Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, Ф. Т. Ишанкулов, Описание p -гармонических функций на дереве Кэли, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 2, 266–274

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 09:08:40

© 2010 г.

У. А. Розиков*, Ф. Т. Ишанкулов†

ОПИСАНИЕ p -ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Конструктивно описаны некоторые p -гармонические функции на дереве Кэли, а также изучены линейные соотношения между такими функциями.

Ключевые слова: дерево Кэли, группа, p -гармоническая функция, лапласиан.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дерево – это связанный граф без циклов. Одним из частных случаев дерева является дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$, т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер (дерево Кэли порядка $k \geq 1$), где V – множество вершин и L – множество ребер.

Известно, что дерево Кэли представляется как группа G_k , являющаяся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ [1], [2].

В работах [1]–[4] с использованием группового представления дерева Кэли были исследованы модели статистической механики и описаны множества периодических мер Гиббса, а также изучены траектории случайных блужданий в случайных средах на дереве Кэли. В работе [5] с учетом некоторых свойств группы G_k описано множество обобщенных гармонических функций.

p -Гармонические функции играют важную роль в теории вероятности, динамических системах, статистической механике и теории электрических цепей [6].

Заметим, что p -гармоническая функция является нулем p -лапласиана

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad (1)$$

где $1 < p < \infty$.

Мы рассмотрим уравнение $\Delta_p u = 0$ на (дискретном) дереве Кэли.

*Институт математики и информационных технологий АНРУз, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: rozikovu@yandex.ru, rozikovu@mail.ru

†Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: fandor83@mail.ru

Для $x \in G_k$ обозначим

$$S(x) = \{y \in G_k : y = xa_i, i = 1, \dots, k+1\}.$$

Векторное поле (функция) на Γ^k понимается как вещественнозначная функция, определенная на множестве ребер L (вершин V).

Если u – некоторая заданная функция на Γ^k , то ее градиент ∇u есть векторное поле, определенное формулой

$$\nabla u(x, y) = r(x, y)^{-1}(u(y) - u(x)), \quad (2)$$

где $r: L \rightarrow R_+$ – некоторая функция, причем $r(y, x) = r(x, y)$ (см. работы [7], [8]).

Если U – заданное векторное поле на Γ^k , то его дивергенция является функцией на Γ^k и определяется формулой (см. работу [8])

$$\operatorname{div} U(x) = \sum_{y \in S(x)} U(x, y). \quad (3)$$

Дискретный лапласиан Δu и p -лапласиан $\Delta_p u$ функции u на Γ^k определяются как

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u), \quad \Delta_p u = \operatorname{div}(\nabla u |\nabla u|^{p-2}), \quad (4)$$

где $1 < p < \infty$ [7], [8].

Заметим, что $\Delta u = \Delta_2 u$. Из формул (2)–(4) получим

$$\Delta_p u = \sum_{y \in S(x)} |\nabla u(x, y)|^{p-2} \nabla u(x, y). \quad (5)$$

Пусть $D \subset G_k$. Если $\Delta_p u = 0$ на D , то функция u называется p -гармонической в D .

Пусть $\{u_1, \dots, u_m\}$ – m -совокупность p -гармонических функций в D . Если $p \neq 2$, то линейная комбинация p -гармонических функций $u_1, \dots, u_m$ может не быть p -гармонической [3], [8]. Говорят, что m -совокупность $\{u_1, \dots, u_m\}$ p -гармонических функций имеет линейное соотношение, если $\sum_{j=1}^m t_j u_j$ является p -гармонической в D для $t_1, \dots, t_m \in R \setminus \{0\}$.

В данное время не существует теории функциональных уравнений с неизвестной функцией, определенной на дереве. Нахождение всех решений уравнения $\Delta_p u = 0$ на дереве – нелегкая задача. С другой стороны, теория функциональных уравнений недостаточно хорошо развита даже в том случае, когда неизвестная функция определена в R . Известны некоторые специальные виды решений функциональных уравнений [3]–[10].

Главная цель этой статьи – построение продолжений p -гармонических функций с дерева Кэли меньшего порядка на дерево Кэли более высокого порядка. Мы также построим p -гармонические функции, которые являются продолжениями функций Кураты [8].

2. ПРОДОЛЖЕНИЯ p -ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ДЕРЕВА КЭЛИ МЕНЬШЕГО ПОРЯДКА НА ДЕРЕВО КЭЛИ БОЛЕЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Фиксируем $k_1, k_2 \in N$, $k_2 > k_1$. Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_{k_1+1}\}$ – множество образующих группы G_{k_1} , $\{a_1, a_2, \dots, a_{k_2+1}\}$ – множество образующих группы G_{k_2} и e – единичный элемент. Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} \varphi: \{a_1, a_2, \dots, a_{k_2+1}\} &\rightarrow \{e, a_1, a_2, \dots, a_{k_1+1}\}, \\ \varphi(a_i) &= \begin{cases} a_i, & \text{если } i \leq k_1 + 1, \\ e, & \text{если } i > k_1 + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть отображение $g: G_{k_2} \rightarrow G_{k_1}$ определено формулой

$$g(x) = g(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}) = \varphi(a_{i_1}) \dots \varphi(a_{i_m}). \quad (6)$$

Легко видеть, что g является гомоморфизмом.

Пусть совокупность $\mathcal{R} = \{r(x, y) > 0: r(x, y) = r(y, x), (x, y) \in L\}$ является g -периодической, т.е.

$$r(g(x), g(y)) = r(x, y)$$

для всех ребер (x, y) ; $g(x) \neq g(y)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha(x)$ – p -гармоническая функция на дереве Кэли G_{k_1} . Пусть совокупность $\mathcal{R}$ является g -периодической на G_{k_2} , где $k_2 > k_1$. Тогда существует p -гармоническая функция $\beta(x)$ на G_{k_2} такая, что

$$\beta(x) = \alpha(x)$$

для всех $x \in G_{k_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим функцию

$$\beta(x) = \alpha(g(x)) \quad (7)$$

для всех $x \in G_{k_2}$. Так как при $x \in G_{k_1}$ имеет место $g(x) = x$, то из формулы (6) следует $\beta(x) = \alpha(x)$ для всех $x \in G_{k_1}$. Теперь проверим, что $\beta(x)$ есть p -гармоническая функция на G_{k_2} .

1) Пусть $x \in G_{k_1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_p \beta(x) &= \sum_{y \in S(x)} \frac{|\beta(y) - \beta(x)|^{p-2}}{r^{p-1}(x, y)} (\beta(y) - \beta(x)) = \\ &= \sum_{y \in S(x) \cap G_{k_1}} \frac{|\alpha(y) - \alpha(x)|^{p-2}}{r^{p-1}(x, y)} (\alpha(y) - \alpha(x)) + \\ &\quad + \sum_{y \in S(x) \cap (G_{k_2} \setminus G_{k_1})} \frac{|\beta(y) - \beta(x)|^{p-2}}{r^{p-1}(x, y)} (\beta(y) - \beta(x)) = \\ &= \Delta_p \alpha(x) + \sum_{y \in S(x) \cap (G_{k_2} \setminus G_{k_1})} \frac{|\alpha(g(y)) - \alpha(x)|^{p-2}}{r^{p-1}(x, y)} (\alpha(g(y)) - \alpha(x)). \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что для всех $y \in S(x) \cap (G_{k_2} \setminus G_{k_1})$ существует $j > k_1 + 1$ такое, что $y = xa_j$. Следовательно, $g(y) = g(x)g(a_j) = g(x) = x$ и $\alpha(g(y)) = \alpha(x)$, откуда вытекает

$$\sum_{y \in S(x) \cap (G_{k_2} \setminus G_{k_1})} \frac{|\alpha(g(y)) - \alpha(x)|^{p-2}}{r^{p-1}(x, y)} (\alpha(g(y)) - \alpha(x)) = 0.$$

Так как $\alpha(x)$ есть p -гармоническая функция на G_{k_1} , то $\Delta_p \alpha(x) = 0$. Поэтому из формулы (8) получаем $\Delta_p \beta(x) = 0$.

2) Пусть $x \in G_{k_2} \setminus G_{k_1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_p \beta(x) &= \sum_{y \in S(x)} \frac{|\alpha(g(y)) - \alpha(g(x))|^{p-2}}{r^{p-1}(x, y)} (\alpha(g(y)) - \alpha(g(x))) = \\ &= \sum_{y \in S(x): g(y)=g(x)} \frac{|\alpha(g(y)) - \alpha(g(x))|^{p-2}}{r^{p-1}(x, y)} (\alpha(g(y)) - \alpha(g(x))) + \\ &\quad + \sum_{y \in S(x): g(y) \neq g(x)} \frac{|\alpha(g(y)) - \alpha(g(x))|^{p-2}}{r^{p-1}(x, y)} (\alpha(g(y)) - \alpha(g(x))) = \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Ясно, что $\Sigma_1 = 0$. Поскольку $y \in S(x)$, $x \in G_{k_2} \setminus G_{k_1}$, то по определению g имеем $g(y) \in S(g(x))$. В силу g -периодичности совокупности $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{y \in S(x): g(y) \neq g(x)} \frac{|\alpha(g(y)) - \alpha(g(x))|^{p-2}}{r^{p-1}(g(x), g(y))} (\alpha(g(y)) - \alpha(g(x))) = \\ &= \sum_{z \in S(g(x))} \frac{|\alpha(z) - \alpha(g(x))|^{p-2}}{r^{p-1}(g(x), z)} (\alpha(z) - \alpha(g(x))) = \Delta_p \alpha(g(x)) = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Расстояние $d(x, y)$ между вершинами $x, y \in V$ определяется следующим образом: $d(x, y)$ есть минимум по всем d таким, что найдутся вершины $x_0 = x, x_1, \dots, x_d = y \in V$, для которых $(x_i, x_{i+1}) \in L$ при всех $i = 0, 1, \dots, d-1$. На дереве Γ^k можно ввести частичное упорядочение, положив $y > x$, если существует путь $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ из x в y , идущий вверх, т.е. такой, что $d(x_{q+1}, e) = d(x_q, e) + 1$, $q = 1, \dots, n$. Множество вершин $V_x = \{y \in V \mid y \geq x\}$ и соединяющие их ребра образуют полубесконечное дерево Γ_x^k , "растущее" из вершины $x \in V$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha(x)$ – p -гармоническая функция на дереве Кэли G_{k_1} . Тогда для любых $k_1, k_2, k_2 > k_1$, существует p -гармоническая функция $\gamma(x)$ на G_{k_2} такая, что

$$\gamma(x) = \alpha(x)$$

при $x \in G_{k_1}$. Более того,

$$\gamma(x) = \alpha(t)$$

для всех $x \in \Gamma_t^{k_2}$, $t \in G_{k_2} \setminus G_{k_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi(x, e)$ и $\pi(y, e)$ – пути, соединяющие точки x, e и y, e . Через $\pi(x, e) \cap \pi(y, e)$ обозначим точку $z \in \pi(x, e) \cap \pi(y, e)$ такую, что $d(e, z) \geq d(e, t)$ для всех $t \in \pi(x, e) \cap \pi(y, e)$. Заметим, что для любых x, y такая z единственна.

Пусть $x \in G_{k_2}$. Обозначим через t_x единственную точку из G_{k_1} такую, что

$$d(t_x, e) = \max_{y \in G_{k_1} \cap \pi(x, e)} d(y, e).$$

Определим функцию $\gamma(x)$ на G_{k_2} формулой

$$\gamma(x) = \begin{cases} \alpha(x), & \text{если } x \in G_{k_1}, \\ \alpha(t_x), & \text{если } x \in G_{k_2} \setminus G_{k_1}. \end{cases} \quad (10)$$

Проверим, что $\gamma(x)$ есть p -гармоническая функция на G_{k_2} .

1) Пусть $x \in G_{k_1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_p \gamma(x) &= \sum_{y \in S(x) \cap G_{k_1}} \frac{|\alpha(y) - \alpha(x)|^{p-2}}{r^{p-1}(x, y)} (\alpha(y) - \alpha(x)) + \\ &+ \sum_{y \in S(x) \cap (G_{k_2} \setminus G_{k_1})} \frac{|\gamma(y) - \gamma(x)|^{p-2}}{r^{p-1}(x, y)} (\gamma(y) - \gamma(x)) = \\ &= \Delta_p \alpha(x) + \sum_{y \in S(x) \cap (G_{k_2} \setminus G_{k_1})} \frac{|\alpha(t_y) - \alpha(x)|^{p-2}}{r^{p-1}(x, y)} (\alpha(t_y) - \alpha(x)) = 0. \end{aligned}$$

Последняя сумма равна нулю, так как $t_y = x$ для всех $y \in S(x) \cap (G_{k_2} \setminus G_{k_1})$.

2) Пусть $x \in G_{k_2} \setminus G_{k_1}$. Тогда по построению имеем $\alpha(t_y) = \alpha(t_x)$ для всех $x \in G_{k_2} \setminus G_{k_1}, y \in S(x)$. Следовательно,

$$\Delta_p \gamma(x) = \sum_{y \in S(x)} \frac{|\alpha(t_y) - \alpha(t_x)|^{p-2}}{r^{p-1}(x, y)} (\alpha(t_y) - \alpha(t_x)) = 0.$$

Из формулы (10) видно, что

$$\gamma(x) = \alpha(t)$$

для всех $x \in \Gamma_t^k, t \in G_{k_2} \setminus G_{k_1}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Функция $\gamma(x)$, построенная в теореме 2, отличается от функции $\beta(x)$, построенной в теореме 1, тем, что на $\Gamma_t^{k_2}, t \in G_{k_2} \setminus G_{k_1}$, $\gamma(x)$ является постоянной относительно x и зависящей от t , но функция $\beta(x)$ не является постоянной функцией на $\Gamma_t^{k_2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ясно, что $G_{k_2} \setminus G_{k_1}$ разбивается на счетное число связанных компонент

$$\Gamma_t^{k_2}, \quad t \in \partial G_{k_1} = \{y \in G_{k_2} \setminus G_{k_1} : \exists x \in G_{k_1} \text{ такое, что } x \text{ и } y \text{ – соседние}\}.$$

С помощью $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ можно построить новую p -гармоническую функцию $u(x) = u_{\beta\gamma}(x)$ следующим образом: разделим компоненты $\Gamma_t^{k_2}, t \in G_{k_2} \setminus G_{k_1}$, на два класса; в первом определим функцию $u(x)$, как в теореме 1, а во втором – как в теореме 2. Тогда легко проверить, что $u(x)$ также является p -гармонической функцией на G_{k_2} .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В работе [3] описаны некоторые множества периодических p -гармонических функций на дереве Кэли. Применяя теоремы 1 и 2, можно продолжить эти функции с дерева Кэли малого порядка на дерево Кэли более высоких порядков.

3. ПРОДОЛЖЕНИЕ p -ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ КУРАТЫ НА ДЕРЕВО КЭЛИ

В этом параграфе на основании p -гармонических функций, построенных в работе Кураты (см. работу [8]), мы построим новые p -гармонические функции на дереве Кэли. Пусть τ есть дерево, состоящее из m полулиний с общей начальной точкой x_0 , т.е. множеством вершин дерева τ является $\Lambda = \{x_0\} \cup \bigcup_{i=1}^m \{x_{i,k}\}_{k=1}^\infty$, где $x_{i,0} = x_0$ для любого $i = \overline{1, m}$. Пусть E – множество ребер дерева τ и $r = r(x, y) > 0$, $(x, y) \in E$, – произвольная функция сопротивления на E . Рассмотрим функции Кураты, определенные на Λ :

$$u_i(x_0) = 0,$$

$$u_i(x_{j,k}) = \begin{cases} r(x_0, x_{j,1}) + r(x_{j,1}, x_{j,2}) + \dots + r(x_{j,k-1}, x_{j,k}), & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad (11)$$

для $i = 1, \dots, m$. В работе [8] доказаны следующие свойства функций (11).

1. Каждая функция u_i является p -гармонической в $\Lambda \setminus \{x_0\}$, и m -строка $\{u_1, \dots, u_m\}$ функции имеет линейное соотношение в $\Lambda \setminus \{x_0\}$.

2. Каждая разность $v_{i,j} = u_i - u_j$ является p -гармонической в Λ . Кроме того, если $M = \{(i_1, j_1), \dots, (i_\mu, j_\mu)\} \subset \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, m\}$ – множество такое, что $i_1, j_1, \dots, i_\mu, j_\mu$ – различные числа, то $\{v_{i,j}\}_{(i,j) \in M}$ имеет линейное соотношение в Λ .

3. $(m-1)$ -Строка $\{v_{1,2}, v_{1,3}, \dots, v_{1,m}\}$ частично линейно связана в Λ .

Рассмотрим на дереве Кэли m , $m \leq k+1$, различных путей $\pi_i = \{x_{i,j}\}_{j=1}^\infty$, $i = \overline{1, m}$, начинающихся из e и не имеющих других общих точек.

Пусть $\pi(x, e)$ и $\pi(y, e)$ – пути, начинающиеся в точке e . Через $\pi(x, e) \wedge \pi(y, e)$ обозначим точку $z \in \pi(x, e) \cap \pi(y, e)$ такую, что $d(e, z) \geq d(e, t)$ для всех $t \in \pi(x, e) \cap \pi(y, e)$.

Определим функции α_i , $i = \overline{1, m}$, на дереве Кэли следующим образом:

$$\alpha_i(x) = u_i(x_{j,q}), \quad (12)$$

если $\pi(x, e) \wedge \pi_j = x_{j,q}$, где u_i определены формулой (11).

ТЕОРЕМА 3. 1. Каждая функция α_i , определенная формулой (12), является p -гармонической функцией, определенной на $V \setminus \{e\}$. m -Совокупность $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ p -гармонических функций имеет линейное соотношение в $V \setminus \{e\}$.

2. Функция $\beta_{i,j} = \alpha_i - \alpha_j$ является p -гармонической на V . Пусть

$$M = \{(i_1, j_1), \dots, (i_\mu, j_\mu)\} \subset \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, m\}$$

таково, что $i_1, j_1, \dots, i_\mu, j_\mu$ – различные целые числа. Тогда $\{\beta_{i,j}\}_{(i,j) \in M}$ имеет линейное соотношение в V .

3. Совокупность $\{\beta_{1,2}, \beta_{1,3}, \dots, \beta_{1,m}\}$ имеет частичное линейное соотношение в V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если

$$d(x, \pi_i) = \min_{y \in \pi_i} d(x, y) \geq 1$$

для любого $i = \overline{1, m}$, то очевидно, что $\Delta\alpha_i(x) = 0$. Теперь рассмотрим $d(x, \pi_i) = 0$ для некоторого $i \in \{1, \dots, m\}$. Пусть $x = x_{j,k} \in \pi_j \setminus \{e\}$.

Тогда мы должны доказать, что каждая $\alpha_i(x)$ есть p -гармоническая функция на $V \setminus \{e\}$, и m -строка $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ имеет линейное соотношение в $V \setminus \{e\}$:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_i(x) &= \Delta\alpha_i(x_{j,k}) = \left| \frac{\alpha_i(x_{i,k-1}) - \alpha_i(x_{i,k})}{r(x_{i,k-1}, x_{i,k})} \right|^{p-2} \frac{\alpha_i(x_{i,k-1}) - \alpha_i(x_{i,k})}{r(x_{i,k-1}, x_{i,k})} + \\ &+ \left| \frac{\alpha_i(x_{i,k+1}) - \alpha_i(x_{i,k})}{r(x_{i,k+1}, x_{i,k})} \right|^{p-2} \frac{\alpha_i(x_{i,k+1}) - \alpha_i(x_{i,k})}{r(x_{i,k+1}, x_{i,k})} + \\ &+ \sum_{y \in S(x_{j,k}) \setminus \{x_{j,k-1}, x_{j,k+1}\}} \left| \frac{\alpha_i(y) - \alpha_i(x_{i,k})}{r(y, x_{i,k})} \right|^{p-2} \frac{\alpha_i(y) - \alpha_i(x_{i,k})}{r(y, x_{i,k})} = \\ &= -1 + 1 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что m -совокупность $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ p -гармонических функций, определенных равенством (12), имеет линейное соотношение в $V \setminus \{e\}$.

Рассмотрим функцию $\alpha(x) = \sum_{j=1}^m t_j \alpha_j(x)$ на $V \setminus \{e\}$.

А. Пусть $x \in G_k \setminus \bigcup_{i=1}^m \pi_i$.

Тогда по построению α_j имеем $\alpha_j(x) = \alpha_j(y)$ для всех $y \in S(x)$. Следовательно, $\alpha(x) = \alpha(y)$ для всех $y \in S(x)$ и $\Delta_p \alpha(x) = 0$ для всех $x \in G_k \setminus \bigcup_{i=1}^m \pi_i$.

Б. Пусть $x \in \bigcup_{i=1}^m \pi_i \setminus \{e\}$. Не ограничивая общности, можно рассмотреть случай, когда $x \in \pi_1 \setminus \{e\}$, т.е. $x = x_{1,j}$.

Тогда

$$\alpha_j(x) = \begin{cases} u_1(x), & \text{если } j = 1, \\ 0, & \text{если } j \neq 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^m t_j \alpha_j(x) = t_1 \alpha_1(x) = t_1 u_1(x), \quad \alpha(y) = \alpha(x)$$

при $y \in S(x) \setminus \{x_{1,j-1}, x_{1,j+1}\}$,

$$\begin{aligned} \Delta_p \alpha(x) &= \Delta_p(t_1 u_1(x)) = \sum_{y \in \{x_{1,j-1}, x_{1,j+1}\}} \frac{|t_1 u_1(y) - t_1 u_1(x)|^{p-2}}{r^{p-1}(x, y)} (t_1 u_1(y) - t_1 u_1(x)) = \\ &= t_1^{p-1} \sum_{y \in \{x_{1,j-1}, x_{1,j+1}\}} \frac{|u_1(y) - u_1(x)|^{p-2}}{r^{p-1}(x, y)} (u_1(y) - u_1(x)) = t^{p-1} \Delta_p u_1(x) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ имеет линейное соотношение в $V \setminus \{e\}$.

2. Пусть $\beta_{i,j}(x) = \alpha_i(x) - \alpha_j(x)$ и $\varphi_p(t) = |t|^{p-2}t$. Имеем

$$\begin{aligned}\Delta_p \beta_{i,j}(e) &= \varphi_p(\nabla \alpha_i(e, x_{i,1})) - \varphi_p(\nabla \alpha_j(e, x_{j,1})), \quad \nabla \alpha_i(e, x_{i,1}) = \frac{\alpha_i(x_{i,1}) - \alpha_i(e)}{r(e, x_{i,1})} = 1, \\ \nabla \alpha_j(e, x_{j,1}) &= \frac{\alpha_j(x_{j,1}) - \alpha_j(e)}{r(e, x_{j,1})} = 1, \quad \Delta_p \beta_{i,j}(e) = 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$

В остальных случаях $\beta_{i,j}(x) = \alpha_i(x_{i,k})$ или $\beta_{i,j}(x) = \alpha_j(x_{j,k})$. Эти случаи уже проверены нами в п. 1.

3. Совокупность $\{\beta_{1,2}, \beta_{1,3}, \dots, \beta_{1,m}\}$ имеет частичное линейное соотношение в V .

Пусть $\beta = \sum_{j=2}^m t_j \beta_{1,j}$, т.е. $\beta = (\sum_{j=2}^m t_j) \alpha_1 - (\sum_{j=2}^m t_j \alpha_j)$.

А. Пусть $x \in G_k \setminus \bigcup_{i=1}^m \pi_i$. Тогда $\alpha_j(x) = \alpha_j(y)$ для всех $y \in S(x)$ и, следовательно, $\beta(x) = \beta(y)$ для всех $y \in S(x)$, откуда $\Delta_p \beta(x) = 0$.

Б. Пусть $x \in \bigcup_{i=1}^m \pi_i \setminus \{e\}$. Не ограничивая общности, рассмотрим случай, когда $x \in \pi_1 \setminus \{e\}$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned}\beta(x) &= \left(\sum_{j=2}^m t_j \right) \alpha_1(x) = T \alpha_1, \quad T = \sum_{j=2}^m t_j, \\ \Delta_p \beta(x) &= T^{p-1} \Delta_p \alpha_1(x) = 0.\end{aligned}$$

В. Пусть $x = e$. Так как $\beta(e) = 0$, то получаем

$$\begin{aligned}\Delta_p \beta(e) &= \sum_{y \in S(e)} \frac{|\beta(y)|^{p-2}}{r^{p-1}(y, e)} \beta(y) = \\ &= \sum_{y \in S(e)} \frac{|T \alpha_1(y) - \sum_{j=2}^m t_j \alpha_j(y)|^{p-2}}{r^{p-1}(y, e)} \left(T \alpha_1(y) - \sum_{j=2}^m t_j \alpha_j(y) \right) = \\ &= \frac{|T \alpha_1(x_{1,1})|^{p-2}}{r^{p-1}(x_{1,1}, e)} T \alpha_1(x_{1,1}) - \sum_{i=2}^m \frac{|t_i \alpha_i(x_{i,1})|^{p-2}}{r^{p-1}(x_{i,1}, e)} t_i \alpha_i(x_{i,1}) = \\ &= \varphi_p(T) - \sum_{i=2}^m \varphi_p(t_i).\end{aligned}$$

Таким образом, β является p -гармонической в точке e тогда и только тогда, когда $\varphi_p(T) = \sum_{i=2}^m \varphi_p(t_i)$. Теорема доказана.

Благодарности. Часть этой работы выполнена в рамках схемы Junior Associate в International Center of Theoretical Physics (Trieste, Italy); У. А. Розиков благодарит ИСТР за финансовую поддержку (февраль – апрель 2009 г.).

Список литературы

- [1] Н. Н. Ганиходжаев, С. Р. Азизова, *ДАН РУз.*, 1990, № 4, 3–5.
- [2] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [3] U. A. Rozikov, F. T. Ishankulov, *Description of periodic p -harmonic functions on Cayley tree*, Preprint ICTP IC/2008/054.

- [4] У. А. Розиков, *ТМФ*, **112**:1 (1997), 170–175.
- [5] Э. П. Норматов, У. А. Розиков, *Матем. заметки*, **79**:3 (2006), 434–443.
- [6] P. M. Soardi, *Potential theory on infinite networks*, Lecture Notes in Math., **1590**, Springer, Berlin, 1994.
- [7] A. Cantón, J. L. Fernández, D. Pestana, J. M. Rodríguez, *Potential Anal.*, **15**:3 (2001), 199–244.
- [8] H. Kurata, *Discrete Appl. Math.*, **156**:1 (2008), 103–109.
- [9] I. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio, *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, New York, 1993.
- [10] R. Kaufman, J.-M. Wu, *Ann. Probab.*, **28**:3 (2000), 1138–1148.

Поступила в редакцию 29.07.2009