядка.

Гамильтонианы $\mathcal{H}_i[\mathbf{m}] = \mathcal{H}_i[w[\mathbf{m}]]$ иерархий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ общие, они связаны подстановкой Миуры $w[\mathbf{m}]$. Гамильтоновы структуры в схемах Магри для иерархий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ согласованы операторами $\square$, которые отображают “косимметрии” ϕ_i иерархии $\mathfrak{A}$ в симметрии φ_{i+1} модифицированной иерархии $\mathfrak{B}$. Подчеркнем, что первый гамильтонов оператор $\hat{B}_1 = (\ell_{\mathbf{m}}^{(u)})^*$ иерархии $\mathfrak{B}$ происходит из дифференциальной связи $\mathbf{m} = \partial L / \partial u_y$ между каноническими координатами u и импульсами $\mathbf{m}$ для уравнения $\mathcal{E}_L$. Используя явно заданный “младший” оператор $\hat{B}_1$ и дифференциально-функциональную замкнутость (относительно $[w]$) скоростей эволюции интегралов вдоль симметрий (см. [3]), мы воспроизводим классическую схему задания высших пуассоновых структур подстановками Миуры [21].

ЛЕММА 1. *Рассмотрим линейный дифференциальный оператор*

$$\hat{A}_k = \square^* \circ \hat{B}_1 \circ \square, \quad (7)$$

отображающий вариационные ковекторы для расслоения струй $J^\infty(\xi)$ над ξ в эволюционные векторные поля на нем, т. е.

$$\hat{A}_k: \Gamma(\hat{\xi}) \bigotimes_{C^\infty(\mathbb{R})} C^\infty(J^\infty(\xi)) \rightarrow \Gamma(\xi) \bigotimes_{C^\infty(\mathbb{R})} C^\infty(J^\infty(\xi)).$$

Тогда оператор (7) гамильтонов и определяет пуассонову структуру для иерархии $\mathfrak{A}$ типа $Kd\Phi^1$). Коэффициенты оператора $\hat{A}_k$ – дифференциальные функции от w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению скобка Пуассона

$$\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}_{\hat{A}_k} = \langle \mathbf{E}_w(\mathcal{H}_1), \hat{A}_k(\mathbf{E}_w(\mathcal{H}_2)) \rangle$$

удовлетворяет равенству

$$\{\mathcal{H}_1[w], \mathcal{H}_2[w]\}_{\hat{A}_k} = \{\mathcal{H}_1[w[\mathbf{m}]], \mathcal{H}_2[w[\mathbf{m}]]\}_{\hat{B}_1}. \quad (8)$$

Следовательно, левая часть формулы (8) билинейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби. Кроме того, она измеряет скорость эволюции интегралов w вдоль нётеровой симметрии уравнения $\mathcal{E}_L$. Поскольку эволюционные дифференцирования перестановочны с полной производной D_y , скорость $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}_{\hat{A}_k}$ лежит в ядре $\ker D_y|_{\mathcal{E}_L}$, а значит, плотность полученного функционала – дифференциальная функция минимальных интегралов w .

Многокомпонентное волновое уравнение $\mathcal{E}_\varnothing = \{s_{xy} = 0\}$, симметрии которого содержат иерархию $\mathfrak{A}$ и такое, что условие $\hat{A}_1 = (\ell_w^{(s)})^*$ задает дифференциальную связь между координатами s и импульсами w для уравнения $\mathcal{E}_\varnothing$, выбирается следующим образом. Нужно, чтобы первая структура $A_1 = \hat{A}_1^{-1}$ для иерархии $\mathfrak{A}$ факторизовала высшую гамильтонову структуру для $\mathfrak{B}$. Таким образом, имеем $B_{k'} = \square \circ A_1 \circ \square^*$, где $k' = k'(\square, (\ell_w^{(s)})^*) \geq 2$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим двумерную лагранжеву систему Тоды (1). Плотность L ее лагранжиана имеет вид

$$L = -\frac{1}{2}((2u_x - v_x)u_y + (2v_x - u_x)v_y) - e^{2u-v} - e^{2v-u}.$$

Соответственно определим импульсы формулами $\mathbf{m}^1 := 2u_x - v_x$, $\mathbf{m}^2 := 2v_x - u_x$, а затем выразим через них интегралы: $w = w[\mathbf{m}]$. Все симметрии уравнения (1) имеют вид (с точностью до $x \leftrightarrow y$) $\varphi = \square(\phi(x, [w^1], [w^2]))$, где $\phi = {}^t(\phi_1, \phi_2)$ – пара произвольных функций, $\square$ – матричный (размера 2×2) оператор в полных производных, который имеет вид

$$\square = \ell_{w^1, w^2}^{(\mathbf{m}^1, \mathbf{m}^2)} = \begin{pmatrix} u_x + D_x & -\frac{2}{3}D_x^2 - u_x D_x - \frac{1}{3}u_x^2 - \frac{2}{3}u_x v_x + \frac{2}{3}v_x^2 + \frac{1}{3}u_{xx} - \frac{2}{3}v_{xx} \\ v_x + D_x & -\frac{1}{3}D_x^2 + \frac{2}{3}u_{xx} - \frac{1}{3}v_{xx} - \frac{2}{3}u_x^2 + \frac{2}{3}u_x v_x + \frac{1}{3}v_x^2 \end{pmatrix}.$$

¹⁾В большинстве случаев получается одна из высших структур для иерархии $\mathfrak{A}$, на что мы указываем наличием нижнего индекса $k = k(\square, \mathbf{m}) \geq 2$. Выбор “младшего” оператора $\hat{A}_1$ для $\mathfrak{A}$ будет обсуждаться ниже.

Компоненты возникающего гамильтонова оператора $\hat{A}_2 = \|A_{ij}, 1 \leq i, j \leq 2\|$ получаются следующими [13]:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2D_x^3 + 2w^1 D_x + w_x^1, \\ A_{12} &= -D_x^4 - w^1 D_x^2 + (3w^2 - 2w_x^1) D_x + (2w_x^2 - w_{xx}^1), \\ A_{21} &= D_x^4 + w^1 D_x^2 + 3w^2 D_x + w_x^2, \\ A_{22} &= -\frac{2}{3} D_x^5 - \frac{4}{3} w^1 D_x^3 - 2w_x^1 D_x^2 + \left(2w_x^2 - 2w_{xx}^1 - \frac{2}{3} (w^1)^2\right) D_x + \\ &\quad + \frac{1}{3} (3w_{xx}^2 - 2w_{xxx}^1 - 2w^1 w_x^1). \end{aligned}$$

Сдвиг $w^2 \mapsto w^2 + \lambda$ второго интеграла порождает “младший” гамильтонов оператор²⁾

$$\hat{A}_1^{(2)} := \left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} (\hat{A}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 3D_x \\ 3D_x & 0 \end{pmatrix},$$

который согласован с $\hat{A}_2$.

Пара $(\hat{A}_1^{(2)}, \hat{A}_2)$ – это и есть бигамильтонова структура для уравнения Буссинеска

$$w_t^1 = 2w_x^2 - w_{xx}^1, \quad w_t^2 = -\frac{2}{3} w_{xxx}^1 - \frac{2}{3} w^1 w_x^1 + w_{xx}^2.$$

Симметрия $w_x = (\hat{A}_2 \circ \delta / \delta w)(\int w^1 dx)$ начинает вторую последовательность гамильтоновых потоков в иерархии $\mathfrak{A}$ уравнения Буссинеска. Модифицированная иерархия Буссинеска $\mathfrak{B}$ наследует обе последовательности гамильтонианов от $\mathfrak{A}$ при помощи подстановки Миуры $w = w[\mathfrak{m}]$, где учтено $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}[u]$. Именно, для любого гамильтониана $\mathcal{H}[w]$ потоки $u_\tau = \delta \mathcal{H}[\mathfrak{m}] / \delta \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_\tau = -\delta \mathcal{H}[\mathfrak{m}[u]] / \delta u$ принадлежат модифицированной иерархии $\mathfrak{B}$. Скорости u_τ образуют коммутативную подалгебру нётеровых симметрий двумерной цепочки Тоды (1).

3. КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ В $\text{sym } \mathcal{E}_L$

В этом разделе будет установлена замкнутость образов операторов (3) относительно коммутирования, доказательство базируется на хорошо известном аналогичном свойстве вспомогательных гамильтоновых операторов (7). Одновременно будут описаны коммутационные соотношения в алгебре симметрий вида (5) уравнения $\mathcal{E}_L$.

Для начала рассмотрим произвольный линейный оператор A в полных производных, аргументами $\phi(x, [w]) = {}^t(\phi_1, \dots, \phi_r)$ которого служат вариационные ковекторы для расслоения бесконечных струй над ξ . Допустим, что образ оператора A в алгебре Ли эволюционных векторных полей ∂_φ замкнут относительно коммутирования: $[\text{im } A, \text{im } A] \subseteq \text{im } A$. Согласно правилу Лейбница в скобке полей $A(\phi')$, $A(\phi'')$, принадлежащих образу оператора A , появляются два вида слагаемых:

$$[A(\phi'), A(\phi'')] = A(\partial_{A(\phi')}(\phi'') - \partial_{A(\phi'')}(\phi')) + (\partial_{A(\phi')} (A)(\phi'') - \partial_{A(\phi'')} (A)(\phi')).$$

²⁾ Аналогичный ему оператор $\hat{A}_1^{(1)} = \left. \frac{d}{d\mu} \right|_{\mu=0} (\hat{A}_k)$, где $w^1 \mapsto w^1 + \mu$, оказывается негамильтоновым.

В первом слагаемом использована перестановочность эволюционных дифференцирований и полных производных. Второе слагаемое попадает в образ оператора A по построению.

Коммутатор $[\cdot, \cdot]_{\text{im } A}$ индуцирует структуру алгебры Ли $[\cdot, \cdot]_A$ в факторе $\Omega(\xi_\pi)$ области определения оператора A по его ядру:

$$[A(\phi'), A(\phi'')] = A([\phi', \phi'']_A), \quad \phi', \phi'' \in \Omega(\xi_\pi). \quad (9a)$$

Эта скобка, определенная с точностью до $\ker A$, равняется

$$[\phi', \phi'']_A = \partial_{A(\phi')}(\phi'') - \partial_{A(\phi'')}(\phi') + \{\{\phi', \phi''\}\}_A. \quad (9b)$$

Она содержит два стандартных слагаемых и кососимметричную билинейную скобку $\{\{\cdot, \cdot\}\}_A$.

ЛЕММА 2 [13], [14]. Образ гамильтонова оператора $\hat{A} = \|\sum_{\tau} A_{\tau}^{ij}(x, [w]) \cdot D_{\tau}\|$ замкнут относительно коммутирования; k -я компонента, $1 \leq k \leq r$, возникающей на области определения оператора $\hat{A}$ скобки $\{\{\cdot, \cdot\}\}_{\hat{A}}$ вычисляется по формуле

$$\{\{\phi', \phi''\}\}_{\hat{A}}^k = \sum_{|\sigma| \geq 0} \sum_{i=1}^r (-1)^{|\sigma|} \left(D_{\sigma} \circ \left[\sum_{|\tau| \geq 0} \sum_{j=1}^r D_{\tau}(\phi'_j) \cdot \frac{\partial A_{\tau}^{ij}}{\partial w_{\sigma}^k} \right] \right) (\phi''_i). \quad (10)$$

Коэффициенты билинейных по ϕ', ϕ'' слагаемых в скобке $\{\{\cdot, \cdot\}\}_{\hat{A}}$ – дифференциальные функции переменных x .

Перейдем теперь от рассмотрения гамильтоновых операторов (7) к операторам $\square$, имеющим ту же самую область определения, что и $\hat{A}_k$, но со значениями в другой алгебре Ли. Наш основной результат состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 2. Пусть на открытом всюду плотном подмножестве лагранжевой системы $\mathcal{E}_L = \{\mathbf{u}_{xy} = f(\mathbf{u}; x, y)\}$ ливиллева типа (см. утверждение 1) выполнены следующие предположения³⁾:

а) постоянная симметричная вещественная матрица k в кинетическом слагаемом плотности лагранжиана $\mathcal{L}$ обратима;

б) линеаризация $\ell_f^{(u)} = \|\partial f^i / \partial u^j\| \equiv f'(\mathbf{u}; x, y)$ правой части уравнения $\mathcal{E}_L$ – обратимая матрица;

в) имеется ровно столько интегралов $w^i(x, [\mathbf{m}]) \in \ker D_y|_{\mathcal{E}_L}$, сколько в системе неизвестных u^j ;

г) интегралы w минимальны: из $\Phi \in \ker D_y|_{\mathcal{E}_L}$ следует $\Phi = (x, [w])$;

д) интегралы w дифференциально-функционально независимы⁴⁾, в том смысле, что $\Phi(x, [w[\mathbf{m}]]) = 0$ означает $\Phi \equiv 0$;

е) матрица $\Lambda = \|\partial w^i / \partial \mathbf{m}_{d(i)}^j\|$ размера $r \times t$, в которой $d(i) := \text{ord}_x w^i$ – дифференциальный порядок i -го интеграла $w^i[\mathbf{m}]$, обратима (т. е. имеет максимальный ранг).

³⁾Список предположений может быть не минимальным, но в приведенной формулировке оказывается удобнее проверять каждое из них по отдельности.

⁴⁾Несуществование нетривиальной функции Φ и, следовательно, ее ненулевой линеаризации $\ell_{\Phi}^{(m)} = \ell_{\Phi}^{(w)} \circ \ell_w^{(m)}$ эквивалентно импликации $(\nabla \circ \ell_w^{(m)}) = 0$, где $\nabla = \ell_{(\cdot)}^{(m)} \Rightarrow \nabla = 0$. В этой форме требование невырожденности двойственно к (12) (см. ниже).

Тогда верны следующие утверждения:

- 1) образ оператора (3) замкнут относительно коммутирования симметрий $\varphi = \square(\phi(x, [w])) \in \text{sym } \mathcal{E}_L$;
- 2) скобка $\{\{\cdot, \cdot\}\}_\square$, возникающая на области определения оператора $\square$, удовлетворяет равенству

$$\{\{\phi', \phi''\}\}_\square = \{\{\phi', \phi''\}\}_{\hat{A}_k}, \quad \phi', \phi'' \in \Omega(\xi_\pi); \quad (11)$$

- 3) коэффициенты при билинейных слагаемых в скобке $\{\{\cdot, \cdot\}\}_\square$ – дифференциальные функции интегралов w .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из первого предположения теоремы следует, что система $\mathcal{E}_L$ определена, нормальна и ℓ -нормальна (см. раздел 4). Подчеркнем, что система $\mathcal{E}_L$ – это по предположению и есть все множество уравнений, налагаемых на сечения $u = s(x, y) \in \Gamma(\pi)$.

Второе утверждение теоремы означает, что неоднозначность (по модулю $\ker \hat{A}_k$) выбора представителя из класса эквивалентности $\{\{\phi', \phi''\}\}_{\hat{A}_k}$ в правой части равенства (11) сводится к выбору элемента из $\ker \square \subseteq \ker \hat{A}_k$. Мы докажем совпадение ядер для всех $\phi([w]) \in \Omega(\xi_\pi)$. Отсюда следует, что коммутационные соотношения в $\text{sym } \mathcal{E}_L$, порожденные структурой алгебры Ли (96) на $\Omega(\xi_\pi)$, удастся выписать явно с помощью формулы (10) для $\hat{A}_k$.

Будучи следствием леммы 2 и первых двух утверждений теоремы 2, третье утверждение является в то же время частным случаем утверждения 2 (см. ниже).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Прежде всего заметим, что симметрии (5) не зависят ни от u , ни от $u_y, u_{yy}, \dots$. Значит, это верно также и для коммутатора $\varphi = [\varphi', \varphi''] \in \text{sym } \mathcal{E}_L$ двух таких симметрий $\varphi' = \square(\phi'(x, [w]))$ и $\varphi'' = \square(\phi''(x, [w]))$, поскольку скобка Ли – локальный бидифференциальный оператор.

Факторизация (7) и лемма 2 представимы в виде диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 & \dot{w} = \Phi(x, [w]) & \xleftarrow{\quad} & [\phi', \phi'']_{\hat{A}_k} & \\
 & \nearrow \ell_w^{(m)} & & \nwarrow \hat{A}_k & \\
 \dot{m} = \psi(x, [m]) & & \circlearrowleft & & \phi = \phi(x, [w]). \\
 & \nwarrow \hat{B}_1 = \ell_m^{(u)} & & \nearrow \square & \\
 & \dot{u} = \varphi(x, [u_x]) & & &
 \end{array}$$

Коммутатор $\varphi = [\varphi', \varphi'']$ задает скорость $\Phi(x, [w])$ интегралов, равную ⁵⁾ $\partial_{[\varphi', \varphi'']}(w) = [\hat{A}_k(\phi'), \hat{A}_k(\phi'')]$. Так как образ гамильтонова оператора $\hat{A}_k$ замкнут относительно коммутирования, мы получаем класс эквивалентности $\phi(x, [w]) = [\phi', \phi'']_{\hat{A}_k}$ сечений таких, что $\Phi = \hat{A}_k(\phi) = \partial_{\square(\phi)}(w)$. По построению оператора $\hat{A}_k$ коммутатор

⁵⁾Из ℓ -нормальности уравнения $\mathcal{E}_L$ вытекает, что коммутатор φ является его симметрией всякий раз, когда скорость $\partial_\varphi(w)$ минимальных интегралов лежит в ядре $\ker D_y|_{\mathcal{E}_L}$ (см. ниже формулу (16)).

симметрий φ' и φ'' принадлежит множеству симметрий вида $\square(\phi)$. Это доказывает первое утверждение теоремы.

Вместе с тем таких сечений $\varphi = \square(\phi)$, индуцирующих одну и ту же скорость $\dot{w} = \Phi$, вообще говоря, может оказаться много. Поскольку $\ker \square \subseteq \ker \hat{A}_k$, то в принципе класс эквивалентности $[\phi', \phi'']_{\hat{A}_k}$ может содержать элементы, которые не принадлежат множеству $[\phi', \phi'']_{\square}$.

Продemonстрируем, что все представители класса эквивалентности $[\phi', \phi'']_{\hat{A}_k}$ определяют одну и ту же симметрию φ уравнения $\mathcal{E}_L$, и, следовательно, именно симметрия $\varphi = \square(\phi)$ и есть коммутатор $[\square(\phi'), \square(\phi'')]$ двух исходных симметрий, поскольку образ множества сечений ϕ при отображении $\square$ обязан ее содержать. Нам достаточно доказать единственность тривиального решения φ для линейного однородного уравнения $\ell_w^{(u)}(\varphi) = (\ell_{w[m]}^{(m)} \circ \ell_m^{(u)})(\varphi) = 0$.

Имеется три способа получить нулевую скорость $\Phi(x, [w]) \equiv 0$ интегралов $w[m[u]]$ вдоль симметрии $\varphi \in \text{sym } \mathcal{E}_L$. Первая возможность – если бы интегралы были дифференциально зависимы – исключается предположением теоремы. Вторая возможность – промежуточное уравнение $\kappa \cdot D_x(\varphi) = 0$, $\det \kappa \neq 0$, может иметь нетривиальные решения, только если какой-то из сдвигов $\varphi = \text{const}$ окажется симметрией уравнения $\mathcal{E}_L$. Однако в этом случае определяющее уравнение

$$(D_x D_y - f'(\mathbf{u}; x, y))(\text{const}) \doteq 0,$$

выполненное для систем $\mathcal{E}_L$, означало бы линейную зависимость между дифференциалами правых частей входящих в нее уравнений, что противоречит другому исходному предположению.

Следовательно, доказательство второго утверждения сводится к задаче единственности нулевого решения $\psi = 0$ линейного однородного уравнения $\ell_{w[m]}^{(m)}(\psi) = 0$. Поскольку система $\mathcal{E}_L$ – единственный набор⁶⁾ дифференциальных соотношений, налагаемых на сечения $u = s(x, y) \in \Gamma(\pi)$, нуль в правой части уравнения $\ell_w^{(m)}(\psi) = 0$ достигается тождественно по $[m]$ (иначе систему $\mathcal{E}_L$ потребовалось бы переопределить).

Остаются две ситуации, когда скорость ψ импульсов $m = -\kappa u_x/2$ обращает величину $\dot{w} = \Phi$ в нуль. Одна из причин очевидна: достаточно использовать само уравнение $\mathcal{E}_L = \{u_{xy} = f\}$. В самом деле, если “временем” вдоль потока $\dot{m} = \psi$ служит переменная y , а $m_y = -\delta H_L/\delta u$, то имеем $\partial_{m_y}^{(m)}(w) = D_y(w[m]) \doteq 0$ на $\mathcal{E}_L$. Однако присутствие переменных $\mathbf{u}$ в списке аргументов функции f исключает из дальнейшего рассмотрения такие решения ψ .

Без ограничения общности предположим, что интеграл $w^r[m]$ имеет наивысший дифференциальный порядок: $d(r) \geq d(i)$ при всех $i < r$. Вычислим скорости неминимальных интегралов $(w')^i := D_x^{d(r)-d(i)}(w^i)$. Используя перестановочность $[D_x, \partial_\psi^{(m)}] = 0$ эволюционных дифференцирований с полными производными, из тождеств $\partial_\psi^{(m)}(w^1) = \dots = \partial_\psi^{(m)}(w^r) = 0$ получим, что $\partial_\psi^{(m)}(w') = 0$. Видно, что линеаризация новых интегралов имеет вид $\ell_{w'}^{(m)} = \Lambda \cdot D_x^{d(r)} + O(d(r) - 1)$, причем

⁶⁾ Гиперболическая система $\mathcal{E}_L$ формально интегрируема [12]: ее бесконечное продолжение $\mathcal{E}_L^\infty$ существует и имеется эпиморфизм $\mathcal{E}_L^\infty \rightarrow \mathcal{E}_L$.

матрица Λ обратима по исходному предположению теоремы. Умножая новое уравнение $\ell_{w'}^{(m)}(\psi) = 0$ на Λ^{-1} , мы по индукции доказываем, что $\psi(x, [\mathbf{m}])$ не зависит от $[\mathbf{m}]$, и поэтому $\psi = \psi(x)$. Следовательно, все допустимые сечения φ , удовлетворяющие промежуточному уравнению $\psi(x) = -\kappa D_x(\varphi)/2$, также зависят лишь от x : $\varphi = \varphi(x)$. Но ни одно из них, кроме нуля, не может быть симметрией гиперболической системы $u_{xy} - f(\mathbf{u}; x, y) = 0$ вследствие невырожденности⁷⁾, поскольку $\det f'(\mathbf{u}) \neq 0$. “Симметрия” $\varphi(x)$ в наших обозначениях должна удовлетворять определяющему уравнению $(D_x \circ D_y - f'(\mathbf{u}))\varphi(x) \doteq 0$ в силу $\mathcal{E}_L$. Первое слагаемое обращается в нуль, так как $D_y(x) \equiv 0$. Значит, $f'(u) \cdot \varphi(x) = 0$, однако матрица линеаризации $f'(\mathbf{u})$ обратима. Итак, $\varphi(x) \equiv 0$. Прделанное рассуждение завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В приведенном выше доказательстве мы пришли к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению $\ell_w^{(m)}(\psi(x)) = 0$, выполненному одновременно для всех сечений $s \in \Gamma(\pi)$, хотя ненулевые решения $\psi(x)$ и не вносят вклада в алгебру симметрий. Существование нетривиальных решений возможно, прежде всего, если существует оператор ∇ в полных производных такой, что $\ell_w^{(m)} \circ \nabla = 0$. (К примеру, тождество $\begin{pmatrix} D_x & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -D_x \end{pmatrix} (h(x)) \equiv 0$ выполнено для всех $h(x)$.) Чтобы избежать этого, необходимо потребовать *невырожденности* линеаризации интегралов:

$$\ell_{w[\mathbf{m}]}^{(m)} \circ \nabla = 0 \implies \nabla = 0. \quad (12)$$

В сопряженной форме, $\nabla^* \circ \square = 0 \implies \nabla^* = 0$, уравнение (12) выражает отсутствие линейных дифференциальных соотношений⁸⁾ между компонентами симметрий $\varphi = \square(\phi(x, [w]))$.

Указанное свойство двойственно к невырожденности $\nabla \circ \ell_w^{(m)} = 0 \implies \nabla = 0$, проистекающей из дифференциально-функциональной независимости $\Phi(x, [w]) = 0 \implies \Phi \equiv 0$, если положить $\nabla = \ell_w^*$ (см. сноску 4).

Наконец, пусть сечение $s(x, y) \in \text{Sol } \mathcal{E}_L$ – некоторое решение интегрируемой по Дарбу системы $\mathcal{E}_L$ лиувиллева типа. Взяв ограничение $\mathcal{L}^s = \ell_w^{(m)}|_{j_\infty(s)}$ оператора линеаризации на струю сечения s , мы приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению $\mathcal{L}^s(\psi(x)) = 0$. Для каждого s линейное пространство $\mathcal{O}(s)$ его решений конечномерно. (В частности, эта размерность равна сумме показателей полупростой комплексной алгебры Ли, если $\mathcal{E}_L$ – ассоциированная с ней двумерная цепочка Тоды.) Следовательно, требование

$$\bigcap_{s \in \text{Sol } \mathcal{E}_L \subset \Gamma(\pi)} \mathcal{O}(s) = \{0\}$$

в сочетании с (12) позволяет устранить избыточную свободу в выборе решений $\psi(x)$ уравнения $\ell_w^{(m)}(\psi) = 0$.

⁷⁾ Это утверждение – непосредственное, проверяемое в каждой точке x обобщение того факта (см. выше), что $\varphi = \text{const} \neq 0$ не является симметрией уравнения $\mathcal{E}_L$.

⁸⁾ Отсюда следует, что невырожденность – уравнение (12) – аналогична понятию ℓ -нормальности дифференциальных уравнений, возникающему при анализе их формальной интегрируемости (см. раздел 4).

Теорема 2 была иллюстрирована на примерах полупростых комплексных алгебр Ли ранга 2 в работе [16], где выписаны гамильтоновы операторы $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_k$ для соответствующих иерархий Дринфельда–Соколова [11], а затем вычислены коммутационные соотношения в $\text{sum } \mathcal{E}_L$ для двумерных цепочек Тоды $u_{xy} = e^{Ku}$.

ПРИМЕР 3 (модифицированное уравнение Каупа–Буссинеска). Рассмотрим лагранжево расширение скалярного уравнения Лиувилля [15]:

$$A_{xy} = -\frac{1}{8} A e^{-B/4}, \quad B_{xy} = \frac{1}{2} e^{-B/4}. \quad (13)$$

Обозначим импульсы как $a = B_x/2$ и $b = A_x/2$. Минимальные интегралы системы (13) суть $w_1 = -a^2/4 - a_x$ и $w_2 = ab + 2b_x$, так что $D_y(w_i) \doteq 0$, $i = 1, 2$, в силу (13). Поэтому оператор

$$\square = (\ell_{w_1, w_2}^{(a, b)})^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} B_x + D_x & \frac{1}{2} A_x \\ 0 & \frac{1}{2} B_x - 2D_x \end{pmatrix}$$

порождает нётеровы (см. (4)) симметрии уравнения (13). Скобка $\{\{\cdot, \cdot\}\}_{\square}$, индуцированная на области определения оператора $\square$, имеет вид

$$\{\{\psi, \chi\}\}_{\square} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_x^2 \chi^1 - \psi^1 \chi_x^2 + \psi_x^1 \chi^2 - \psi^2 \chi_x^1 \\ \psi_x^2 \chi^2 - \psi^2 \chi_x^2 \end{pmatrix},$$

где $\psi = {}^t(\psi^1, \psi^2)$ и $\chi = {}^t(\chi^1, \chi^2)$.

Рассмотрим симметрию уравнения (13):

$$A_t = \frac{1}{2} A_x A_{xx} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} A_x^2 - 1 \right) B_x, \quad B_t = -2A_{xxx} + \frac{1}{8} A_x B_x^2 - \frac{1}{2} A_x B_{xx}. \quad (14)$$

Выберем эквивалентную пару интегралов $u = w_2$, $v = w_1 + w_2^2/4$. Эволюция переменных u и v вдоль (14) задана уравнениями

$$u_t = uu_x + v_x, \quad v_t = (uv)_x + u_{xxx}. \quad (15)$$

Мы получили систему Каупа–Буссинеска, а (14) – потенциальное дважды модифицированное уравнение Каупа–Буссинеска (см. [22]). Правая часть интегрируемой системы (14) принадлежит образу сопряженной линеаризации $\tilde{\square} = (\ell_{(u, v)}^{(a, b)})^*$. Оператор $\tilde{\square}$ факторизует третью гамильтонову структуру $\hat{A}_3^{\text{KB}} = \tilde{\square}^* \circ (\ell_{(a, b)}^{(A, B)})^* \circ \tilde{\square}$ для уравнений (15); итак, $k = 3$ и

$$\hat{A}_3^{\text{KB}} = \begin{pmatrix} uD_x + \frac{1}{2} u_x & D_x^3 + \left(\frac{1}{4} u^2 + v \right) D_x + \frac{1}{4} (u^2 + 2v)_x \\ D_x^3 + \left(\frac{1}{4} u^2 + v \right) D_x + \frac{1}{2} v_x & uD_x^3 + \frac{3}{2} u_x D_x^2 + \left(\frac{3}{2} u_{xx} + uv \right) D_x + \frac{1}{2} u_{xxx} + \frac{1}{2} (uv)_x \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 2 скобка $\{\{\cdot, \cdot\}\}_{\square}$ равна скобке $\{\{\cdot, \cdot\}\}_{\hat{A}_3^{\text{KB}}}$, заданной формулой (10). Тем самым имеем

$$\{\{\psi, \chi\}\}_{\square} = \{\{\psi, \chi\}\}_{\hat{A}_3^{\text{KB}}} = \begin{pmatrix} \psi \cdot \nabla_1(\chi) - \nabla_1(\psi) \cdot \chi \\ \psi \cdot \nabla_2(\chi) - \nabla_2(\psi) \cdot \chi \end{pmatrix},$$

где

$$\nabla_1 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_x & 0 \\ uD_x & D_x^3 + vD_x \end{pmatrix}, \quad \nabla_2 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & D_x \\ D_x & uD_x \end{pmatrix}.$$

Оператор $\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & D_x \\ D_x & 0 \end{pmatrix}$ – первая гамильтонова структура для уравнений (15), обратный к нему оператор $A_1 = \hat{A}_1^{-1}$ факторизует вторую гамильтонову структуру $B_2 = \square \circ A_1 \circ \square$ уравнения (14).

4. НЕЛАГРАНЖЕВЫ СИСТЕМЫ ЛИУВИЛЛЕВА ТИПА

Пусть $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ – система лиувиллева типа, но не обязательно Эйлера–Лагранжа. Предположим, что столбец $w \in \ker D_y|_{\mathcal{E}}$ состоит из минимальных интегралов уравнения $\mathcal{E}$, а потому $D_y(w) = \nabla(F)$ для некоторого оператора ∇ . Из структуры систем лиувиллева типа $\mathcal{E}$ ясно, что между входящими в них гиперболическими уравнениями $\{F^i = 0\}$ не может существовать дифференциальных связей (*сизигий*): из предположения $\Delta(F) = 0$ следует, что $\Delta = 0$. По той же причине системы $\mathcal{E}$ являются ℓ -нормальными [12], [14]: если $\Delta \circ \ell_F \doteq 0$ на $\mathcal{E}$, то также имеем $\Delta = 0$. Следовательно, эволюционное векторное поле ∂_φ будет симметрией системы лиувиллева типа $\mathcal{E}$ в том и только том случае, если оно сохраняет интегралы:

$$D_y(\partial_\varphi(w)) = \partial_\varphi(\nabla(F)) + \nabla(\partial_\varphi(F)) \doteq \nabla(\ell_F(\varphi)) \quad \text{на } \mathcal{E}. \quad (16)$$

Рассмотрим операторное уравнение

$$D_y \circ \ell_w^{(u)} \doteq \nabla \circ \ell_F \quad \text{на } \mathcal{E}.$$

Если, предположим, удалось бы построить такой оператор $\square$ в полных производных, что

$$\ell_w^{(u)} \circ \square \in \mathcal{C} \text{Diff}(\ker D_y|_{\mathcal{E}} \rightarrow \ker D_y|_{\mathcal{E}}), \quad (17)$$

то всякому r -компонентному набору $\phi(x, [w])$ интегралов (см. (5)) он ставил бы в соответствие симметрию $\varphi = \square(\phi)$ системы $\mathcal{E}$ лиувиллева типа.

В работе [10] содержится алгоритм построения операторов $\square$ – решений уравнения в полных производных

$$\ell_w^{(u)} \circ \square = \mathbf{1}_{m \times m} \cdot D_x^k \quad \text{mod } \mathcal{C} \text{Diff}_{<k}(\ker D_y|_{\mathcal{E}} \rightarrow \ker D_y|_{\mathcal{E}}). \quad (18)$$

Наиболее примечательно, что обрыв снизу в последовательности коэффициентов при степенях производных в операторах $\square$ следует из существования полного набора интегралов $\bar{w} \in \ker D_x|_{\mathcal{E}}$ для системы $\mathcal{E}$. Впрочем, минимальные интегралы w приходится “портить” дифференцированием по x подходящее число раз. В результате вместо гамильтонова оператора $\hat{A}_k = \ell_w^{(u)} \circ \square$ (см. (7)) получается правая часть

уравнения (18). Кроме того, оказывается, что образы построенных в работе [10] операторов не всегда порождают всю x -компоненту алгебры Ли $\text{sum } \mathcal{E}$ целиком и, вообще говоря, не замкнуты относительно коммутирования. В заключение приходится признать, что при обратимых заменах $\tilde{w}[w]$ интегралов нелагранжевых систем Лиувиллева типа правила преобразования сечений, принадлежащих области определения операторов $\square$, остаются не определены.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если образ решения $\square$ операторного уравнения (17) для системы Лиувиллева типа $\mathcal{E}$ замкнут относительно коммутирования, то все коэффициенты скобки $\{\{\cdot, \cdot\}\}_{\square}$, возникающей на его области определения (см. (9)), лежат в ядре $\ker D_y|_{\mathcal{E}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению имеем $(D_y \circ \ell_w^{(u)} \circ \square)([\phi', \phi'']_{\square}) \doteq 0$ для всех $\phi', \phi''(x, [w])$. Распишем это равенство подробнее:

$$0 \doteq (D_y \circ \ell_w^{(u)} \circ \square)(\partial_{\square(\phi')}(\phi'') - \partial_{\square(\phi'')}(\phi') + \{\{\phi', \phi''\}\}_{\square}) \doteq (\ell_w^{(u)} \circ \square)(D_y(\{\{\phi', \phi''\}\}_{\square})),$$

поскольку подчеркнутая композиция удовлетворяет условию (17). Ясно, что производные $D_y(\phi')$ и $D_y(\phi'')$ обращаются в нуль на $\mathcal{E}$ для любых ϕ', ϕ'' . По тем же причинам не только вся скобка $\{\{\phi', \phi''\}\}_{\square}$, но и каждый из коэффициентов, стоящих при билинейных слагаемых в ней, лежит в ядре $\ker D_y|_{\mathcal{E}}$.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим параметрическое расширение скалярного уравнения Лиувилля:

$$\mathcal{E}(\varepsilon) = \{u_{xy} = e^{2u} \sqrt{1 + 4\varepsilon^2 u_x^2}\}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Это уравнение является объемлющим для иерархии уравнения, представляющего собой деформацию по Гарднеру потенциального модифицированного уравнения КдФ (см. [15]). Контракция $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\varepsilon, [u(\varepsilon)])$ из (19) в нерасширенное уравнение $\mathcal{U}_{xy} = e^{2\mathcal{U}}$ задана формулой $\mathcal{U} = u + \frac{1}{2} \text{arcsch}(2\varepsilon u_x)$; если подставить ее в интеграл $w = \mathcal{U}_x^2 - \mathcal{U}_{xx}$ при $\varepsilon = 0$, получится интеграл третьего порядка для уравнения (19). Вместе с тем регуляризованный (при $\varepsilon = 0$) интеграл меньшего (второго) порядка для уравнения (19) имеет вид

$$w = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\varepsilon^2 u_x^2}}{2\varepsilon^2} + \frac{u_{xx}}{\sqrt{1 + 4\varepsilon^2 u_x^2}}. \quad (20)$$

Второй интеграл для уравнения (19) есть $\bar{w} = u_{yy} - u_y^2 - \varepsilon^2 e^{4u} \in \ker D_x|_{\mathcal{E}(\varepsilon)}$. Операторы

$$\begin{aligned} \bar{\square} &= u_y + \frac{1}{2} D_y, \\ \square &= \frac{1}{2} (1 + 4\varepsilon^2 u_x^2 - 2\varepsilon^2 u_{xx}) D_x + u_x + 4\varepsilon^2 u_x^3 - 2\varepsilon^2 u_{xxx} + \frac{12\varepsilon^4 u_x u_{xx}^2}{1 + 4\varepsilon^2 u_x^2} \end{aligned} \quad (21)$$

отображают интегралы уравнения (19) в его симметрии, $\varphi = \square(\phi(x, [w]))$ и $\bar{\varphi} = \bar{\square}(\bar{\phi}(y, [\bar{w}]))$.

Образ каждого из операторов $\square$ и $\bar{\square}$ – подалгебра Ли в $\text{sym } \mathcal{E}(\varepsilon)$. Скобка $\{\{p, q\}\}_{\bar{\square}} = p_y q - p q_y$ для $\bar{\square}$ записывается в привычном виде [3], [9]. А скобка, индуцированная на области определения оператора $\square$, имеет следующий вид: для любых аргументов p, q получаем

$$\begin{aligned} \{\{p, q\}\}_{\square} = & \varepsilon^2(p_{xx}q_x - p_xq_{xx}) - 2\varepsilon^2(p_{xxx}q - pq_{xxx}) - \\ & - 12\varepsilon^4(8\varepsilon^2u_x^3u_{xx} - 4\varepsilon^2u_x^2u_{xxx} + 4\varepsilon^2u_xu_{xx}^2 + 2u_xu_{xx} - u_{xxx}) \times \\ & \times (1 + 8\varepsilon^2u_x^2 + 16\varepsilon^4u_x^4 - 2\varepsilon^2u_{xx} - 8\varepsilon^4u_x^2u_{xx})^{-1}(p_{xx}q - pq_{xx}) + \\ & + (1 + 288\varepsilon^4u_x^4 - 288\varepsilon^4u_x^2u_{xx} + 28\varepsilon^2u_x^2 - 16\varepsilon^2u_{xx} - 288\varepsilon^6u_xu_{xx}u_{xxx} - \\ & - 96\varepsilon^6u_{xx}^3 + 3072\varepsilon^{10}u_x^{10} + 24\varepsilon^6u_{xxx}^2 + 24\varepsilon^4u_{4x} + 1408\varepsilon^6u_x^6 + 3328\varepsilon^8u_x^8 - \\ & - 768\varepsilon^{10}u_{4x}u_{xx}u_x^4 - 384\varepsilon^8u_{4x}u_x^2u_{xx} - 2304\varepsilon^8u_x^3u_{xxx}u_{xxx} + 384\varepsilon^8u_{xx}^2u_xu_{xxx} - \\ & - 4608\varepsilon^{10}u_x^5u_{xx}u_{xxx} + 16\varepsilon^4u_{xx}^2 - 5632\varepsilon^8u_x^6u_{xx} - 1920\varepsilon^6u_{xx}u_x^4 + 3328\varepsilon^8u_x^4u_{xx}^2 + \\ & + 512\varepsilon^6u_{xx}^2u_x^2 + 384\varepsilon^{10}u_x^4u_{xxx}^2 - 960\varepsilon^{10}u_{xx}^4u_x^2 - 48\varepsilon^4u_xu_{xxx} - 3072\varepsilon^{10}u_x^7u_{xxx} + \\ & + 3072\varepsilon^{10}u_{xx}^3u_x^4 - 2304\varepsilon^8u_x^5u_{xxx} - 576\varepsilon^6u_{xxx}^3 + 288\varepsilon^6u_{4x}u_x^2 + 384\varepsilon^8u_x^2u_{xx}^3 + \\ & + 6144\varepsilon^{10}u_{xx}^2u_x^6 - 6144\varepsilon^{10}u_{xx}u_x^8 + 1152\varepsilon^8u_{4x}u_x^4 + 1536\varepsilon^{10}u_{4x}u_x^6 + 192\varepsilon^8u_{xxx}^2u_x^2 + \\ & + 240\varepsilon^8u_x^4u_{xx} + 1536\varepsilon^{10}u_{xx}^2u_x^3u_{xxx} - 48\varepsilon^6u_{4x}u_{xx}) \times \\ & \times (1 + 96\varepsilon^4u_x^4 + 256\varepsilon^6u_x^6 + 256\varepsilon^8u_x^8 + 4\varepsilon^4u_{xx}^2 - 48\varepsilon^4u_x^2u_{xx} + 32\varepsilon^6u_{xx}^2u_x^2 - \\ & - 4\varepsilon^2u_{xx} - 256\varepsilon^8u_x^6u_{xx} + 64\varepsilon^8u_x^4u_{xx}^2 - 192\varepsilon^6u_{xx}u_x^4 + 16\varepsilon^2u_x^2)^{-1}(p_xq - pq_x). \end{aligned}$$

Две подчеркнутые единицы соответствуют скобке $p_xq - pq_x$ на области определения оператора $\square = \mathcal{U}_x + D_x/2$, который задает симметрии уравнения Лиувилля $\mathcal{U}_{xy} = e^{2\mathcal{U}}$ при $\varepsilon = 0$. В соответствии с утверждением 2 непостоянные коэффициенты при билинейных слагаемых $p_{xx}q - pq_{xx}$ и $p_xq - pq_x$ в $\{\{p, q\}\}_{\square}$ принадлежат ядру $\ker D_y|_{\mathcal{E}(\varepsilon)}$. Примечательно следующее: поскольку все конструкции (19)–(21) содержат формальные степенные ряды $u(\varepsilon)$ по ε , той же природы оказываются и эти две рациональные функции. Попытка выразить их через w и производные w по x приводит к формальным рядам с неограниченным ростом дифференциальных порядков в коэффициентах.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Матричные операторы $\square = (\square^{i,j}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r)$, заданные формулой (3), являются (применительно к геометрии расслоений бесконечных струй) обобщениями тензоров типа $(2, 0)$. Мы дали определение этих операторов, учитывая наличие двух не связанных между собой групп дифференциальных подстановок на координатах в их области определения и, соответственно, в образе. С другой стороны, операторы $\square$ для систем лиувиллева типа $\mathcal{E}_L$ обобщают теорию гамильтоновых структур следующим образом: они отображают вариационные ковекторы для одного уравнения (напомним, что $\text{sym } \mathcal{E}_{\emptyset} \supset \mathfrak{A}$) в симметрии другой системы $\mathcal{E}_L$ (такой, что $\text{sym } \mathcal{E}_L \supset \mathfrak{B}$).

В отличие от работ [8], [10], здесь мы не пытаемся решить уравнение (17) относительно $\square$. Напротив, мы определили операторы (3), пользуясь геометрическими рассуждениями. Благодаря этому мы, во-первых, получили гамильтоновы операторы $\hat{A}_k = \ell_w^{(u)} \circ \square$ для иерархий типа КдФ на лагранжевых системах лиувиллева типа [9], [11] и, во-вторых, доказали, что образы операторов $\square$ инволютивны (см. [23]). Иными словами, был описан конструктивный алгоритм, назначение которого – порождение вполне интегрируемых уравнений.

Формулы (3) и (7) позволяют предсказать дифференциальный порядок оператора $\hat{A}_k$. Оценки порядков интегралов w для двумерных цепочек Тоды, ассоциированных с полупростыми комплексными алгебрами Ли $\mathfrak{g}$, известны из работы [2] (см. пример 1), в иных формулировках они содержатся в работах [4], [16]. Верхняя граница – числа $\text{ord}_x w^i - 1$ не превышают показателей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ – доказывается непосредственной проверкой (с использованием полиномов Шура) соотношений Серра $(\text{ad } Y_i)^{-K_j^i+1}(Y_j) = 0$, $i \neq j$, для образующих

$$Y_i = \sum_{k \geq 0} \exp\left(-\sum_{j=1}^m K_j^i u^j\right) \cdot D_x^k \left(\exp\left(\sum_{j'=1}^m K_{j'}^i u^{j'}\right) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial u_{k+1}^i}$$

характеристических алгебр Ли (см. [1], [2], [7], а также [16]) и применением теоремы Фробениуса. Здесь важно то, что векторные поля Y_i в точности совпадают с образующими Шевалле f_i полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Эта же оценка снизу следует из отсутствия соотношений, отличных от соотношений Серра, между образующими Y_i . Для систем корней A_n и D_n данный факт был установлен в работе [2] явным перечислением линейно независимых ненулевых итерированных коммутаторов.

Благодарности. Авторы благодарны Б. А. Дубровину, И. С. Красильщику, М. А. Нестеренко, П. Олверу, В. В. Соколову и Е. В. Ферাপонтову за обсуждения и высказанные замечания. Авторы признательны рецензентам за полезные советы. А. В. Киселев благодарит организационный комитет Международного совещания “Nonlinear Physics: Theory and Experiment V” за поддержку и гостеприимство. Настоящая работа была частично поддержана Европейским Союзом (грант FP6 Marie Curie RTN *ENIGMA* – контракт MRTN-CT-2004-5652), а также European Science Foundation Program MISGAM и грантами NWO B61-609 и VENI 639.031.623. Часть данного исследования была выполнена во время стажировок А. В. Киселева в IHÉS, SISSA и CRM (Монреаль), всем этим организациям благодарность за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **51**:1 (1982), 10–21.
- [2] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана*, Препринт Башкир. отд. АН СССР, Уфа, 1981.
- [3] А. В. Жибер, В. В. Соколов, *УМН*, **56**:1(337) (2001), 63–106.
- [4] А. М. Гурьева, А. В. Жибер, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 401–421.
- [5] A. N. Leznov, M. V. Saveliev, *Lett. Math. Phys.*, **3**:6 (1979), 489–494.
- [6] А. Г. Мешков, *ТМФ*, **63**:3 (1985), 323–332.
- [7] A. B. Shabat, *Phys. Lett. A*, **200**:2 (1995), 121–133.

- [8] Д. К. Демской, С. Я. Старцев, *Фундамент. и прикл. матем.*, **10**:1 (2004), 29–37.
- [9] А. В. Киселев, *ТМФ*, **144**:1 (2005), 83–93.
- [10] В. В. Соколов, С. Я. Старцев, *ТМФ*, **155**:2 (2008), 344–355.
- [11] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, “Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза”, Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Нов. достиж., **24**, ред. Р. В. Гамкрелидзе, ВИНТИ, М., 1984, 81–180.
- [12] А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (ред.), *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, Факториал, М., 1997.
- [13] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [14] J. Krasil’shchik, A. Verbovetsky, *Homological methods in equations of mathematical physics*, [arXiv: math.DG/9808130](#).
- [15] А. В. Киселев, *ТМФ*, **152**:1 (2007), 101–117.
- [16] A. V. Kiselev, J. W. van de Leur, *A geometric derivation of KdV-type hierarchies from root systems*, Proc. 4-th Int. Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (Protaras, Cyprus, 2008), 2009, 87–106; [arXiv: 0901.4866](#).
- [17] N. H. Ibragimov, A. V. Aksenov, V. A. Baikov, V. A. Chugunov, R. K. Gazizov, A. G. Meshkov, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 2. Applications in Engineering and Physical Sciences*, ed. N. H. Ibragimov, Boca Raton, FL, CRC Press, 1995.
- [18] С. Я. Старцев, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:7 (2006), 251–262.
- [19] В. В. Соколов, *УМН*, **43**:5(263) (1988), 133–163.
- [20] С. Я. Старцев, *ТМФ*, **116**:3 (1998), 336–348.
- [21] B. A. Kupershmidt, G. Wilson, *Invent. Math.*, **62**:3 (1980), 403–436.
- [22] M. Pavlov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **9**, suppl. 1 (2002), 173–191.
- [23] A. V. Kiselev, J. W. van de Leur, *Involutive distributions of operator-valued evolutionary vector fields. II*, [arXiv: 0904.1555](#).

Поступила в редакцию 26.02.2009,
после доработки 18.05.2009