Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, Эффект квантования числа вращения, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 2, 254–265

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6468>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:33:13

© 2010 г.

В. М. Бухштабер^{*†}, О. В. Карпов[†],
С. И. Тертычный[†]

ЭФФЕКТ КВАНТОВАНИЯ ЧИСЛА ВРАЩЕНИЯ

Изучается класс динамических систем на торе, включающий динамические системы, моделирующие динамику джозефсоновского перехода. Для систем этого класса вводятся характеристики, в том числе последовательность функций, зависящих от параметров системы. Доказывается, что если для данной точки пространства параметров последовательность сходится, то ее предел равен классическому числу вращения, а точка называется точкой квантования числа вращения. Доказывается, что число вращения такой системы в точке квантования принимает только целые значения. Таким образом, в пространстве параметров задаются области квантования, задача эффективного описания которых становится важной частью характеристики рассматриваемых систем. Приведены графики числа вращения в точках квантования и в условиях, когда оно не квантуется (пример полуцелого числа вращения). Приведены диаграммы областей квантования.

Ключевые слова: динамическая система на торе, число вращения, квантование, эффект Джозефсона.

В соответствии с классической теорией Пуанкаре–Данжуа [1]–[3] поведение решений системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = \mu G(x, y), \quad \dot{y} = F(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

где μ – вещественная константа, $G(x + 2\pi, y) = G(x, y + 2\pi) = G(x, y)$ и $F(x + 2\pi, y) = F(x, y + 2\pi) = F(x, y)$ – гладкие функции, характеризуется гомеоморфным отображением $\mathfrak{J}: C \rightarrow C$ окружности C на себя и числом вращения ν . В случае $\mu \rightarrow 0$ система (1) относится к классу так называемых быстро-медленных систем дифференциальных уравнений на торе [4]–[6]. В работе [5] показано, что при $G(x, y) = 1$ и $F(x, y) = a - \cos x - \cos y$ в случае $\mu \rightarrow 0$ система (1) обладает специфическими свойствами, не присущими общим системам на плоскости.

Цель настоящей работы – показать, что система (1) вида

$$\dot{x} = \mu, \quad \dot{y} = a_0 + f(x) - g(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

^{*}Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: buchstab@mi.ras.ru

[†]ФГУП “Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений”, Москва, Россия. E-mail: mera@vniiftri.org

где

$$f(x + 2\pi) = f(x) = f(x, \mu, \mathbf{M}), \quad \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0,$$

и

$$g(y + 2\pi) = g(y), \quad \int_0^{2\pi} g(y) dy = 0,$$

– гладкие функции, a_0 – вещественная константа, $\mathbf{M}$ – точка в пространстве $\mathfrak{R}$ параметров функции $f(x)$, обладает свойствами, не присущими общим системам на торе. Как будет показано ниже, для описания систем (2) характеристик $\mathfrak{J}$ и ν недостаточно. Мы введем новые характеристики: число квантования $m(\mu, a_0, \mathbf{M})$, функцию $\lambda(\mu, a_0, \mathbf{M})$ и функцию $i_s(\mu, a_0, \mathbf{M})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $g(y) = \sin y$ задача (2) соответствует задаче определения динамики фазы джозефсоновского перехода, где функция $f(x)$ играет роль тока смещения. В работах [7], [8] рассмотрена динамика фазы джозефсоновского перехода в режиме смещения синусоидальным или импульсным периодическим СВЧ-током. В этом случае функция ν описывает усредненное напряжение на джозефсоновском переходе, $m(\mu, a_0, \mathbf{M})$ – номер ступеньки Шапиро, функция $i_s(\mu, a_0, \mathbf{M})$ – туннельный сверхток, а функция $\lambda(\mu, a_0, \mathbf{M})$ со знаком минус – свободную энергию Гиббса барьера перехода [9]–[11].

Заметим, что в физике системы (2) появились в 60–70-е годы прошлого столетия и интенсивно изучались как теоретическая база эталонов вольты на эффекте Джозефсона. В частности, в работах [12]–[14] использовалась характеристика

$$m \equiv m(\tau, \mu, a_0, \mathbf{M}) = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} q_N(\tau, \mu, a_0, \mathbf{M}), \quad (3)$$

где

$$q_N(\tau, \mu, a_0, \mathbf{M}) = \{y(\tau + (N + 1)T, \mu, a_0, \mathbf{M}) - y(\tau + NT, \mu, a_0, \mathbf{M})\}, \quad (4)$$

$T = 2\pi/\mu$, $\mathbf{M} \in \mathfrak{R}$, $\tau \in [0, T]$, $N = 1, 2, 3, \dots$

В соответствии с работами [4], [6] определим число вращения как

$$\nu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t, \mu, a_0, \mathbf{M})}{\mu t}. \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что число вращения $\nu(\mu, a_0, \mathbf{M})$ квантуется в точке $\mathbf{M}$ на уровне a_0 , если для данной точки $\mathbf{M}$ можно найти такое $\varepsilon > 0$, что предел (3) существует для любого $a_0^* \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$ и не зависит от значения a_0^* .

Характеристика $m(\mu, a_0, \mathbf{M})$ (номер ступеньки Шапиро) использовалась нами в работах [7]–[11] при изучении динамики фазы φ джозефсоновского перехода на основе уравнения

$$\dot{\varphi} + \sin \varphi = a_0 + f(\mu t).$$

Как следует из работ [7]–[9], число вращения $\nu(\mu, a_0, \mathbf{M})$ квантуется в смысле определения 1 и принимает только целочисленные значения (см. приложение).

Рис. 1. Зависимость числа вращения $\nu(\mu, a_0, \mathbf{M})$ от a_0 в режиме квантования для некоторых $f(x)$: $f(x) = i_0 + i_1 \tilde{f}(x)$, где $\tilde{f}(x) = \gamma_n^{-1} \sin x$, $\gamma_n = \int_0^\pi \sin x dx$ (а); $f(x) = i_0 + i_1 \tilde{f}(x)$, где $\tilde{f}(x) = \gamma_n^{-1} \sin^n x$, $\gamma_n = \int_0^\pi \sin^n x dx$, $n = 21$ (б); $f(x) = i_0 + \tilde{f}(x)$, где $\tilde{f}(x) = \gamma^{-1} \sum_{k=1}^3 i_{2k+1} \sin(2k+1)x$ и $\int_0^\pi \tilde{f}(x) dx = i_1/2$ (в).

На рис. 1 приведены зависимости $\nu(\mu, a_0, \mathbf{M})$ от a_0 для функций $f(\mu t)$ для значений параметра $\mu = 0.3$ и $\mu = 2.0$ системы (2). На рис. 2, 3 показаны временные зависимости $y(t, \mu, a_0, \mathbf{M})$, отношения $y(t, \mu, a_0, \mathbf{M})/\mu t$ и последовательности $q_N(\tau, \mu, a_0, \mathbf{M})$.

Рассмотрим основные свойства числа вращения в режиме квантования.

ЛЕММА 1. Если число вращения $\nu(\mu, a_0, \mathbf{M})$ квантуется в точке $\mathbf{M}$ на уровне a_0 , то $\nu(\mu, a_0, \mathbf{M}) = m(\mu, a_0, \mathbf{M})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в точке $\mathbf{M}$ на уровне a_0 предел (3) существует, т.е. последовательность $q_N(\tau, \mu, a_0, \mathbf{M})$ при $N \rightarrow \infty$ сходится и имеет предел $2\pi m$. Тогда в соответствии с теоремой Чезаро последовательность средних

$$S_N = \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=1}^N q_k(\tau, \mu, a_0, \mathbf{M}) = \frac{y(\tau + (N+1)T, \mu, a_0, \mathbf{M}) - y(\tau + NT, \mu, a_0, \mathbf{M})}{\mu NT}. \quad (6)$$

сходится и имеет предел ν , т.е. $\nu(\mu, a_0, \mathbf{M}) = m(\mu, a_0, \mathbf{M})$.

Рис. 2. Временные зависимости решения $y(t, \mu, a_0, \mathbf{M})$ (а), отношения $y(t, \mu, a_0, \mathbf{M})/\mu t$ (б) и последовательности $q_N(\tau, \mu, a_0, \mathbf{M})$ (в) в режиме квантования. Параметры: $\mu = 0.31556$, $a_0 = 1.3$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в точке $\mathbf{M}$ на уровне a_0 предел (3) существует, то он существует для любого $\tau \in [0, T]$ и не зависит от значения τ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $m(\mu, a_0, \mathbf{M}) = \nu(\mu, a_0, \mathbf{M})$, а число вращения $\nu(\mu, a_0, \mathbf{M})$ существует всегда и не зависит от τ [6], то и число квантования m существует для любого $\tau \in [0, T]$ и не зависит от значения τ .

Положим

$$i_s \equiv i_s(\mu, a_0, \mathbf{M}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} g[y(t + NT, \mu, a_0, \mathbf{M})] dt \quad (7a)$$

и

$$\lambda \equiv \lambda(\mu, a_0, \mathbf{M}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{\tau}^{\tau+T} g'_y[y(t + NT, \mu, a_0, \mathbf{M})] dt. \quad (7б)$$

ЛЕММА 2. Квантование числа вращения ν в точке $\mathbf{M}$ на уровне a_0 эквивалентно тому, что предел (7а) существует в окрестности точки $\mathbf{M}$ для любого $a_0^* \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, и для любого $\tau \in [0, T]$, не зависит от значения τ и является линейной функцией a_0 .

Рис. 3. Временные зависимости решения $y(t, \mu, a_0, \mathbf{M})$ (а), отношения $y(t, \mu, a_0, \mathbf{M})/\mu t$ (б) и последовательности $q_N(\tau, \mu, a_0, \mathbf{M})$ (в) в режиме отсутствия квантования. Параметры: $\mu = 1$, $a_0 = 1.0625$, $i_1 = 0, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в точке $\mathbf{M}$ на уровне a_0 предел (3) существует в смысле определения 1. Интегрируя второе уравнение (2) по времени t в пределах $[\tau + NT, \tau + (N+1)T]$, учитывая (4), (7а) и свойства функции $f(x)$, а затем переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим

$$m\mu = a_0 - i_s(\mu, a_0, \mathbf{M}). \quad (8)$$

Учитывая, что m не зависит от a_0 и от $\tau \in [0, T]$ (см. следствие 1), а $\mu = \text{const}$, получим искомый результат. Справедливо и обратное утверждение, т.е. если предел (7а) существует в окрестности точки $\mathbf{M}$ для любого $a_0^* \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, то число вращения ν в точке $\mathbf{M}$ на уровне a_0 квантуется в смысле определения 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Условие $\dot{y}(t, \mu, a_0, \mathbf{M}) \neq \text{const}$ является необходимым условием квантования числа вращения в смысле определения 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, полагая, что $\dot{y}(t, \mu, a_0, \mathbf{M}) = \text{const}$, и перепиcывая (7а) в виде

$$i_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{y(\tau+NT)}^{y(\tau+(N+1)T)} \frac{g(y)}{\dot{y}} dy, \quad (9)$$

а также учитывая свойства функции $g(y)$ и характер поведения функции $y(\tau + NT, \mu, a_0, \mathbf{M})$ при $N \rightarrow \infty$, получим $i_s = 0$, т.е. величина $m = a_0/\mu$ зависит от a_0 . Это противоречит условию в смысле определения 1.

ЛЕММА 3. Пусть $g(y) = \sin y$. Если число вращения ν в точке $\mathbf{M}$ на уровне a_0 квантуется, то $\nu(\mu, \mathbf{M}) = m(\mu, \mathbf{M})$ принимает только целочисленные значения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в точке $\mathbf{M}$ на уровне a_0 предел (3) существует в смысле определения 1. Тогда согласно лемме 2 предел (7a) существует в окрестности точки $\mathbf{M}$ для любого $a_0^* \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, и для любого $\tau \in [0, T]$, не зависит от значения τ и является линейной функцией a_0 . Это означает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\tau}^{\tau+T} p_N(\tau, \mu, a_0, \mathbf{M}) d\tau = 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} p_N(\tau, \mu, a_0, \mathbf{M}) &= \sin y(\tau + (N+1)T, \mu, a_0, \mathbf{M}) - \sin y(\tau + NT, \mu, a_0, \mathbf{M}) = \\ &= \sin y_{N+1} - \sin y_N. \end{aligned} \quad (11)$$

В условиях квантования числа вращения функция $y(\tau + NT, \mu, a_0, \mathbf{M}) = y_N$ может быть представлена в виде

$$y_{N+1} = y_N + 2\pi m + \zeta_N(\tau, \mu, a_0, \mathbf{M}), \quad (12)$$

где $\zeta_N(\tau, \mu, a_0, \mathbf{M}) = \zeta_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Далее, используя (12) и представляя $p_N(\tau, \mu, a_0, \mathbf{M})$ в виде

$$p_N(\tau, \mu, a_0, \mathbf{M}) = 2 \sin\left(\pi m + \frac{\zeta_N}{2}\right) \cos\left(y_N + \pi m + \frac{\zeta_N}{2}\right), \quad (13)$$

учитывая, что $\zeta_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, получим

$$\sin(\pi m) \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\tau}^{\tau+T} \cos\left(y_N + \pi m + \frac{\zeta_N}{2}\right) dt = 0. \quad (14)$$

Выражение (14) выполняется в двух случаях.

Первый случай. Если число квантования целочисленное, т.е. $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, тогда $\sin(\pi m) = 0$ и выражение (14) также равно нулю в окрестности точки $\mathbf{M}$ для любого $a_0^* \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, для любого $\tau \in [0, T]$ и не зависит от значения τ .

Второй случай. Пусть число квантования не целочисленное, т.е. $m \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда для выполнения (14) необходимо, чтобы предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\tau}^{\tau+T} \cos\left(y_N + \pi m + \frac{\zeta_N}{2}\right) dt \quad (15a)$$

существовал и был равен нулю. Учитывая, что $y_N + \pi m + \zeta_N/2 = y_{N+1} - \pi m - \zeta_N/2$, перепишем условие (15a) в виде

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\tau}^{\tau+T} \cos\left(y_{N+1} - \pi m - \frac{\zeta_N}{2}\right) dt = 0. \quad (15b)$$

Далее, используя обозначения (7a) и (7б), а также соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \cos\left(y_N + \frac{\zeta_N}{2}\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \cos\left(y_{N+1} - \frac{\zeta_N}{2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \cos y_{N+1}, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sin\left(y_N + \frac{\zeta_N}{2}\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sin\left(y_{N+1} - \frac{\zeta_N}{2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sin y_{N+1}, \end{aligned} \quad (16)$$

получим

$$\begin{aligned} 2\alpha\lambda - \beta i_s &= 0, \\ 2\alpha\lambda + \beta i_s &= 0, \end{aligned} \quad \alpha = \cos(\pi m), \quad \beta = \sin(\tau m). \quad (17)$$

Из системы (17) следует, что если $\beta \neq 0$, то $i_s = 0$. Однако в этом случае, в соответствии с (8), $a_0 = \mu t$. Это означает, что $t = a_0/\mu$ зависит от a_0 , что противоречит условию квантования числа вращения в смысле определения 1. Поэтому величина t в режиме квантования принимает только целочисленные значения.

Будем считать, что, как и ранее, $g(y) = \sin y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что функция λ существует в точке $\mathbf{M} \in \mathfrak{X}$ на уровне a_0 , если в некоторой окрестности точки $\mathbf{M}$ можно найти такое $\varepsilon > 0$, что предел (76) существует для любого $a_0^* \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$. Подмножества $\mathfrak{X}_{\text{area}}$, состоящие из точек $\mathbf{M} \in \mathfrak{X}$ и точек $a_0^* \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$, где λ существует и $\lambda \neq 0$, будем называть зонами квантования или зонами захвата фазы.

ТЕОРЕМА 1. Число вращения ν квантуется в точке $\mathbf{M}$ на уровне a_0 в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда $\lambda(\mu, \mathbf{M}) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в точке $\mathbf{M}$ на уровне a_0 предел (3) существует и равен m , где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Заметим, что в соответствии с леммой 3 условие $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в режиме квантования эквивалентно отсутствию зависимости m от a_0 . Так как функции y_{N+1} и y_N являются решением системы (2), можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{N+1} &= a_0 + f(x) - \sin y_{N+1}, \\ \dot{y}_N &= a_0 + f(x) - \sin y_N. \end{aligned} \quad (18)$$

Если предел (3) существует, то справедливо соотношение (12). Учитывая (12) и условие $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а также выражения (17), для больших N в первом приближении по ζ_N получим

$$\begin{aligned} \dot{y}_{N+1} - \dot{y}_N &= \dot{\zeta}_N, \\ \sin y_{N+1} - \sin y_N &= \zeta_N \cos y_N. \end{aligned} \quad (19)$$

Вычитая второе уравнение (18) из первого и учитывая (19) и периодичность функции $f(x)$, получим следующее уравнение на функцию ζ_N :

$$\dot{\zeta}_N = -\zeta_N \cos y_N. \quad (20)$$

Решение уравнения (20) имеет вид

$$\zeta_N = L_0 \exp \left\{ - \int_0^{\tau+NT} \cos y(t) dt \right\}, \quad (21)$$

где L_0 – вещественная константа. Как следует из (21), для того чтобы $\zeta(\tau+NT) \rightarrow 0$ равномерно для любых $\tau \in [0, T]$ при $N \rightarrow \infty$, необходимо, чтобы предел (76) существовал, а λ было положительно.

Справедливо и обратное утверждение. Пусть в точке $\mathbf{M}$ на уровне a_0 предел (76) существует в смысле определения 2 и пусть $\lambda(\mu, \mathbf{M}) > 0$. Тогда в соответствии

Рис. 4. Примеры зон квантования для случая $f(x) = i_0 + i_1 \sin x$: в плоскости параметров (a_0, i_1) при $\mu = 0.3, 1.0, 2.0$ (а); в плоскости параметров (μ, a_0) при $i_1 = 0.9, 1.5, 3.0$ (б).

с (21) $\zeta(\tau + NT) \rightarrow 0$ равномерно при $N \rightarrow \infty$. В этих условиях выражение (12) эквивалентно существованию предела (3) в точке **М** на уровне a_0 в смысле определения 1.

Для качественного анализа свойств системы (2), в частности эффекта квантования числа вращения, зачастую удобным является использование метода диаграмм зон захвата фазы [9]–[11]. На рис. 4 для случая $f(x) = a_0 + i_1 \sin x$ приведены примеры зон захвата фазы в плоскости параметров (a_0, i_1) при $\mu = 0.3, 1.0, 2.0$ (рис. 4а) и в плоскости (μ, a_0) при $i_1 = 0.9, 1.5, 3.0$ (рис. 4б). Диаграммы построены методом интегрирования на периоде T [8].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Опишем более детально характеристики системы (2) с $g(y) = \sin y$, используя результаты работы [7]. Положим

$$u = e^{\xi/2} \cos \frac{y}{2}, \quad w = e^{\xi/2} \sin \frac{y}{2}, \quad \xi = \xi(t) = \int_0^t \cos y(\tau) d\tau. \quad (\text{П.1})$$

ЛЕММА 4. *Функции $x(t)$ и $y(t)$ дают решение системы*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu, \\ \dot{y} &= a_0 + f(x) - \sin y\end{aligned}\tag{П.2}$$

с $x(0) = 0$ и $y(0) = 0$ тогда и только тогда, когда функции $u(t)$ и $w(t)$ дают решение системы

$$\begin{aligned}2\dot{u} &= u - [a_0 + f(\mu t)]w, \\ 2\dot{w} &= [a_0 + f(\mu t)]u - w\end{aligned}\tag{П.3}$$

с $u(0) = 1$ и $w(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}2\dot{u} &= \dot{\xi}u - \dot{y}w = e^{\xi/2} \left(\cos y \cos \frac{y}{2} + \sin y \sin \frac{y}{2} \right) - [a_0 + f(\mu t)]w = u - [a_0 + f(\mu t)]w, \\ 2\dot{w} &= \dot{\xi}u + \dot{y}w = e^{\xi/2} \left(\cos y - \sin \frac{y}{2} \sin y \cos \frac{y}{2} \right) + [a_0 + f(\mu t)]u = [a_0 + f(\mu t)]u - w.\end{aligned}$$

Таким образом, для исследования системы (П.2), где $f(x)$ – периодическая функция, мы можем применить классическую теорию систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Обозначим через $\mathbf{W}(t)$ матрицу, столбцы которой составляют решение системы (П.3), такую, что $\mathbf{W}(0) = \mathbf{1}$ – единичная матрица. След матрицы системы (П.3) равен нулю, поэтому согласно тождеству Якоби мы имеем $\det \mathbf{W}(t) \equiv 1$. Матрица $\mathbf{W}(t)$ называется фундаментальной матрицей системы (П.3). Постоянная матрица $\mathbf{W}(T) = \mathbf{W}$, где $T = 2\pi/\mu$, называется матрицей монодромии. Собственные значения γ_1 и γ_2 матрицы $\mathbf{W}$ называются мультипликаторами системы (П.3).

Фундаментальную матрицу можно записать в виде

$$\mathbf{W}(t) = \Phi(t)e^{\rho t},$$

где $\Phi(t)$ – непрерывная T -периодическая матрица, $\Phi(0) = \mathbf{1}$, $\rho = (1/T) \ln \mathbf{W}(T)$ – постоянная матрица. Собственные значения ρ_1 и ρ_2 матрицы ρ называются характеристическими показателями. Числа γ_k и ρ_k связаны соотношением

$$\rho_k = \frac{1}{T} \ln \gamma_k = \frac{1}{T} [\ln |\gamma_k| + j \arg \gamma_k],$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Обозначим через $\mathbf{A}$ матрицу, столбцы которой являются собственными векторами матрицы монодромии $\mathbf{W}$, т.е.

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Введем последовательности матриц на интервале $[0, T]$:

$$\mathbf{W}_N^+(\tau) = \mathbf{W}_N(\tau + NT), \quad \mathbf{W}_N^-(\tau) = \mathbf{W}_N(\tau - NT), \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Далее мы приведем вычисления только для последовательности $\{\mathbf{W}_N^+ = \mathbf{W}_N\}$, так как для $\{\mathbf{W}_N^-\}$ они полностью аналогичны. Имеем согласно лемме 4

$$\mathbf{W}_N(\tau + NT) = \begin{pmatrix} u_{1,N} & u_{2,N} \\ w_{1,N} & w_{2,N} \end{pmatrix},$$

где

$$u_{1,N} = u_N = e^{\xi_N/2} \cos \frac{y_N}{2}, \quad w_{1,N} = w_N = e^{\xi_N/2} \sin \frac{y_N}{2}.$$

Здесь $y_N(\tau) = y(\tau + NT)$ и $\xi_N(\tau) = \xi(\tau + NT)$.

Таким образом,

$$e^{jy_N(\tau)} = \cos y_N + j \sin y_N = \frac{u_N + jw_N}{u_N - jw_N}. \quad (\text{П.4})$$

Используя, что $\det \mathbf{W}_N(\tau) \equiv 1$, получаем $u_N^2 + w_N^2 \neq 0$ для любого τ . Тогда $\mathbf{W}_0(\tau) = \mathbf{W}(\tau)$ – фундаментальная матрица и для любого N столбцы матрицы $\mathbf{W}_N(\tau)$ составляют решения системы (П.3) такие, что $\mathbf{W}_N(0) = \mathbf{W}(NT)$. Следовательно,

$$\mathbf{W}_N(\tau) = \mathbf{W}(\tau) \mathbf{W}^N, \quad (\text{П.5})$$

где

$$\mathbf{W}^N = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \gamma_1^N & 0 \\ 0 & \gamma_2^N \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u_N &= \alpha_{11} \gamma_1^N + \alpha_{12} \gamma_2^N, \\ w_N &= \alpha_{21} \gamma_1^N + \alpha_{22} \gamma_2^N, \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

где $\alpha_{kl} = \alpha_{kl}(\tau)$ – функции, не зависящие от N .

Выражение функций α_{kl} в терминах фундаментальной матрицы системы (П.3) на интервале $[0, T]$ непосредственно следует из формул (П.5) (подробнее см. [7]). Согласно формуле (П.4) теперь получаем

$$\cos y_N(\tau) + j \sin y_N(\tau) = \frac{c_1 \gamma_1^N + c_2 \gamma_2^N}{\bar{c}_1 \gamma_1^N + \bar{c}_2 \gamma_2^N}, \quad (\text{П.7})$$

где $c_1 = c_1(\tau) = \alpha_{11}(\tau) + j\alpha_{21}(\tau)$ и $c_2 = c_2(\tau) = \alpha_{12}(\tau) + j\alpha_{22}(\tau)$.

След матрицы системы (П.3) равен нулю, поэтому $\det \mathbf{W} = 1$. Таким образом,

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 2a, \quad \gamma_1 \gamma_2 = 1,$$

где вещественное число $2a$ – след матрицы $\mathbf{W}$. Получаем $\gamma_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Следовательно, если $|a| \geq 1$, то γ_1 и γ_2 – вещественные числа, и в этом случае $2|a| = |\gamma_1 + \gamma_1^{-1}| \geq 2$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = \pm 1$. Таким образом, справедливы следующие утверждения.

1. При $|a| = 1$ имеем $\gamma_1 = \gamma_2 = a$. Следовательно, $\mathbf{W}_N(\tau) = \Phi(t)$ – периодическая матрица, не зависящая от N , и

$$\cos y_N(\tau) + j \sin y_N(\tau) = \frac{c_1(\tau) + c_2(\tau)}{\bar{c}_1(\tau) + \bar{c}_2(\tau)}.$$

Пусть $|a| > 1$. Тогда $\gamma_1 = \gamma$ – вещественное число, $|\gamma| \neq 1$, $\gamma_2 = \gamma^{-1}$.

2. При $|\gamma| > 1$ последовательность (П.7) сходится равномерно на интервале $[0, T]$ к $c_1(\tau)/\bar{c}_1(\tau)$ при $N \rightarrow \infty$ и к $c_2(\tau)/\bar{c}_2(\tau)$ при $N \rightarrow -\infty$.

3. При $|\gamma| < 1$ последовательность (П.7) сходится равномерно на интервале $[0, T]$ к $c_2(\tau)/\bar{c}_2(\tau)$ при $N \rightarrow \infty$ и к $c_1(\tau)/\bar{c}_1(\tau)$ при $N \rightarrow -\infty$.

Пусть теперь $|a| < 1$. Тогда γ_1 не является вещественным числом, т.е. $\gamma_1 = \gamma = |\gamma|e^{j\eta}$, где $\eta \neq 0$ и $\eta \neq \pi$. Из условия $\gamma + \gamma^{-1} = 2a$, где a – вещественное число, получаем, что $(|\gamma| - |\gamma|^{-1}) \sin \eta = 0$, т.е. $|\gamma| = 1$. В этом случае последовательность (П.7) не является сходящейся.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ – решение системы (П.2). Тогда последовательности функций $\{\cos y_N(\tau)\}$ и $\{\sin y_N(\tau)\}$ сходятся на интервале $[0, T]$ при $N \rightarrow \infty$, а также к другому пределу при $N \rightarrow -\infty$ тогда и только тогда, когда $|\text{Tr } \mathbf{W}|/2 = |a| > 1$. Более того, при $|a| > 1$ эти последовательности сходятся равномерно, их пределы полностью определяются фундаментальной матрицей $\mathbf{W}(\tau)$ системы (П.3).

В качестве следствия теоремы 2 дадим описание характеристик m , i_s и λ системы (П.2) в терминах матрицы $\mathbf{W}(\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\frac{c_k(\tau)}{\bar{c}_k(\tau)} = e^{j\psi_k(\tau)}.$$

При $|\gamma| > 1$ имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \cos y_N(\tau) = \cos \psi_1(\tau), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sin y_N(\tau) = \sin \psi_1(\tau).$$

Используя равномерную сходимость рассматриваемых последовательностей, получим согласно формуле (7a)

$$i_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \sin y_N(t) dt = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \sin \psi_1(t) dt.$$

Аналогично по формуле (7б) получим

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{\tau}^{\tau+T} \cos y_N(t) dt = \frac{1}{2T} \int_{\tau}^{\tau+T} \cos \psi_1(t) dt.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} [\xi_{N+1}(\tau) - \xi_N(\tau)] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\tau+(N+1)T} \cos y_N(t) dt - \int_0^{\tau+NT} \cos y_N(t) dt \right\} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\tau+NT}^{\tau+(N+1)T} \cos y_N(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\tau}^{\tau+T} \cos y_N(t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{1}{2T} \lim_{N \rightarrow \infty} [\xi_{N+1}(\tau) - \xi_N(\tau)].$$

Из формулы (8) получаем

$$m\mu = a_0 - \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \sin \psi_1(t) dt.$$

Более того, используя следствие 1, запишем

$$m = \frac{a_0}{\mu} - \frac{1}{2\pi} \int_{\tau}^{\tau+T} \sin \psi_1(t) dt.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ – решение системы (II.2). Тогда последовательность (4) сходится к $2\pi m$, где m – целое число, тогда и только тогда, когда $|a| \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (II.7) получаем

$$e^{jq_N(\tau)} = \frac{c_1 \gamma_1^{N+1} + c_2 \gamma_2^{N+1}}{\bar{c}_1 \gamma_1^{N+1} + \bar{c}_2 \gamma_2^{N+1}} \cdot \frac{\bar{c}_1 \gamma_1^N + \bar{c}_2 \gamma_2^N}{c_1 \gamma_1^N + c_2 \gamma_2^N}.$$

Из теоремы 2 получаем, что последовательность функций $\{e^{jq_N(\tau)}\}$ сходится при $N \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $|a| \geq 1$. Более того, предел этой последовательности равен 1, а это возможно, только когда $\lim_{N \rightarrow \infty} q_N(\tau) = 2\pi m$, где m – целое число.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00197_а).

Список литературы

- [1] Л. И. Перов, И. Ю. Эгле, *Дифференц. уравнения*, **8**:5 (1972), 801–810.
- [2] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.
- [3] Л. Чезари, *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1964.
- [4] Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М., 1975.
- [5] J. Guckenheimer, Yu. Ilyashenko, *Mosc. Math. J.*, **1**:1 (2001), 27–47.
- [6] В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [7] В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, *УМН*, **59**:2 (2004), 187–188.
- [8] С. И. Тертычный, *УМН*, **55**:1(331) (2000), 195–196.
- [9] O. V. Karpov, V. M. Buchstaber, S. I. Tertychniy, J. Niemeyer, O. Kieler, *J. Appl. Phys.*, **104**:9 (2008), 093910.
- [10] В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, *ЖЭТФ*, **124**:3 (2003), 691–699.
- [11] В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, *РЭ*, **51**:6 (2006), 757–762.
- [12] А. Бароне, Дж. Патерно, *Эффект Джозефсона. Физика и применение*, Мир, М., 1984.
- [13] R. L. Kautz, *J. Appl. Phys.*, **52**:5 (1981), 3528–3541.
- [14] R. L. Kautz, *J. Appl. Phys.*, **76**:9 (1994), 5538–5544.

Поступила в редакцию 7.09.2009