Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Сакс, Глобальные решения уравнений Навье–Стокса в равномерно вращающемся пространстве, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 2, 196–215

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6464>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:57:46

© 2010 г.

Р. С. Сакс*

ГЛОБАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА В РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается задача Коши для системы уравнений Навье–Стокса в равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси трехмерном пространстве с условием периодичности по пространственным переменным. Исследование этой задачи базируется на разложении заданных и искомых вектор-функций в ряды Фурье по собственным функциям операторов ротора и Стокса. Методом Галеркина задача сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в рассматриваемом базисе имеет простой явный вид. Ее линейная часть диагональна, что позволяет выписать явно решения линейной системы Стокса–Соболева, которым соответствуют потоки жидкости с ненулевой завихренностью. На основании изучения нелинейного взаимодействия вихревых потоков найден подход, позволяющий получать семейства явных глобальных решений нелинейной задачи.

Ключевые слова: собственная функция и собственное значение, оператор ротора, оператор Стокса, система уравнений Навье–Стокса, метод Фурье, метод Галеркина.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена систематическому применению собственных функций оператора ротора к задаче поиска решений нелинейной системы уравнений Навье–Стокса в равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси трехмерном пространстве с условием периодичности по пространственным переменным.

Отдельные периодические собственные функции оператора ротора были известны и применялись давно, например в работах Арнольда [1], его учеников, Богоявленского и др. Можно упомянуть также монографию [2] и обзор [3]. В гидродинамике эти собственные функции называют полями Бельтрами [1], в астрофизике – бессилowymi полями (force-free magnetic fields), так как в них сила Лоренца равна нулю, или free-decay fields [4]. В физике плазмы такое поле называют еще тейлоровским [5] состоянием плазмы. Это состояние равновесия, в которое приходит плазма (при

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: romen-saks@yandex.ru

минимальной энергии) перед распадом. Изучая магнитно-гидродинамическую турбулентность, Монтгомери, Тернер и Вахала [6] выписали формулы для собственных функций оператора ротора в цилиндре (при ненулевых собственных значениях).

В 2000 г. автору удалось найти базис из периодических собственных функций оператора ротора в пространстве $L_2(Q)$ вектор-функций, интегрируемых с квадратом модуля в кубе Q (см. теорему 1 настоящей работы). В 2003 г. Ладыженская поставила задачу о явном вычислении собственных функций оператора Стокса в областях простейших форм (куб, шар и т.д.). Оказалось, что периодические собственные функции (v_k, p_k) оператора Стокса (отвечающие собственному значению $\nu|k|^2$) таковы, что $p_k = \text{const}$, а вектор-функции v_k совпадают с соленоидальными собственными вектор-функциями оператора ротора $u_k^\pm$ при $k \neq 0$ и u_0^j при $k = 0$ с собственными значениями $\pm|k|$ [7]. В случае шара также $p_n = \text{const}$, и каждая собственная вектор-функция v_n оператора Стокса (равная нулю на границе) представима как сумма собственных вектор-функций оператора ротора u_n^+ и u_n^- с одинаковыми по абсолютной величине, но разными по знаку собственными значениями, причем эти собственные функции на границе шара лежат в касательной плоскости и противоположно направлены [8].

В работе [9] задача Коши для системы Навье–Стокса в классе 2π -периодических функций была сведена к задаче Коши для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Удалось найти три семейства глобальных решений однородной задачи.

В настоящей работе изучается задача Коши для системы уравнений Навье–Стокса в равномерно вращающемся трехмерном пространстве с условием периодичности по пространственным переменным. Используя базис из собственных функций ротора, мы строим приближения v_l по Галеркину вектора скорости v . Коэффициенты v_l удовлетворяют конечной нелинейной системе ОДУ. Эта система имеет простой явный вид. Она диагональна в своей линейной части, что позволяет выписать явно решения линейной системы Стокса–Соболева, которые названы базовыми. Они задают одиночные вихри – вихревые потоки жидкости с ненулевой завихрённостью. Затем, в зависимости от нелинейного взаимодействия этих вихрей, из базовых решений мы получаем более сложные семейства решений. Некоторые из результатов настоящей работы опубликованы в статье [10].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задана вектор-функция $g(x): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, являющаяся 2π -периодической, соленоидальной и интегрируемой (с квадратом модуля) в кубе Q с ребром 2π , который определяется неравенствами $0 < x_j < 2\pi$, $j = 1, 2, 3$, т.е. $g \in L_2(Q)$; пусть задана вектор-функция $f(x, t)$ того же типа по x , принадлежащая классу $L_2(Q)$ при любом $t \geq 0$.

Задача. В трехмерном пространстве, равномерно вращающемся относительно вертикального вектора e_3 с угловой скоростью $\Omega/2$, требуется найти 2π -периодическое по пространственным переменным x_j решение $(v, p) = (v_1, v_2, v_3, p)$ уравнений

Навье–Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \Omega[e_3, v] = -\nabla p + f, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (1)$$

которое удовлетворяет начальному условию

$$v(x, 0) = g(x). \quad (2)$$

Здесь $[e_3, v]$ – векторное произведение.

При рассмотрении жидкости в системе координат, вращающейся вместе с ней, согласно работе [11] в механические уравнения вводятся центробежная и кориолисова силы. Центробежная сила может быть представлена в виде градиента $\nabla[\Omega, \mathbf{r}]^2/2$, где Ω – вектор угловой скорости вращения жидкости. Этот член можно объединить с силой $-\nabla p/\rho$, введя эффективное давление $P = p - \rho[\Omega, \mathbf{r}]^2/2$. Кориолисова сила равна $2[\Omega, \mathbf{v}]$, она появляется лишь при движении жидкости во вращающейся системе координат ($\mathbf{v}$ – скорость в этой системе). Скорости в инерционной и вращающейся системах координат связаны соотношением $\mathbf{v}_{\text{inert}} = \mathbf{v}_{\text{rot}} + [\Omega, \mathbf{r}]$. В нашем случае $\rho = 1$, $\Omega = \Omega e_3/2$, поэтому кориолисова сила имеет вид $\Omega[e_3, v]$.

Определение классических и обобщенных решений для произвольных линейных уравнений имеется в учебнике [12], а для уравнений Навье–Стокса в различных областях – в монографиях [13], [14].

Задача (1), (2) изучалась ранее многими авторами. Отметим в первую очередь монографию [15], в которой указано, что инерционные волны – явные решения линейной системы Стокса–Соболева – изучались ранее в работах [16]–[20] (см. также раздел 5 настоящей работы). Кроме того, задаче (1), (2) посвящены статьи [21], [22], причем в этих работах решение задачи ищется в классе функций, периодических по переменным x_j с периодами $2\pi a_j$, где параметры $a_j \in (0, \infty)$ произвольны, но фиксированы. Предполагается, что правая часть первых трех уравнений системы (1), которая в упомянутых статьях обозначена через $F(x, t)$, соленоидальна, принадлежит пространству Соболева $H_{\alpha-1}$ (см. формулы (14), (15) ниже) и для любого $\alpha > 1/2$

$$\sup_T \int_T^{T+1} \|F\|_{\alpha-1}^2 dt \leq M_{\alpha F}^2, \quad (3)$$

начальная вектор-функция $g(x) \in H_\alpha$ и $\|g(x)\|_\alpha \leq M_\alpha$. Основное утверждение работы [21] состоит в том, что существует число $\Omega_1(M_\alpha, M_{\alpha F}, \nu, a_1, a_2, a_3)$ такое, что для $\Omega \geq \Omega_1$ система Навье–Стокса (1) имеет глобальное решение $U(t)$ в классе H_α , причем $\|U(t)\|_\alpha \leq M'_\alpha$ для всех $t \geq 0$.

Мы будем изучать задачу в случае, когда периодичность по переменным x_j одинакова и $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Построенные ниже глобальные решения задачи справедливы при любых Ω и $\nu \geq 0$ и являются классическими решениями, т.е. они непрерывны, имеют непрерывные производные вплоть до второго порядка по x_j и первого по t включительно и удовлетворяют уравнениям (1) и начальному условию (2) (в обобщенном смысле, если ряды сходятся в $L_2(Q)$). В инерциальной системе координат

при фиксированном $t \geq 0$ они не являются периодическими, кроме точки $t = 0$ и дискретных значений $t = 2\pi n/\Omega$, $n \in \mathbb{Z}$. Настоящая работа примыкает к работам Бабина, Махалова и Николаенко и дополняет их новыми результатами. Кроме того, совместно с Хайбуллиным мы готовим следующую статью, посвященную разработке спектрально-аналитического метода численного решения задачи (1), (2) и некоторым результатам численного эксперимента.

3. РЯДЫ ФУРЬЕ

Спектр оператора Лапласа в классе 2π -периодических функций состоит из чисел $k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = |k|^2$, которые равны квадратам длин векторов k с целочисленными координатами. Система $\{(2\pi)^{-3/2} e_j e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}^3}$, $j = 1, 2, 3$, собственных функций оператора Лапласа образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(Q)$. Любая вектор-функция $f(x) \in L_2(Q)$ разлагается в ряд Фурье:

$$f(x) = f_0 + \sum_{k^2=1}^{\infty} f_k e^{ikx}, \quad (4)$$

где

$$f_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q f(x) e^{-ikx} dx. \quad (5)$$

В работе [7] доказано, что спектр оператора ротора состоит из числа 0 бесконечной кратности и чисел $\pm|k|$ конечной кратности. Пусть $k_0 \in \mathbb{Z}^3 \setminus 0$. Обозначим через $\widehat{u}_k^{\pm}(x)$ базисные собственные вектор-функции оператора ротора, отвечающие собственным значениям $\pm|k_0|$. Они удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \widehat{u}_k^{\pm}(x) = \pm|k_0| \widehat{u}_k^{\pm}(x) \quad (6)$$

и имеют вид

$$\widehat{u}_k^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} c_k^{\pm} e^{ikx}, \quad (7)$$

причем векторы k лежат на сфере радиуса $|k_0|$. Если число $|k'| \equiv \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ не равно нулю, то в качестве векторов $c_k^{\pm} = a_k^{\pm} + ib_k^{\pm}$ мы выбираем векторы

$$c_k^{\pm} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2|k'|} \begin{pmatrix} k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \frac{\sqrt{2}}{2|k'||k|} \begin{pmatrix} k_1 k_3 \\ k_2 k_3 \\ -k_1^2 - k_2^2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

а если $|k'| = 0$, то векторы

$$c_k^{\pm} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2|k|} \begin{pmatrix} k_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Векторы b_k^+ являются векторными произведениями $\widehat{k} = k/|k|$ и a_k^+ . Нетрудно убедиться, что для любого $k \neq 0$ векторы c_k^+ , c_k^- и $\widehat{k}$ образуют ортонормированный

базис в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$, а действительные векторы $\sqrt{2}a_k^+$, $\sqrt{2}b_k^+$, $\widehat{k}$ – в действительном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Постоянные векторы $\widehat{u}_0^j(x) = (2\pi)^{-3/2}e_j$ и вектор-функции $\widehat{u}_k(x) = (2\pi)^{-3/2}\widehat{k}e^{ikx}$ при $k \neq 0$ соответствуют нулевому собственному значению оператора ротора, $\text{rot } \widehat{u}_0^j(x) = 0$, $\text{rot } \widehat{u}_k(x) = 0$. Вместе с $\widehat{u}_k^\pm(x)$ они образуют ортонормированный базис в $L_2(Q)$. Имеет место следующая теорема [7].

ТЕОРЕМА 1. *Любая вектор-функция $f(x) \in L_2(Q)$ разлагается в сходящийся по норме этого пространства ряд Фурье*

$$f(x) = f_0 + \sum_{k^2=1}^{\infty} (\phi_k \widehat{k} + \phi_k^+ c_k^+ + \phi_k^- c_k^-) e^{ikx} \quad (10)$$

по собственным функциям оператора ротора, где вектор f_0 определяется по формуле (5) при $k = 0$ и

$$\phi_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q (f(x), \widehat{k}) e^{-ikx} dx, \quad (11)$$

$$\phi_k^\pm = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q (f(x), c_k^\pm) e^{-ikx} dx. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых векторов $h \in \mathbb{C}^3$ и $k \in \mathbb{Z}^3 \setminus 0$ имеет место разложение $h = (h, \widehat{k})\widehat{k} + (h, c_k^+)c_k^+ + (h, c_k^-)c_k^-$. Рассмотрим вектор f_k из (5). Его разложение с учетом обозначений (11), (12) имеет вид $f_k = \phi_k \widehat{k} + \phi_k^+ c_k^+ + \phi_k^- c_k^-$. Подставив это разложение в ряд (4), получим ряд (10).

В дальнейшем разложение (10) будем называть модифицированным рядом Фурье. Равенство Парсеваля–Стеклова для него имеет вид

$$\|f\|^2 = (2\pi)^3 \left(|f_0|^2 + \sum_{k^2=1}^{\infty} (|\phi_k|^2 + |\phi_k^+|^2 + |\phi_k^-|^2) \right). \quad (13)$$

Геометрически представление (4) означает, что векторное пространство $L_2(Q)$ есть прямая сумма, $L_2(Q) = \bigoplus_{j,k} F_k^j$, взаимно ортогональных подпространств F_k^j , образованных вектор-функциями $e_j e^{ikx}$, $j = 1, 2, 3$.

Пусть R_k и $R_k^\pm$ – комплексные подпространства, натянутые на базисные собственные вектор-функции оператора ротора $\widehat{u}_k = (2\pi)^{-3/2}\widehat{k}e^{ikx}$, $\widehat{u}_k^\pm = (2\pi)^{-3/2}c_k^\pm e^{ikx}$. Как мы показали, пространство $F_k = F_k^1 \oplus F_k^2 \oplus F_k^3$ имеет другое представление $F_k = R_k \oplus R_k^+ \oplus R_k^-$, которое означает, что в трехмерном комплексном пространстве F_k выбран новый базис, эквивалентный предыдущему. Возможны и другие базисы [7].

Кратность собственных значений $\pm|k_0|$ оператора ротора равна числу $\kappa(|k_0|^2)$ точек целочисленной решетки в $\mathbb{Z}^3$, лежащих на сфере радиуса $|k_0|$. Число $|k_0|^2$ целое. Некоторые целые числа, например $n = 7$, не представимы в виде суммы квадратов трех целых чисел, для них мы полагаем $\kappa(n) = 0$.

Суммирование ряда (10) ведется по уровням $k_0^2 = l$, где $l = 1, 2, \dots$. Уровни, для которых $\kappa(n) = 0$, пропускаются, так как они не пересекаются с точками целочисленной решетки.

Пусть $G_l = F_0 \oplus_{k^2=1}^l (R_k \oplus R_k^+ \oplus R_k^-)$ – конечномерное пространство, натянутое на базисные векторы $\widehat{u}_0^j$, $\widehat{u}_k$ и $\widehat{u}_k^\pm$. Его размерность равна $3 + 3N_l$, где $N_l = \kappa(1) + \dots + \kappa(l)$ – число ненулевых точек целочисленной решетки, лежащих в шаре радиуса $\sqrt{l}$. При необходимости их можно пронумеровать. Обозначим через f'_l частичную сумму ряда (10), т.е. проекцию вектора f на G_l . Вектор $f - f'_l$ ортогонален G_l . Имеет место [12] следующий аналог теоремы Пифагора: $\|f - f'_l\|^2 = \|f\|^2 - \|f'_l\|^2$, где $\|f'_l\|^2 = (2\pi)^3 (|f_0|^2 + \sum_{k^2=1}^l (|\phi_k|^2 + |\phi_k^+|^2 + |\phi_k^-|^2))$ есть частичная сумма сходящегося числового ряда (13). Отсюда вытекает, что последовательность f'_l сходится к f в норме пространства $L_2(Q)$, так как $\|f - f'_l\| \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

ЛЕММА 1. Пусть $f(x) \in L_2(Q)$ представлена рядом (10). Она удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} f = 0$ в смысле обобщенных функций тогда и только тогда, когда ее коэффициенты (11) равны нулю, т.е. $\phi_k = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы основывается на теории обобщенных функций и ортогональном представлении для G_l .

Пространство Соболева $W_2^{(\alpha)}(Q)$ состоит из вектор-функций, для которых сходится ряд

$$|f_0|^2 + \sum_{k^2=1}^{\infty} (1 + |k|^2)^\alpha (|\phi_k|^2 + |\phi_k^+|^2 + |\phi_k^-|^2), \quad \alpha \in \mathbb{R}; \quad (14)$$

его сумма, умноженная на $(2\pi)^3$, есть квадрат нормы функции f . В пространстве H_α [21], в котором вектор-функции удовлетворяют также условию $\operatorname{div} f(x) = 0$ и их среднее $f_0 = (2\pi)^{-3} \int_Q f(x) dx$ равно нулю, можно использовать другую, эквивалентную, норму, задающуюся равенством

$$\|f\|_{H_\alpha}^2 = (2\pi)^3 \sum_{k^2=1}^{\infty} |k|^{2\alpha} (|\phi_k^+|^2 + |\phi_k^-|^2). \quad (15)$$

Мы будем рассматривать также действительные функции.

Следующее утверждение доказывается элементарно на основе разложения f в ряд Фурье.

ЛЕММА 2. Пусть вектор-функция $f(x) \in L_2(Q)$ представлена рядом (10). Она вещественна, $f(x) = \bar{f}(x)$, тогда и только тогда, когда ее коэффициенты Фурье удовлетворяют соотношениям

$$\bar{\phi}_k = -\phi_{-k}, \quad \bar{\phi}_k^+ = -\phi_{-k}^+, \quad \bar{\phi}_k^- = -\phi_{-k}^-, \quad f_0^j = \bar{f}_0^j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Отметим, что векторы c_k^+ связаны равенством $\bar{c}_k^+ = -c_{-k}^+ = -c_k^-$.

Рассмотрим целочисленную решетку. Положим

$$\begin{aligned} M_1 &= \{k: k_1 \in \mathbb{N}, k_2 = k_3 = 0\}, & M_2 &= \{k: k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{N}, k_3 = 0\}, \\ M_3 &= \{k: k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, k_3 \in \mathbb{N}\}, & M &= M_1 \cup M_2 \cup M_3. \end{aligned}$$

Для действительной вектор-функции ряд (10) принимает вид

$$f(x) = f_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k \in M} (\phi_k \widehat{k} + \phi_k^+ c_k^+ + \phi_k^- c_k^-) e^{ikx}. \quad (16)$$

Полагая $\phi_k = \alpha_k + i\beta_k = |\phi_k|e^{i\theta_k}$ и $\phi_k^\pm = \alpha_k^\pm + i\beta_k^\pm = |\phi_k^\pm|e^{i\theta_k^\pm}$, где $|\theta_k|, |\theta_k^\pm| \leq \pi$, получим

$$\operatorname{Re}(\phi_k e^{ikx}) \widehat{k} = (\alpha_k \cos kx - \beta_k \sin kx) \widehat{k} = |\phi_k| \cos(kx + \theta_k) \widehat{k}$$

и

$$d_k^\pm(x) \equiv \operatorname{Re}(\phi_k^\pm c_k^\pm e^{ikx}) = |\phi_k^\pm| (a_k^\pm \cos(kx + \theta_k^\pm) - b_k^\pm \sin(kx + \theta_k^\pm)). \quad (17)$$

Очевидно, что вектор $d_k^+(x)$ лежит в плоскости, образованной векторами a_k^+, b_k^+ . Его длина $|d_k(x)|$ не зависит от x и равна $|\phi_k^+|/\sqrt{2}$, а направление постоянно в каждой из плоскостей $P_{\delta+2\pi n}$, где $kx = \delta + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, ибо

$$d_k^+(x)|_{P_{\delta+2\pi n}} = d_k^+(x)|_{P_\delta} = |\phi_k^+| (a_k^+ \cos(\delta + \theta_k^+) - b_k^+ \sin(\delta + \theta_k^+)). \quad (18)$$

Плоскость P_δ ортогональна вектору k , и вектор $d_k^+(x)$, перенесенный в точку $x \in P_\delta$, не выходит из этой плоскости. Плоскостями, ортогональными вектору k , куб расщепляется на участки $R_{\delta+2\pi n} = P_{\delta+2\pi n} \cap Q$, границами которых являются многоугольники, лежащие на границе куба Q .

Рассмотрим стационарное течение жидкости со скоростью $d_k^+(x)$. На каждом из участков $R_{\delta+2\pi n}$ жидкость течет в одном и том же направлении с постоянной скоростью (18) и при выходе на границу куба переходит с одного участка (скажем, R_δ) на другой ($R_{\delta+2\pi n}$).

Вектор $\operatorname{rot} d_k^\pm(x)$ в точке x называется *завихрённостью потока*, задаваемого полем $d_k^\pm(x)$. Так как при любом $k \in \mathbb{Z}^3 \setminus 0$

$$\operatorname{rot} d_k^\pm(x) = \pm |k| d_k^\pm(x) \quad (19)$$

и длина векторов $d_k^\pm(x)$ не зависит от x , завихрённость таких потоков жидкости не равна нулю в каждой точке $x \in Q$. Назовем их одиночными вихрями. Отметим, что вектор-функции $\widehat{d}_k^\pm(x)$ единичной длины также удовлетворяют уравнению (19). Они определяют потоки жидкости, завихрённость которых растет с ростом $|k|$.

Периодические собственные вектор-функции (v_n, p_n) оператора Стокса удовлетворяют уравнениям [13]

$$-\nu \Delta v_n + \nabla p_n = \lambda v_n, \quad \operatorname{div} v_n = 0. \quad (20)$$

Из этих уравнений легко получить, что p_n являются гармоническими функциями, $\Delta p_n = 0$. Однако гармоническая функция является периодической тогда и только тогда, когда она постоянна, $p_n = \text{const}$. Значит, $\nabla p_n = 0$, и уравнения (20) не содержат давления. Соленоидальные собственные вектор-функции ротора $\widehat{u}_0^j(x)$ и $\widehat{u}_k^\pm(x)$ удовлетворяют этим уравнениям при $\lambda = 0$ и $\lambda = \nu|k|^2$, $k \neq 0$, соответственно. Согласно теореме 1 других собственных функций нет.

4. МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Пусть вектор-функция $f(x, t) \in L_2(Q)$ при любом $t \geq 0$. Разложим ее в ряд Фурье (10), в котором коэффициенты ϕ_k и $\phi_k^\pm$ теперь зависят от t . Эта функция представима в виде суммы: $f(x, t) = \nabla q(x, t) + F(x, t)$, где

$$q = -i \sum_{k^2=1}^{\infty} \phi_k(t) |k|^{-1} e^{ikx}, \quad F = f_0 + \sum_{k^2=1}^{\infty} (\phi_k^+(t) c_k^+ + \phi_k^-(t) c_k^-) e^{ikx}.$$

Подставим это разложение в правую часть уравнения (1) и положим $P = p - q$. Получим уравнения того же вида (1), в которых $f = F$ и функция $F(x, t)$ соленоидальна для любого $t \geq 0$. Начальную скорость g из класса $L_2(Q)$ такую, что $\text{div } g = 0$, разложим в ряд по собственным функциям оператора Стокса (и оператора ротора):

$$g(x) = g_0 + \sum_{k^2=1}^{\infty} (\psi_k^+ c_k^+ + \psi_k^- c_k^-) e^{ikx}, \quad (21)$$

где

$$\psi_k^\pm = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q (g(x), c_k^\pm) e^{-ikx} dx, \quad (22)$$

здесь $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^3$.

Метод Галеркина [13], [14] состоит в следующем. Воспользуемся базисом из собственных функций оператора ротора. Пусть G_l – конечномерное пространство размерности $3 + 3N_l$, натянутое на базисные векторы $\widehat{u}_0^j$ и $\widehat{u}_k$, $\widehat{u}_k^\pm$ при $k^2 \leq l$. Галеркинские приближения ищем в виде

$$v_l(x, t) = \sum_{j=1}^3 v_0^j(t) e_j + \sum_{k^2=1}^l (\gamma_{k,l}^+(t) c_k^+ + \gamma_{k,l}^-(t) c_k^-) e^{ikx}, \quad (23)$$

$$p_l(x, t) = p_0(t) + \sum_{k^2=1}^l p_{k,l}(t) e^{ikx}. \quad (24)$$

Вектор $v_l(x, t)$ является соленоидальным, $\text{div } v_l = 0$. В соответствии с (21) начальные условия для v_l сводятся к

$$v_0^j(0) = g_0^j, \quad \gamma_{k,l}^\pm(0) = \psi_k^\pm \quad \text{при } 0 < k^2 \leq l. \quad (25)$$

Функции $v_0^j(t)$, $\gamma_{k,l}^\pm$, $p_{k,l}(t)$ подбираются так, чтобы вектор $L(v_l) + \nabla p_l - f$, где $L(v_l) = \partial v_l / \partial t - \nu \Delta v_l + (v_l \cdot \nabla) v_l + \Omega[e_3, v_l]$, был ортогонален базисным элементам линейного

пространства G_l , а значит, и самому пространству: $(L(v_l) + \nabla p_l - f) \perp G_l$. Это условие эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} (L(v_l) + \nabla p_l - f, \widehat{u}_0^j) &= 0, & j = 1, 2, 3, \\ (L(v_l) + \nabla p_l - f, \widehat{u}_k^\pm) &= 0, & 0 < k^2 \leq l, \\ (L(v_l) + \nabla p_l - f, \widehat{u}_k) &= 0, & 0 < k^2 \leq l \end{aligned} \quad (26)$$

из $3 + 3N_l$ уравнений с $3 + 3N_l$ неизвестными. В (26) $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(Q)$. Выпишем ее детальнее. Оператор $L(v)$ в уравнении (1) есть сумма линейного оператора S : $Sv = \partial_t v - \nu \Delta v + \Omega[e_3, v]$ и нелинейного оператора N : $N(v, v) = (v \cdot \nabla)v$.

Вычислим значения смешанных произведений:

$$([e_3, c_k^\pm], \widehat{k}) = \pm \frac{|k'|}{\sqrt{2}|k|}, \quad ([e_3, c_k^\pm], c_k^\pm) = \mp i \widehat{k}_3, \quad ([e_3, c_k^\pm], c_k^\mp) = 0. \quad (27)$$

Отсюда следует

ЛЕММА 3. Пусть вектор-функция $v_l(x, t)$ задана суммой (23). Тогда вектор-функция $\Omega[e_3, v]$ имеет вид

$$\Omega[e_3, v_0] + \Omega \sum_{k^2=1}^l \left(\frac{|k'|}{\sqrt{2}|k|} (\gamma_{k,l}^+ - \gamma_{k,l}^-) \widehat{k} - i \widehat{k}_3 \gamma_{k,l}^+ c_k^+ + i \widehat{k}_3 \gamma_{k,l}^- c_k^- \right) e^{ikx}. \quad (28)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} Sv_l &= \partial_t v_0 + \Omega[e_3, v_0] + \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \sum_{k^2=1}^l \frac{|k'|}{|k|} (\gamma_{k,l}^+ - \gamma_{k,l}^-) \widehat{k} e^{ikx} + \\ &+ \sum_{k^2=1}^l ((\partial_t + \nu k^2 - i \Omega \widehat{k}_3) \gamma_{k,l}^+(t) c_k^+ + (\partial_t + \nu k^2 + i \Omega \widehat{k}_3) \gamma_{k,l}^-(t) c_k^-) e^{ikx}, \\ \nabla p(x, t) &= i \sum_{|k|^2=1}^l p_{k,l}(t) k e^{ikx} = i \sum_{|k|^2=1}^l |k| p_{k,l}(t) \widehat{k} e^{ikx}. \end{aligned}$$

Если в (23) обозначить $\gamma_{k,l}^+(t) c_k^+ + \gamma_{k,l}^-(t) c_k^-$ через w_k , то при $n + m = k$

$$\begin{aligned} N(w_n e^{inx}, w_m e^{imx}) &= i e^{ikx} (w_n, m) w_m = \\ &= i (w_n, m) ((w_m, \widehat{k}) \widehat{k} + (w_m, c_k^+) c_k^+ + (w_m, c_k^-) c_k^-) e^{ikx}. \end{aligned}$$

Действие нелинейного оператора N на сумму (23) равно

$$N(v_l, v_l) = (v_0 \cdot \nabla) v_l + i \sum_{k^2=1}^{R_l} e^{ikx} \sum_{n+m=k} (w_n, m) w_m, \quad (29)$$

где $R_l = \max_{|m|^2, |n|^2 \leq l} |m + n|^2$,

$$(v_0 \cdot \nabla) v_l = i \sum_{k^2=1}^l ((v_0, k) \gamma_{k,l}^+(t) c_k^+ + (v_0, k) \gamma_{k,l}^-(t) c_k^-) e^{ikx}.$$

Используя эти формулы, нетрудно убедиться, что решение уравнений (26) с начальными условиями (25) сводится к задаче Коши для функций $v_0^j(t)$, $\gamma_{k,l}^\pm$ и к алгебраическим уравнениям для функций $p_{k,l}(t)$. Задача Коши распадается на задачу для вектор-функции $v_0(t) = (v_0^1, v_0^2, v_0^3)$:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + \Omega[e_3, v_0] = f_0(t), \quad v_0(0) = g_0 \quad (30)$$

и задачу для функций $\gamma_{k,l}^\pm$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \gamma_{k,l}^\pm}{\partial t} + (\nu k^2 \mp i \Omega \widehat{k}_3 + i(v_0, k)) \gamma_{k,l}^\pm + \\ & + i \sum_{m^2=1}^l [\gamma_{k-m,l}^+(c_{k-m}^+, m) + \gamma_{k-m,l}^-(c_{k-m}^-, m)] \times \\ & \times [\gamma_{m,l}^+(c_m^+, c_k^\pm) + \gamma_{m,l}^-(c_m^-, c_k^\pm)] = \phi_k^\pm(t), \end{aligned} \quad (31)$$

где $0 < |k - m|^2 \leq l$, с начальными условиями

$$\gamma_{k,l}^\pm(0) = \psi_k^\pm, \quad 0 < |k|^2 \leq l. \quad (32)$$

Алгебраические уравнения легко решаются, в результате функции $p_{k,l}(t)$ определяются через $\gamma_{k,l}^\pm$:

$$\begin{aligned} p_{k,l}(t) = & -i|k|^{-1} \left(\phi_k(t) - \Omega \frac{\sqrt{2}|k'|}{2|k|} (\gamma_{k,l}^+ - \gamma_{k,l}^-) - \right. \\ & - \sum_{m^2=1}^l [\gamma_{k-m,l}^+(c_{k-m}^+, m) + \gamma_{k-m,l}^-(c_{k-m}^-, m)] \times \\ & \left. \times [\gamma_{m,l}^+(c_m^+, \widehat{k}) + \gamma_{m,l}^-(c_m^-, \widehat{k})] \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Функция $p_0(t)$ не определяется и не учитывается в уравнениях (1), ибо $\nabla p_0(t) = 0$. Для однозначности определения давления $p(x, t)$ будем предполагать [13], что

$$p_0(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q p(x, t) dx = 0. \quad (34)$$

Важной частью метода Галеркина является вопрос о сходимости последовательности v_l . Этим вопросом, а также численным решением задач (30)–(32) мы займемся в дальнейшем. Первые результаты опубликованы в работе [23].

Далее мы построим явные решения линейной системы Стокса–Соболева и нелинейной системы Навье–Стокса (1).

5. РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Линейная система Стокса–Соболева получается из системы (1) отбрасыванием нелинейного слагаемого и имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \Omega[e_3, v] = -\nabla p + f, \quad \operatorname{div} v = 0. \quad (35)$$

При $\Omega = 0$ она совпадает с уравнениями Стокса, а при $\nu = 0$ – с системой, изученной Соболевым [24] и его учениками. Краевые задачи для таких систем (в стационарном случае), а также для оператора ротора автор изучал ранее [25]–[27].

Задача Коши для системы Стокса–Соболева в классе периодических функций состоит в решении уравнений (35) с начальным условием

$$v(x, 0) = g(x), \quad (36)$$

где $g(x)$ – заданная периодическая вектор-функция.

Согласно предыдущему разделу эта задача сводится к задачам Коши для уравнений Галеркина (30) и (31), (32) без нелинейных слагаемых. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \gamma_k^\pm}{\partial t} + \omega_k^\pm \gamma_k^\pm = \phi_k^\pm(t), \quad \gamma_k^\pm(0) = \psi_k^\pm, \quad (37)$$

где $\omega_k^\pm = \nu k^2 \mp i\Omega k_3$, $0 < |k|^2 \leq l$. Эти задачи легко решаются. Их решения, как обычно, мы представим в виде суммы решений однородного уравнения с ненулевыми начальными данными и неоднородного уравнения с нулевыми начальными данными. Решение задачи (30) с непрерывной вектор-функцией $f_0(t)$ есть сумма следующих слагаемых:

$$v_{0,g} = A(\Omega t)g_0, \quad w_{f,0} = A(\Omega t) \int_0^t A^{-1}(\Omega \tau) f_0(\tau) d\tau, \quad (38)$$

где $A(\Omega t)$ – матрица, строки которой имеют вид

$$(\cos \Omega t, \sin \Omega t, 0), \quad (-\sin \Omega t, \cos \Omega t, 0), \quad (0, 0, 1),$$

A^{-1} – обратная к ней матрица.

Предположим, что функции $\phi_k^\pm(t)$ непрерывны при всех $t \geq 0$. Положим

$$\rho_k^\pm(t) = \int_0^t e^{\omega_k^\pm \tau} \phi_k^\pm(\tau) d\tau. \quad (39)$$

Задача (37) имеет решение

$$\gamma_k^\pm = (\psi_k^\pm + \rho_k^\pm(t)) e^{-\omega_k^\pm t}. \quad (40)$$

В частности, если $\phi_k^\pm(t) = \beta_k^\pm e^{-\sigma_k^\pm t}$, то

$$\rho_k^\pm(t) e^{-\omega_k^\pm t} = \begin{cases} \beta_k^\pm t e^{-\omega_k^\pm t} & \text{при } \sigma_k^\pm = \omega_k^\pm, \\ \beta_k^\pm (\omega_k^\pm - \sigma_k^\pm)^{-1} (e^{-\sigma_k^\pm t} - e^{-\omega_k^\pm t}) & \text{при } \sigma_k^\pm \neq \omega_k^\pm. \end{cases} \quad (41)$$

Эти формулы показывают, что при $\sigma_k^\pm = \omega_k^\pm$ возникает резонанс.

Таким образом, решением однородной системы уравнений (35) с начальным условием $g = u_k^\pm = \psi_k^\pm c_k^\pm e^{ikx}$ является пара $(v_k^\pm, p_k^\pm)$, где

$$v_k^\pm(x, t) = \psi_k^\pm c_k^\pm e^{ikx - \omega_k^\pm t}, \quad p_k^\pm(x, t) = \pm i \psi_k^\pm e^{ikx - \omega_k^\pm t} \frac{\Omega |k'|}{\sqrt{2} |k|^2}, \quad (42)$$

а пара $(w_k^\pm, q_k^\pm)$, где

$$w_k^\pm(x, t) = \rho_k^\pm(t) c_k^\pm e^{ikx - \omega_k^\pm t}, \quad q_k^\pm(x, t) = \pm i \rho_k^\pm(t) e^{ikx - \omega_k^\pm t} \frac{\Omega |k'|}{\sqrt{2} |k|^2}, \quad (43)$$

представляет собой частное решение неоднородной системы (35) с правой частью $f = F_k^\pm(x, t) \equiv \phi_k^\pm(t) c_k^\pm e^{ikx}$ и нулевым начальным условием.

Отметим, что поля $v_k^\pm$ и $w_k^\pm$ имеют ненулевую завихрённость, так как

$$\text{rot } v_k^\pm = \pm |k| v_k^\pm, \quad \text{rot } w_k^\pm = \pm |k| w_k^\pm. \quad (44)$$

Что касается длин векторов $v_k^\pm$ и $w_k^\pm$, то согласно (41)–(43) $|v_k^\pm(x, t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, а поведение $|w_k^\pm(x, t)|$ зависит от $\text{Re } \sigma_k^\pm$:

$$|w_k^\pm(x, t)| \rightarrow 0, \quad \text{если } \text{Re } \sigma_k^\pm > 0,$$

$$|w_k^\pm(x, t)| \rightarrow \frac{|\beta_k^\pm|}{|\omega_k^\pm - \sigma_k^\pm|}, \quad \text{если } \text{Re } \sigma_k^\pm = 0,$$

$$|w_k^\pm(x, t)| \rightarrow +\infty, \quad \text{если } \text{Re } \sigma_k^\pm < 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Решения (42), (43) справедливы при любых ν и Ω , при $\nu = 0$ решения (42) были известны давно [11], [15], векторы $v_k^\pm$ называются инерционными волнами и представляют собой плоские поперечные волны. Фазовая скорость волны $v_k^\pm$ равна $\Omega k_3 \mathbf{k} / |k|^3$, а групповая скорость равна двойному векторному произведению $\Omega[\mathbf{k}, [\mathbf{e}_3, \mathbf{k}]] / |k|^3$.

Коэффициенты всех операторов в (35) действительны, поэтому действительные векторы $(\text{Re } v_k^\pm, \text{Re } p_k^\pm)$ и $(\text{Im } v_k^\pm, \text{Im } p_k^\pm)$ являются решениями задач (35), (36) при $f = 0$, $g = \text{Re } u_k^\pm$ и $f = 0$, $g = \text{Im } u_k^\pm$ соответственно, причем

$$\text{Re } v_k^\pm(x, t) = |\psi_k^\pm| e^{-\nu k^2 t} (a_k^\pm \cos \varphi_k^\pm(x, t) - b_k^\pm \sin \varphi_k^\pm(x, t)), \quad (45)$$

$$\text{Re } p_k^\pm(x, t) = \mp |\psi_k^\pm| e^{-\nu k^2 t} \frac{\Omega |k'|}{\sqrt{2} |k|^2} \sin \varphi_k^\pm(x, t), \quad (46)$$

где $\varphi_k^\pm(x, t) = \arg \psi_k^\pm + kx \pm \Omega \widehat{k} z t$. Аналогичные утверждения справедливы для реальных и мнимых частей решений (43) и (38) с $p_0 = 0$.

Пусть g'_l и f'_l – частичные суммы разложений (21) и (10) при $0 \leq |k|^2 \leq l$. Ввиду линейности задачи (35), (36) пара (V_l, P_l) , где

$$V_l(x, t) = v_{0,g}(t) + w_{0,f}(t) + \sum_{|k|^2=1}^l (v_k^+ + w_k^+ + v_k^- + w_k^-), \quad (47)$$

$$P_l(x, t) = \sum_{|k|^2=1}^l \left(p_k^+ + q_k^+ + p_k^- + q_k^- - \frac{i\phi_k(t)}{|k|} e^{ikx} \right), \quad (48)$$

есть решение задачи при $f = f'_l$ и $g = g'_l$. Вектор-функция $(\operatorname{Re} V_l, \operatorname{Re} P_l)$ является решением задачи (35), (36) при $f = \operatorname{Re} f'_l$ и $g = \operatorname{Re} g'_l$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Комплексные решения $(v, p) = (v_{0,g}, 0)$ и $(w, p) = (w_{f,0}, 0)$ из (38) и $(v_k^\pm, p_k^\pm)$, $(w_k^\pm, q_k^\pm)$ из (42), (43), а также их реальные и мнимые части назовем базовыми решениями задачи (35), (36).

Формулы (47), (48) показывают, что при любом $l > 0$ решение (V_l, P_l) есть сумма базовых решений задачи. Переходя в этих формулах к пределу при $l \rightarrow \infty$, получим общее или формальное решение задачи. В случае, когда ряды сходятся в определенных пространствах и удовлетворяют принципу суперпозиции, приходим к классическому, или обобщенному решению. Например, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f = 0$, $g \in L_2(Q)$, тогда пара (V_g, P_g) , где

$$V_g(x, t) = A(\Omega t)g_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^3 \setminus 0} (\psi_k^+ e^{i\Omega \widehat{k} z t} c_k^+ + \psi_k^- e^{-i\Omega \widehat{k} z t} c_k^-) e^{ikx - \nu |k|^2 t}, \quad (49)$$

$$P_g(x, t) = i\Omega \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^3 \setminus 0} \frac{|k'|}{|k|^2} (\psi_k^+ e^{i\Omega \widehat{k} z t} - \psi_k^- e^{-i\Omega \widehat{k} z t}) e^{ikx - \nu |k|^2 t}, \quad (50)$$

является классическим решением однородной системы (35), так как при $t > 0$ компоненты вектора скорости V_g и давление P_g бесконечно дифференцируемы по x и t . Если же зафиксировать $t \geq 0$, то $V_g(x, t)$ и $\nabla P_g(x, t)$ принадлежат пространству $L_2(Q)$ и $\|V_g(x, t) - g\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$. Если $t \rightarrow +\infty$, то V_g и P_g стремятся к нулю.

Аналогичное утверждение имеет место, если $f = 0$, а $g \in H_\alpha$, где $\alpha > 0$. При этом $g_0 = 0$ в (49).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы проводится методом мажорант.

Если в (49), (50) устремить ν к нулю, то получим решение системы уравнений Соболева в пространствах H_α . Оператор, стоящий в правой части (49), называется оператором Пуанкаре [21]. Он сохраняет норму в пространстве H_α , $\|V_g\|_{H_\alpha} = \|g\|_{H_\alpha}$, и обладает групповым свойством по t .

6. ГЛОБАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. *Каждое базовое решение (v, p) линейной задачи (35), (36) с данными (f, g) является глобальным решением нелинейной задачи (1), (2) с теми же данными.*

Так, пара $(v_k^\pm, p_k^\pm)$ есть решение задачи (1), (2) при $(f, g) = (0, u_k^\pm(x))$, пара $(w_k^\pm, q_k^\pm)$ – решение задачи при $(f, g) = (F_k^\pm, 0)$, пара $(\operatorname{Re} v_k^\pm, \operatorname{Re} p_k^\pm)$ – решение задачи при $(f, g) = (0, \operatorname{Re} u_k^\pm(x))$ и т.д.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (v, p) – базовое решение задачи (35), (36) с данными (f, g) . Покажем, что вектор v принадлежит ядру нелинейного оператора N , т.е. $N(v, v) = (v \cdot \nabla)v = 0$. Действительно, для вектора $v = v_k^+$ из (42) имеем

$$N(v_k^+, v_k^+) = (v_k^+ \cdot \nabla)v_k^+ = i(v_k^+, k)v_k^+ = i\alpha_k^+(c_k^+, k)e^{ikx - \omega_k^{+t}}v_k^+ = 0,$$

так как $(c_k^+, k) = 0$. Следовательно, вектор-функция (v_k^+, p_k^+) есть решение задачи (1), (2) при $(f, g) = (0, u_k^+(x))$. Аналогично доказываются утверждения для пар (v_k^-, p_k^-) и $(w_k^\pm, q_k^\pm)$.

Рассмотрим пару $(\operatorname{Re} v_k^\pm, \operatorname{Re} p_k^\pm)$ из (45), (46). Имеем

$$N(\operatorname{Re} v_k^+, \operatorname{Re} v_k^+) = \frac{1}{4} N(v_k^+ + \bar{v}_k^+, v_k^+ + \bar{v}_k^+).$$

Раскроем скобки, получим сумму $N(v_k^+, v_k^+) + N(v_k^+, \bar{v}_k^+) + N(\bar{v}_k^+, v_k^+) + N(\bar{v}_k^+, \bar{v}_k^+)$, каждое слагаемое которой равно нулю. Следовательно, пара $(\operatorname{Re} v_k^+, \operatorname{Re} p_k^+)$ есть решение задачи (1), (2) при $(f, g) = (0, \operatorname{Re} u_k^+(x))$. Аналогично доказываются и другие случаи такого типа. Для решений $(v, p) = (v_{0,g}, 0)$ и $(w, p) = (w_{f,0}, 0)$, не зависящих от x , это очевидно. Теорема доказана.

Отметим, что в общем случае сумма базовых решений не является решением нелинейного уравнения (1). Но в случае, когда базовые решения соответствуют одному и тому же волновому вектору k , это утверждение имеет место. Действительно, векторные составляющие $v_k^\pm$, $w_k^\pm$, $\operatorname{Re} v_k^\pm$, $\operatorname{Re} w_k^\pm$, $\operatorname{Im} v_k^\pm$, $\operatorname{Im} w_k^\pm$ и их суммы принадлежат ядру нелинейного оператора $N(v, v)$. Поэтому пара

$$(v_k^+ + v_k^- + w_k^+ + w_k^-, p_k^+ + p_k^- + q_k^+ + q_k^-) \quad (51)$$

есть решение задачи (1), (2) при

$$f = F_k^+ + F_k^-, \quad g = u_k^+ + u_k^-, \quad (52)$$

а пара $(\operatorname{Re}(v_k^+ + v_k^- + w_k^+ + w_k^-), \operatorname{Re}(p_k^+ + p_k^- + q_k^+ + q_k^-))$ есть решение задачи (1), (2) при $f = \operatorname{Re}(F_k^+ + F_k^-)$ и $g = \operatorname{Re}(u_k^+ + u_k^-)$.

Аналогичное утверждение имеет место для мнимых частей и линейной комбинации реальных и мнимых частей базовых решений с одним и тем же волновым вектором k . Эти же утверждения справедливы для комплексных и действительных базовых решений $(v_{\lambda k}^{\pm}, p_{\lambda k}^{\pm})$, $(w_{\lambda k}^{\pm}, q_{\lambda k}^{\pm})$, $\text{Re}(v_{\lambda k}^{\pm}, p_{\lambda k}^{\pm})$, $\text{Re}(w_{\lambda k}^{\pm}, q_{\lambda k}^{\pm})$ в случае, когда векторы λk коллинеарны вектору k , т.е. $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus 0$. Их можно умножать на произвольные постоянные и складывать в конечном или бесконечном числе. Если ряд удовлетворяет принципу суперпозиции, получим решение задачи.

Для иллюстрации рассмотрим один случай более детально. Пусть

$$f = 0, \quad g = g_k^{\pm} \equiv \sum_{\lambda=1}^{\infty} u_{\lambda k}^{\pm}(x) = c_k^{\pm} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \psi_{\lambda k}^{\pm} e^{i\lambda k x}, \quad (53)$$

где мы учли, что $c_{\lambda k}^{\pm} = c_k^{\pm}$ при $\lambda > 0$ и $c_{\lambda k}^{\pm} = c_k^{\mp}$ при $\lambda < 0$. Предположим, что ряд $g_k^{\pm}$ сходится в $L_2(Q)$. Положим

$$(V_k^{\pm}, P_k^{\pm}) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (v_{\lambda k}^{\pm}, p_{\lambda k}^{\pm}), \quad (54)$$

$$V_k^{\pm} = c_k^{\pm} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \psi_{\lambda k}^{\pm} e^{i\lambda k x - \omega_{\lambda k}^{\pm} t}, \quad P_k^{\pm} = \pm i \frac{\Omega |k'|}{\sqrt{2} |k|^2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\psi_{\lambda k}^{\pm}}{|\lambda|} e^{i\lambda k x - \omega_{\lambda k}^{\pm} t}. \quad (55)$$

Имеет место аналог теоремы 2: при $t > 0$ компоненты вектора скорости $V_k^{\pm}$ и давление $P_k^{\pm}$ бесконечно дифференцируемы по x и t и пара $(V_k^{\pm}, P_k^{\pm})$ есть классическое решение однородной системы (1) с начальным условием $g = g_k^{\pm}$, $\|v_k^{\pm} - g_k^{\pm}\| \rightarrow 0$ в пространстве $L_2(Q)$ при $t \rightarrow +0$. Кроме того,

$$N(V_k^+, V_k^+) = (c_k^+, k) c_k^+ \sum_{\lambda=1}^{\infty} \psi_{\lambda k}^+ e^{i\lambda k x - \omega_{\lambda k}^+ t} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda \psi_{\lambda k}^+ e^{i\lambda k x - \omega_{\lambda k}^+ t} = 0$$

и аналогично $N(V_k^-, V_k^-) = 0$. Поэтому $(V_k^{\pm}, P_k^{\pm})$ являются решениями задачи. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Любой сходящийся в $L_2(Q)$ ряд $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \psi_{\lambda k}^{\pm} c_k^{\pm} e^{i\lambda k x}$, заданный при $t = 0$, порождает глобальное решение (54), (55) задачи (1), (2) при $f = 0$, $g = g_k^{\pm}$.*

Особенности скалярных рядов Фурье [28] проявляются на решениях уравнения Навье–Стокса.

В случае, когда волновые векторы m и n лежат на одной сфере, но не коллинеарны, сумма решений (v_m^+, p_m^+) и (v_n^+, p_n^+) не является решением первого уравнения в (1), так как сумма векторов $v_m^+ + v_n^+$ не принадлежит ядру нелинейного оператора $N(v, v)$. Однако в этом случае существует функция $q_{m,n}^+$ такая, что $N(v_m^+ + v_n^+, v_m^+ + v_n^+) = \nabla q_{m,n}^+$.

ЛЕММА 4. Пусть v_m^+ и v_n^+ – собственные вектор-функции оператора ротора с одинаковыми собственными значениями $|m| = |n|$. Тогда

$$N(v_m^+ + v_n^+, v_m^+ + v_n^+) = \nabla \frac{1}{2} (v_m^+ + v_n^+)^2. \quad (56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся известным тождеством

$$(v \cdot \nabla)v = [\text{rot } v, v] + \nabla \frac{1}{2} v^2, \quad (57)$$

которое перепишем в виде

$$N(v, v) = R(v, v) + \nabla \frac{1}{2} v^2, \quad (58)$$

где $R(v, v) = [\text{rot } v, v]$, а $v^2 = v \cdot v$. Здесь $u \cdot v = \sum_{j=1}^3 u^j v^j$ – произведение, которое отличается от комплексного скалярного произведения $(u, v) = \sum_{j=1}^3 u^j \bar{v}^j$ и связано с ним соотношением $u \cdot v = (u, \bar{v})$.

Покажем, что $R(v, v) = 0$ при $v = v_m^+ + v_n^+$, где v_m^+, v_n^+ – собственные вектор-функции оператора ротора с одинаковыми собственными значениями. Действительно, используя (45) и свойства векторного произведения, имеем

$$\begin{aligned} R(v_m^+ + v_n^+, v_m^+ + v_n^+) &= [|m|v_m^+ + |n|v_n^+, v_m^+ + v_n^+] = \\ &= |m|[v_m^+, v_n^+] + |n|[v_n^+, v_m^+] = (|m| - |n|)[v_m^+, v_n^+] = 0. \end{aligned}$$

Из равенства $R(v_m^+ + v_n^+, v_m^+ + v_n^+) = 0$ и соотношения (58) получим (56). Воспользовавшись (42), вычислим правую часть (56). Заметим, что $v_m^+ \cdot v_m^+ = (v_m^+, \overline{v_m^+}) = 0$, так как $\overline{c_m^+} = -c_m^-$ и $(c_m^+, c_m^-) = 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{2} (v_m^+ + v_n^+)^2 = v_m^+ \cdot v_n^+ = \psi_m^+ \psi_n^+ (c_m^+ \cdot c_n^+) e^{i(m+n)x - (\omega_m^+ + \omega_n^+)t}.$$

Аналогично

$$N(v_m^- + v_n^-, v_m^- + v_n^-) = \nabla \frac{1}{2} (v_m^- + v_n^-)^2$$

для собственных вектор-функций оператора ротора с одинаковыми отрицательными собственными значениями.

Что касается суммы $v_m^+ + v_n^-$ собственных вектор-функций оператора ротора с одинаковыми по модулю, но различными по знаку собственными значениями, то для нее мы имеем

$$R(v_m^+ + v_n^-, v_m^+ + v_n^-) = (|m| + |n|)[v_m^+, v_n^-] \neq 0, \quad \text{если } [v_m^+, v_n^-] \neq 0. \quad (59)$$

Из соотношений (44) согласно лемме 4 получаем

$$N(w_m^+ + w_n^+, w_m^+ + w_n^+) = \nabla \frac{1}{2} (w_m^+ + w_n^+)^2, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} N(v_m^+ + w_m^+ + v_n^+ + w_n^+, v_m^+ + w_m^+ + v_n^+ + w_n^+) &= \\ &= \nabla \frac{1}{2} (v_m^+ + w_m^+ + v_n^+ + w_n^+)^2, \end{aligned} \quad (61)$$

$$N\left(\sum_{|k|=\sqrt{l}}(v_k^+ + w_k^+), \sum_{|k|=\sqrt{l}}(v_k^+ + w_k^+)\right) = \nabla \frac{1}{2} \left(\sum_{|k|=\sqrt{l}}(v_k^+ + w_k^+)\right)^2, \quad (62)$$

$$N(\operatorname{Re} v_m^+ + \operatorname{Re} v_n^+, \operatorname{Re} v_m^+ + \operatorname{Re} v_n^+) = \nabla \frac{1}{2} (\operatorname{Re} v_m^+ + \operatorname{Re} v_n^+)^2. \quad (63)$$

Из леммы 4 следует

ТЕОРЕМА 5. Пусть $u_m^+(x)$ и $u_n^+(x)$ – собственные функции оператора ротора с одинаковыми собственными значениями $|m| = |n|$, а (v_m^+, p_m^+) и (v_n^+, p_n^+) – базовые решения (42). Тогда задача (1), (2) при $f = 0$, $g = u_m^+ + u_n^+$ имеет решение

$$\left(v_m^+ + v_n^+, p_m^+ + p_n^+ - \frac{1}{2}(v_m^+ + v_n^+)^2\right), \quad (64)$$

а пара

$$\left(\operatorname{Re} v_m^+ + \operatorname{Re} v_n^+, \operatorname{Re} p_m^+ + \operatorname{Re} p_n^+ - \frac{1}{2}(\operatorname{Re} v_m^+ + \operatorname{Re} v_n^+)^2\right) \quad (65)$$

есть решение задачи (1), (2) при $f = 0$, $g = \operatorname{Re} u_m^+ + \operatorname{Re} u_n^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $S: Sv = \partial_t v - \nu \Delta v + \Omega[e_3, v]$ является линейным, поэтому $S(v_m^+ + v_n^+) = -\nabla(p_m^+ + p_n^+)$. Воспользуемся равенством (56). Тогда

$$S(v_m^+ + v_n^+) + N(v_m^+ + v_n^+, v_m^+ + v_n^+) = -\nabla\left(p_m^+ + p_n^+ - \frac{1}{2}(v_m^+ + v_n^+)^2\right).$$

Так как $\operatorname{div}(v_m^+ + v_n^+) = 0$, все уравнения в (1) выполняются. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично. Теорема доказана.

В силу (59) для суммы $v_m^+ + v_n^-$ собственных вектор-функций оператора ротора с одинаковыми по модулю, но различными по знаку собственными значениями аналог теоремы 5 несправедлив, кроме случая $n = -m$. Тогда операторы N , R и $(v_m^+ + v_n^-)^2$ равны нулю.

Для собственных функций оператора ротора с одинаковыми отрицательными собственными значениями имеет место аналог теоремы 5. Используя равенства (60)–(62), можно доказать следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $F_m^+(x, t)$ и $F_n^+(x, t)$ – собственные функции оператора ротора с одинаковыми собственными значениями $|m| = |n|$, а (w_m^+, q_m^+) и (w_n^+, q_n^+) – базовые решения (43). Тогда задача (1), (2) при $f(x, t) = F_m^+(x, t) + F_n^+(x, t)$ и $g = 0$ имеет решение

$$\left(w_m^+ + w_n^+, q_m^+ + q_n^+ - \frac{1}{2}(w_m^+ + w_n^+)^2\right), \quad (66)$$

а пара

$$\left(\operatorname{Re} w_m^+ + \operatorname{Re} w_n^+, \operatorname{Re} q_m^+ + \operatorname{Re} q_n^+ - \frac{1}{2}(\operatorname{Re} w_m^+ + \operatorname{Re} w_n^+)^2\right) \quad (67)$$

есть решение задачи (1), (2) при $f = \operatorname{Re} F_m^+(x, t) + \operatorname{Re} F_n^+(x, t)$ и $g = 0$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть l есть сумма квадратов трех целых чисел. Тогда задача (1), (2) при $f = \sum_{|k|=\sqrt{l}} F_k^+$, $g = \sum_{|k|=\sqrt{l}} u_k^+$ имеет решение

$$\left(\sum_{|k|=\sqrt{l}} (v_k^+ + w_k^+), \sum_{|k|=\sqrt{l}} (p_k^+ + q_k^+) - \frac{1}{2} \left(\sum_{|k|=\sqrt{l}} (v_k^+ + w_k^+) \right)^2 \right). \quad (68)$$

Аналогичные утверждения имеют место для действительных собственных функций оператора ротатора, имеющих одинаковые собственные значения.

При $f = f_0(t)$, $g = g_0$ решение задачи (1), (2) есть сумма базовых решений $(v_{0,g}, 0)$ и $(w_{f,0}, 0)$, где $v_{0,g}$ и $w_{f,0}$ определены формулами (38).

Пусть найдено явное решение задачи при $f = f_1(x, t)$, $g = g_1(x)$. Оказывается, что можно построить явное решение задачи (1), (2) при $f = f_0(t) + f_1$, $g = g_0 + g_1$. Рассмотрим конкретный случай. Пусть $f_1 = F_k^+ + F_k^-$, $g_1 = g_k^+ + g_k^-$. Введем в рассмотрение нелинейные операторы, действующие на g_0 и f_0 в соответствии с формулами

$$\varphi_{g,0}(t) = \exp \left(-i \int_0^t (A(\Omega\tau)g_0, k) d\tau \right), \quad (69)$$

$$\psi_{f,0}(t) = \exp \left(-i \int_0^t (w_{f,0}(\tau), k) d\tau \right) \quad (70)$$

и отметим, что $\varphi_{g,0}(t) \equiv 1$, если $g_0 = 0$, и $\psi_{f,0}(t) = 1$, если $f_0(t) = 0$.

Пусть $(\widehat{w}_k^\pm, \widehat{q}_k^\pm)$ – базовое решение, построенное по $\widehat{F}_k^\pm = \varphi_{g,0}^{-1} \psi_{f,0}^{-1} F_k^\pm(x, t)$.

ТЕОРЕМА 8. Если $f = f_0 + F_k^+ + F_k^-$, $g = g_0 + u_k^+ + u_k^-$, то задача (1), (2) имеет решение (V, P) , где

$$V = v_{0,g} + w_{f,0} + (v_k^+ + v_k^- + \widehat{w}_k^+ + \widehat{w}_k^-) \varphi_{g,0} \psi_{f,0}, \quad (71)$$

$$P = (p_k^+ + p_k^- + \widehat{q}_k^+ + \widehat{q}_k^-) \varphi_{g,0} \psi_{f,0}. \quad (72)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно увидеть, что

$$Sv = f_0(t) - i\varphi_{g,0}\psi_{f,0}(v_{0,g} + w_{f,0}, k)(v_k^+ + \widehat{w}_k^+ + v_k^- + \widehat{w}_k^-) - \\ - \varphi_{g,0}\psi_{f,0}\nabla(p_k^+ + \widehat{q}_k^+ + p_k^- + \widehat{q}_k^-) + \varphi_{g,0}\psi_{f,0}(\widehat{F}_k^+ + \widehat{F}_k^-),$$

$$N(v, v) = i\varphi_{g,0}\psi_{f,0}(v_{0,g} + w_{f,0}, k)(v_k^+ + \widehat{w}_k^+ + v_k^- + \widehat{w}_k^-).$$

Следовательно,

$$Sv + N(v, v) = f_0(t) + F_k^+ + F_k^- - \nabla(p_k^+ + \widehat{q}_k^+ + p_k^- + \widehat{q}_k^-) \varphi_{g,0} \psi_{f,0}.$$

Сравнивая это решение с решением (51) задачи (52), видим, что если начальное условие содержит вектор g_0 , а внешняя сила – вектор $f_0(t)$, то это решение можно получить по следующему правилу:

1) решаем задачу (1), (2) с $f = \widehat{F}_k^+ + \widehat{F}_k^- = (\varphi_{g,0}\psi_{f,0})^{-1}(F_k^+ + F_k^-)$ и $g = u_k^+ + u_k^-$;

2) ее решение $(v_k^+ + v_k^- + \widehat{w}_k^+ + \widehat{w}_k^-, p_k^+ + p_k^- + \widehat{q}_k^+ + \widehat{q}_k^-)$ умножаем на произведение $\varphi_{g,0}\psi_{f,0}$;

3) складываем результат с решением $(v_{0,g} + w_{f,0}, 0)$.

Указанное правило остается справедливым и в других случаях.

ТЕОРЕМА 9. Пусть векторы f_0 и g_0 действительны. Задача (1), (2) при $f = f_0 + \operatorname{Re} F_k^+ + \operatorname{Re} F_k^-$, $g = g_0 + \operatorname{Re} u_k^+ + \operatorname{Re} u_k^-$ имеет решение (V, P) , где

$$V = v_{0,g} + w_{f,0} + \operatorname{Re} ((v_k^+ + v_k^- + \widehat{w}_k^+ + \widehat{w}_k^-) \varphi_{g,0} \psi_{f,0}), \quad (73)$$

$$P = \operatorname{Re} ((p_k^+ + p_k^- + \widehat{q}_k^+ + \widehat{q}_k^-) \varphi_{g,0} \psi_{f,0}). \quad (74)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы проводится прямой проверкой.

Аналогично строятся и другие решения из этой серии. Имеются также классы явных решений иного типа, соответствующие волновым векторам, лежащим на плоскости или окружности.

Благодарности. Автор выражает благодарность академику В. А. Ильину и профессору М. Д. Рамазанову за внимание и поддержку, а также аспиранту А. Г. Хайбуллину за техническое оформление работы и разработку Интернет-сайта. Работа поддержана РФФИ (грант № 09-01-00349_а) и Программой Президиума РАН № 14.

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, *Избранное-60*, Фазис, М., 1997, 215–236.
- [2] В. В. Козлов, *Общая теория вихрей*, РХД, Ижевск, 1998.
- [3] В. В. Пухначев, *Успехи механики*, 4:1 (2006), 6–76.
- [4] S. Chandrasekhar, P. C. Kendall, *J. Astrophys.*, **126** (1957), 457–460.
- [5] J. B. Taylor, *Phys. Rev. Lett.*, **33**:19 (1974), 1139–1141.
- [6] D. Montgomery, L. Turner, G. Vahala, *Phys. Fluids*, **21**:5 (1978), 757–764.
- [7] P. C. Сакс, “Решение спектральной задачи для оператора ротор и оператора Стокса с периодическими краевыми условиями”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 36, Зап. научн. сем. ПОМИ, **318**, ПОМИ, СПб., 2004, 246–276.
- [8] P. C. Сакс, *Докл. АН СССР*, **416**:4 (2007), 446–450.
- [9] R. S. Saks, “The solution of spectral problems for the curl and Stokes operators with periodic boundary conditions and some classes of explicit solutions of Navier–Stokes equations”, *More Progress in Analysis*, Proc. V Int. ISAAC Congress (Italy, 2005), World Sci., Singapore, 2008, 1195–1207.
- [10] P. C. Сакс, *Докл. РАН*, **424**:2 (2009), 171–176.
- [11] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*. Т. VI. *Гидродинамика*, Наука, М., 1988.
- [12] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1988.
- [13] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М., 1970.
- [14] Р. И. Темам, *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ*, Фазис, М., 1997.
- [15] Х. П. Гринспен, *Теория вращающихся жидкостей*, Гидрометеоиздат, Л., 1975.
- [16] W. Thomson (Lord Kelvin), *Phil. Mag., Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. 5*, **10** (1880), 443–456.
- [17] R. R. Long, *J. Atmospheric Sci.*, **8**:4 (1951), 207–221.

- [18] D. Fultz, *J. Atmospheric Sci.*, **16**:2 (1959), 199–208.
- [19] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Internat. Ser. Monogr. Phys., The Clarendon Press, Oxford, 1981.
- [20] O. M. Phillips, *Phys. Fluids*, **6**:4 (1963), 513–520.
- [21] A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko, *Indiana Univ. Math. J.*, **48**:3 (1999), 1133–1176.
- [22] А. С. Махалов, В. П. Николаенко, *УМН*, **58**:2(350) (2003), 79–110.
- [23] А. Г. Хайбуллин, Р. С. Сакс, “О программе нахождения коэффициентов ряда Фурье и ее применение при исследовании системы Навье–Стокса в трехмерном торе с периодическими краевыми условиями”, *Сб. трудов IX международного семинара-совещания “Кубатурные формулы и их приложения”*, ИМ ВЦ УНЦ РАН, Уфа, 2007, 175–181.
- [24] С. Л. Соболев, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **18**:1 (1954), 3–50.
- [25] Р. С. Сакс, *Дифференц. уравнения*, **8**:1 (1972), 126–133.
- [26] Р. С. Сакс, “Применение функционального анализа к уравнениям с частными производными”, *Избранные труды. Т. II. Функциональный анализ. Дифференциальные уравнения с частными производными*, Труды семинара академика С. Л. Соболева, **83**, 1983, 129–158.
- [27] Р. С. Сакс, *ДАН СССР*, **279**:4 (1984), 813–817.
- [28] В. А. Ильин, *Избранные труды*, **Т. 1**, Макспресс, М., 2008.

Поступила в редакцию 1.10.2008,
после доработки 26.06.2009