Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Мухамедов, У. А. Розиков, Экстремальность неупорядоченной фазы неоднородной модели Поттса на дереве Кэли, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 3, 410–418

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf647>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:26:47

© 2000 г.

Ф. М. Мухамедов*, У. А. Розиков*

ЭКСТРЕМАЛЬНОСТЬ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ ФАЗЫ НЕОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Найдено достаточное условие на параметры неоднородной модели Поттса на дереве Кэли, при котором неупорядоченная фаза является экстремальной.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер, где V — множество вершин Γ^k и L — множество его ребер.

Эта решетка обладает тем свойством, что число вершин, посещаемых за n шагов, растет экспоненциально с ростом n . Это более быстрый рост, чем n^d , независимо от значения d , где n^d — объем ящика с ребром, равным n , в d -мерном пространстве. Поэтому деревья Кэли и модели, определяемые на нем, являются бесконечномерными [1].

Рассмотрим неоднородную модель Поттса, гамильтониан которой имеет вид

$$H(\sigma) = - \sum_{\langle x, y \rangle \in L} J_{xy} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (1)$$

где $J_{xy} \in \mathbb{R}$, $\sigma(x) \in \Phi = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q\} \subset \mathbb{R}^{q-1}$,

$$\sigma_i \sigma_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ -\frac{1}{q-1}, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad (2)$$

и δ — символ Кронекера.

Основная задача для данного гамильтониана — это описание множества всех предельных гиббсовских мер.

Известно, что множество всех гиббсовских мер с данным гамильтонианом является непустым, выпуклым, компактным подмножеством множества всех вероятностных мер [2]. Поэтому естественна задача изучения крайних гиббсовских мер. Эта задача

*Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Республика Узбекистан

весьма трудная, и более или менее окончательные результаты получаются лишь при малых значениях $\beta = 1/T$, где $T > 0$ – температура.

В работах [3–7] построены крайние гиббсовские меры для моделей Изинга, Поттса и для некоторых обобщений этих моделей на дереве Кэли. В работе [3] доказано, что неупорядоченная фаза модели Изинга является крайней при $T \geq T_c$ и не является крайней при $T < T_c$, где T_c – критическая температура модели спинового стекла.

В настоящей работе мы определим достаточное условие на параметры неоднородной модели Поттса, при котором неоднородная фаза является крайней.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Из (2) следует, что для любых $x, y \in V$

$$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{q-1}{q} \left(\sigma(x)\sigma(y) + \frac{1}{q-1} \right).$$

Следовательно, $H(\sigma)$ имеет вид

$$H(\sigma) = - \sum_{\langle x, y \rangle \in L} J'_{xy} \sigma(x)\sigma(y), \quad (3)$$

где $J'_{xy} = (q-1)J_{xy}/q$. Введем обозначения

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\},$$

где $x^0 \in V$ – фиксированная точка, $d(x, y)$ – число ребер кратчайшего пути, соединяющего x и y ,

$$V_n = \bigcup_{m=1}^n W_m = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\},$$

$$L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Для $A \subset V$ обозначим через $\Omega_A = \Phi^A$ множество конфигураций на A . Пусть $h_x \in \mathbb{R}^{q-1}$ – векторнозначная функция $x \in V$. Рассмотрим для каждого n меру μ_n на Ω_{V_n} , определенную формулой

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \beta J'_{xy} \sigma(x)\sigma(y) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x) \right\}, \quad (4)$$

где $\sigma_n = \{\sigma(x), x \in V_n\} \in \Omega_{V_n}$ и Z_n^{-1} – нормирующий множитель.

Условия согласованности для $\mu_n(\sigma_n)$, $n \geq 1$, определяются равенством

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu_n(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \quad (5)$$

где $\sigma^{(n)} = \{\sigma(x), x \in W_n\}$. В качестве базиса в $\mathbb{R}^{q-1}$ берем $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{q-1}$.

ТЕОРЕМА 1. Меры $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют (5) тогда и только тогда, когда для векторов $h_x \in \mathbb{R}^{q-1}$, $x \in V$, выполняется равенство

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, q, \theta_{xy}), \quad (6)$$

где $F: \mathbb{R}^{q-1} \rightarrow \mathbb{R}^{q-1}$;

$$F_i = \ln \left[\frac{(\theta_{xy} - 1) \exp h_i + \sum_{j=1}^{q-1} \exp h_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} \exp h_j + \theta_{xy}} \right],$$

$\theta_{xy} = \exp(J'_{xy}/T)$, $h = (h_1, \dots, h_{q-1})$, $F(h) = (F_1, \dots, F_{q-1})$, $S(x) = \{y \in V \mid d(x, y) = 1, \exists n \text{ такое, что } y \in W_n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно подставляя (4) в (5), можно проверить, что (5) и (6) эквивалентны.

Легко проверить, что отображение F удовлетворяет следующему свойству:

$$\|F(h)\| \leq \frac{(q-1)(\theta-1)}{\theta} \|h\|, \quad (7)$$

где $h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$, $\|h\| = \max_{1 \leq i \leq q-1} |h_i|$.

В силу теоремы Колмогорова из теоремы 1 следует, что каждой предельной гиббсовской мере μ на Ω_V соответствует совокупность векторов $\{h_x, x \in V\}$, которая удовлетворяет условию (6), и обратно, каждой совокупности векторов $\{h_x, x \in V\}$, удовлетворяющих (6), соответствует единственная предельная мера μ на Ω_V .

Заметим, что независимо от значений параметров $k \geq 1$, $q \geq 2$, $\theta_{xy} \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$, совокупность векторов $\{h_x = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{q-1}, x \in V\}$ удовлетворяет уравнениям (6).

Обозначим через μ_0 меру, соответствующую $\{h_x = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{q-1}, x \in V\}$ по теореме 1. Эта мера называется неупорядоченной фазой неоднородной модели Поттса.

В этой работе мы докажем, что мера μ_0 при некоторых условиях на параметры удовлетворяет следующему свойству.

Свойство E¹⁾. Для любых $\varepsilon > 0$, $n > 0$ и конфигураций $\sigma_n = \{\sigma(x), x \in V_n\} \in \Omega_{V_n}$ существуют $N > n$ и $A_N \subset \Omega_{W_N}$ такие, что:

- 1) $\mu_0(A_N) > 1 - \varepsilon$,
- 2) $|\mu_0(\sigma_n \mid \sigma^{(N)}) - \mu_0(\sigma_n)| < \varepsilon$ для любого $\sigma^{(N)} \in A_N$.

Из свойства E следует, что для типичных граничных условий $\sigma^{(N)}$ условное распределение $\mu_0(\sigma_n \mid \sigma^{(N)})$ сходится к безусловному $\mu_0(\sigma_n)$ при $N \rightarrow \infty$ и мера μ_0 является крайней (см. [2]).

¹⁾Extremity.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ради краткости введем обозначения

$$\begin{aligned}\mu_0(\sigma_n) &= \mu_0(\{\sigma_n\} \times \Omega_{V \setminus V_n}), \\ \mu_0(\sigma_n \mid \sigma^{(N)}) &= \frac{\mu_0(\sigma_n, \sigma^{(N)})}{\mu_0(\sigma^{(N)})},\end{aligned}$$

где

$$\mu_0(\sigma_n, \sigma^{(N)}) = \mu_0(\{\sigma_n\} \times \{\sigma^{(N)}\} \times \Omega_{V \setminus (V_n \cup W_N)}).$$

Подставляя $h_x = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{q-1}$, $x \in W_N$, в (4), получим

$$\mu_0(\sigma_N) = Z_N^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{T} H_N(\sigma_N)\right\}, \quad (8)$$

где

$$H_N(\sigma_N) = - \sum_{\langle x, y \rangle \in L_N} J'_{xy} \sigma(x) \sigma(y).$$

Обозначим

$$h_x^{(N)} = \frac{1}{T} \sum_{y \in S(x)} J'_{xy} \sigma(y), \quad x \in W_{N-1}, \quad (9)$$

тогда

$$H_N(\sigma_N) = H_{N-1}(\sigma_{N-1}) - T \sum_{x \in W_{N-1}} h_x^{(N)} \sigma(x).$$

Следовательно,

$$\mu_0(\sigma_N) = Z_N^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{T} H_{N-1}(\sigma_{N-1}) + \sum_{x \in W_{N-1}} h_x^{(N)} \sigma(x)\right\}. \quad (10)$$

Пусть $\sigma(y)$ независимо принимает значения $\sigma(y) = \sigma_i$, $\sigma_i \in \Phi$, с вероятностью $1/q$. Совместное распределение случайных векторов $\{\sigma(x), x \in V_{N-1}\}$ и $\{h_x^{(N)}, x \in W_{N-1}\} = h^{(N, N-1)}$ относительно μ_0 имеет вид

$$\begin{aligned}\mu_0(\sigma_{N-1}, h^{(N, N-1)}) &= \sum_{\frac{1}{T} \sum_{y \in S(x)} J'_{xy} \sigma(y) = h_x^{(N)}, x \in W_{N-1}} \mu_0(\sigma_N) = \\ &= Z_N^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{T} H_{N-1}(\sigma_{N-1}) + \sum_{x \in W_{N-1}} h_x^{(N)} \sigma(x)\right\} \prod_{x \in W_{N-1}} \nu(h_x^{(N)}), \quad (11)\end{aligned}$$

где $\nu(h_x^{(N)})$ – распределение случайного вектора (9).

Формула (11) напоминает формулу (4), но здесь значение $h_x^{(N)}$ случайно. Применяя рекуррентные уравнения (6), получим

$$h_x^{(N)} = \sum_{y \in S(x)} F(h_y^{(N)}, q, \theta_{xy}). \quad (6')$$

Используя (6'), определим множество случайных векторов $\{h_x^{(N)} = h_x^{(N)}(\sigma^{(N)}), x \in V_{N-1}\}$. Случайные векторы $h_x^{(N)}$ удовлетворяют условию (6'). Поэтому совместное распределение случайных векторов $\{\sigma(x), x \in V_n\}$ и $\{h_x^{(N)}, x \in W_n\} = h^{(N,n)}$ относительно μ_0 имеет вид

$$\mu_0(\sigma_n, h^{(N,n)}) = Z_{N,n}^{-1} \exp \left[-\frac{1}{T} H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x^{(N)} \sigma(x) \right] \prod_{x \in W_n} \nu_{N-n}(h_x^{(N)}), \quad (11')$$

где $\nu_{N-n}(h_x^{(N)})$ – распределение случайного вектора $h_x^{(N)}$ для $x \in W_n$.

Пусть $h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$ и

$$\|h\| = \max_{1 \leq i \leq q-1} |h_i|.$$

ЛЕММА 1. Для любого $x \in W_n$, $n \leq N-1$, имеет место равенство

$$E h_{xi}^{(N)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q-1,$$

где $h_x^{(N)} = (h_{x1}^{(N)}, h_{x2}^{(N)}, \dots, h_{x(q-1)}^{(N)}) \in \mathbb{R}^{q-1}$, E – математическое ожидание.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in W_{N-1}$, тогда

$$\begin{aligned} E h_{xi}^{(N)} &= \sum_{\sigma^{(N)}} h_{xi}^{(N)}(\sigma^{(N)}) \mu(\sigma^{(N)}) = \\ &= \frac{1}{q^{(k+1)k^{N-1}}} \sum_{\sigma^{(N)}} h_{xi}^{(N)}(\sigma^{(N)}) = \frac{1}{T q^{(k+1)k^{N-1}}} \sum_{\sigma^{(N)}} \left(\sum_{y \in S(x)} J'_{xy} \sigma^{(i)}(y) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\sigma(y) = (\sigma^{(1)}(y), \sigma^{(2)}(y), \dots, \sigma^{(q-1)}(y)) \in \Phi$, μ – полиномиальное распределение на Ω_{W_N} .

Заметим, что для элементов множества Φ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^q \sigma_i = 0. \quad (13)$$

В силу (13) из (12) получим $E h_{xi}^{(N)} = 0$, $x \in W_{N-1}$, $i = 1, 2, \dots, q-1$.

Теперь докажем лемму в случае $x \in W_n$, $n < N-1$.

Заметим, что для $x \in W_{N-1}$, $\sigma^{(N)} \in \Omega_{W_N}$ вектор $h_x^{(N)}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} h_x^{(N)} &= \beta \sum_{y \in S(x)} J'_{xy} \sigma(y) = \\ &= \beta \sum_{i=1}^q \alpha_{xi} \sigma_i = (\beta(\alpha_{x1} - \alpha_{xq}), \beta(\alpha_{x2} - \alpha_{xq}), \dots, \beta(\alpha_{x(q-1)} - \alpha_{xq})), \end{aligned}$$

где

$$\alpha_{xi} = \sum_{y \in S(x): \sigma(y) = \sigma_i} J'_{xy}, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Рассмотрим числа $A_{x,n}^{(i)}$, $x \in W_n$, $i = 1, 2, \dots, q$, $n \leq N-1$, которые удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$A_{x,n}^{(i)} = \prod_{z \in S(x)} \left((\theta_{xz} - 1) A_{z,n+1}^{(i)} + \sum_{j=1}^q A_{z,n+1}^{(j)} \right), \quad x \in W_n, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad n < N-1,$$

$$A_{y,N-1}^{(i)} = \exp(\beta \alpha_{yi}), \quad y \in W_{N-1}.$$

Множество значений случайных величин $\alpha_{xi} = \alpha_{xi}(\sigma^{(N)})$ не зависит от i . Отсюда следует, что множество значений случайных величин $A_{x,n}^{(i)} = A_{x,n}^{(i)}(\sigma^{(N)})$ также не зависит от i .

Для доказательства леммы в случае $x \in W_n$, $n < N-1$, воспользуемся равенством (6'), получим

$$\begin{aligned} Eh_{xi}^{(N)} &= E \sum_{z_{n+1} \in S(x)} F_i(h_{z_{n+1}}^{(N)}; \theta_{xz_{n+1}}) = \\ &= \sum_{z_{n+1} \in S(x)} EF_i \left(\sum_{z_{n+2} \in S(z_{n+1})} F \left(\dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{z_{N-1} \in S(z_{N-2})} F(h_{z_{N-1}}^{(N)}; \theta_{z_{N-2}z_{N-1}}); \dots \theta_{z_{N-3}z_{N-2}} \right); \theta_{xz_{n+1}} \right) = \\ &= \sum_{z_{n+1} \in S(x)} E \ln \frac{(\theta_{xz_{n+1}} - 1) A_{z_{n+1},n+1}^{(i)} + \sum_{j=1}^q A_{z_{n+1},n+1}^{(j)}}{(\theta_{xz_{n+1}} - 1) A_{z_{n+1},n+1}^{(q)} + \sum_{j=1}^q A_{z_{n+1},n+1}^{(j)}} = \frac{1}{q^{(k+1)k^{N-1}}} \times \\ &\quad \times \sum_{z_{n+1} \in S(x)} \ln \frac{\prod_{\sigma^{(N)}} [(\theta_{xz_{n+1}} - 1) A_{z_{n+1},n+1}^{(i)} + \sum_{j=1}^q A_{z_{n+1},n+1}^{(j)}]}{\prod_{\sigma^{(N)}} [(\theta_{xz_{n+1}} - 1) A_{z_{n+1},n+1}^{(q)} + \sum_{j=1}^q A_{z_{n+1},n+1}^{(j)}]}. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как область значений $A_{z_{n+1},n+1}^{(i)}$ не зависит от i , то из (14) получим $Eh_{xi}^{(N)} = 0$, $x \in W_n$. Лемма доказана.

Пусть $Dh_{xi}^{(N)}$ — дисперсия случайной величины $h_{xi}^{(N)} = h_{xi}^{(N)}(\sigma^{(N)})$, $i = 1, 2, \dots, q-1$. Обозначим

$$a(x) = \sum_{y \in S(x)} \left[(q-1) \frac{\theta_{xy} - 1}{\theta_{xy}} \right]^2, \quad x \in V,$$

$$b(x) = \sum_{y \in S(x)} |J'_{xy}|, \quad x \in V.$$

Пусть $a(x)$ удовлетворяет одному из следующих условий.

УСЛОВИЕ 1а. $a(x) \equiv 1$ для любого $x \in V$;

УСЛОВИЕ 1б. Для любого $x \in V$ и любых бесконечных путей $\{x, x_1, x_2, \dots\}$ выполняется равенство

$$\prod_{i=1}^{\infty} a(x_i) = 0.$$

Пусть $b(x)$ удовлетворяет следующему условию.

УСЛОВИЕ 2. Существует $M > 0$ такое, что $b(x) \leq M$ для любого $x \in V$.

ЛЕММА 2. Если выполняются условия 1а или 1б и условие 2, то

$$\lim_{N-n \rightarrow \infty} Dh_{xi}^{(N)} = 0, \quad x \in W_n, \quad i = 1, 2, \dots, q-1. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнений (6) в силу независимости $h_{xi}^{(N)}$ следует, что

$$Dh_{xi}^{(N)} = \sum_{y \in S(x)} DF_i(h_{yi}^{(N)}, q, \theta_{xy}), \quad (16)$$

$$x \in W_{m-1}, \quad y \in W_m, \quad m \leq N-1.$$

В силу неравенства (7) имеем

$$Dh_{xi}^{(N)} \leq \sum_{y \in S(x)} \left(\frac{(q-1)(\theta_{xy}-1)}{\theta_{xy}} \right)^2 Dh_{yi}^{(N)} \leq a(x) Dh_{yi}^{(N)}, \quad (17)$$

где

$$Dh_{yi}^{(N)} = \max_{y \in S(x)} Dh_{yi}^{(N)}.$$

Итерируя это неравенство для

$$x \in W_n, \quad y \in W_{N-1}, \quad n \leq N-1,$$

получим

$$Dh_{xi}^{(N)} \leq \left(\prod_{z: x < z \leq y} a(z) \right)^{N-n-1} Dh_{yi}^{(N)}. \quad (18)$$

Из (18) при выполнении условия 1б следует (15).

Теперь докажем, что (15) выполняется и при условии 1а. В этом случае из (17) получим

$$Dh_{xi}^{(N)} \leq Dh_{y'i}^{(N)}, \quad x \in W_{m-1}, \quad y' \in W_m. \quad (19)$$

Откуда следует, что $Dh_{xi}^{(N)}$ не убывают при возрастании m . Положим, что

$$\lim_{N-n \rightarrow \infty} Dh_{xi}^{(N)} = \gamma > 0, \quad x \in W_n. \quad (20)$$

Заметим, что для $\|h\| > \varepsilon$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$\|F(h)\| \leq (1-\delta) \frac{(q-1)(\theta-1)}{\theta} \|h\|.$$

Таким образом, для $x \in W_{m-1}$, $y \in W_m$ мы имеем

$$Dh_{xi}^{(N)} \leq Dh_{yi}^{(N)} \left(1 - \frac{\delta D_\varepsilon h_{yi}^{(N)}}{Dh_{yi}^{(N)}} \right),$$

где

$$D_\varepsilon t = \sum_{|t| > \varepsilon} t^2 \nu_{N-m}(t).$$

Из (9) и условия 2 вытекает

$$|h_{yi}^{(N)}| \leq \beta \sum_{z \in S(y)} |J'_{xy}| = \beta b(x) \leq \beta M$$

для любого $x \in V_{N-1}$. Следовательно,

$$Dh_{xi}^{(N)} \leq Dh_{yi}^{(N)} (1 - \delta_0 D_\varepsilon h_{yi}^{(N)}),$$

где $\delta_0 = \delta/(\beta M)^2$. Итерируя эту оценку, получим

$$Dh_{xi}^{(N)} \leq Dh_{yi}^{(N)} \prod_{z: x < z \leq y} (1 - \delta_0 D_\varepsilon h_{zi}^{(N)}).$$

В силу (20) из последнего неравенства получим

$$\lim_{N-n \rightarrow \infty} D_\varepsilon(h_{xi}^{(N)}) = 0, \quad x \in W_n.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольное, то отсюда следует (15) при условии 1а. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Если выполняются условия 1 и 2, то*

$$\text{Prob}\left\{\lim_{N \rightarrow \infty} \|h_x^{(N)}\| = 0, x \in W_n\right\} = 1, \quad (21)$$

где n фиксировано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим неравенство Чебышева

$$\text{Prob}\{|h_{xi}^{(N)} - Eh_{xi}^{(N)}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{Dh_{xi}^{(N)}}{\varepsilon^2}. \quad (22)$$

В силу лемм 1 и 2 из (22) имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob}\{|h_{xi}^{(N)}| < \varepsilon\} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, q-1. \quad (23)$$

Из (23) вытекает (21). Лемма доказана.

Теперь докажем, что μ_0 удовлетворяет свойству Е при условиях 1 и 2. Пусть $n > 0$, $\delta > 0$ фиксированы. Рассмотрим

$$A_{N,\delta} = \left\{ \sigma^{(N)} = \{\sigma(x), x \in W_N\} \mid \|h_x^{(N)}(\sigma^{(N)})\| \leq \delta, x \in W_n \right\}.$$

Докажем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_0(A_{N,\delta}) = 1. \quad (24)$$

Из (11') имеем

$$\mu_0(A_{N,\delta}) = \frac{\sum_{\{\|h_x^{(N)}\| \leq \delta, x \in W_n\}} Q_n(\{h_x^{(N)}, x \in W_n\})}{\sum_{\{h_x^{(N)}, x \in W_n\}} Q_n(\{h_x^{(N)}, x \in W_n\})}, \quad (25)$$

где

$$Q_n(\{h_x^{(N)}, x \in W_n\}) = \sum_{\sigma_n} \exp \left\{ -\frac{1}{T} H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x^{(N)} \sigma(x) \right\} \prod_{x \in W_n} \nu_{N-n}(h_x^{(N)}).$$

В силу леммы 3 равенство (24) следует из (25).

Оценим теперь величину $|\mu_0(\sigma_n | \sigma^{(N)}) - \mu_0(\sigma_n)|$. Из (11') получаем

$$\mu_0(\sigma_n | \sigma^{(N)}) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{T} H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x^{(N)} \sigma(x) \right\}}{\sum_{\sigma_n} \exp \left\{ -\frac{1}{T} H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x^{(N)} \sigma(x) \right\}}, \quad (26)$$

где $h_x^{(N)} = h_x^{(N)}(\sigma^{(N)})$, $x \in W_n$, определяется по формулам (9) и (6'). Более того, из (8) следует

$$\mu_0(\sigma_n) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{T} H_n(\sigma_n) \right\}}{\sum_{\sigma_n} \exp \left\{ -\frac{1}{T} H_n(\sigma_n) \right\}}. \quad (27)$$

Так как n фиксировано, из соотношений (26) и (27) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\mu_0(\sigma_n | \sigma^{(N)}) - \mu_0(\sigma_n)| < \varepsilon, \quad (28)$$

где $\|h_x^{(N)}\| \leq \delta$ для всех $x \in W_n$, т.е. для $\sigma^{(N)} \in A_{N,\delta}$.

Следовательно, μ_0 удовлетворяет свойству Е. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Если выполняются условия 1 и 2, то неупорядоченная фаза неоднородной модели Поттса на дереве Кэли является крайней.

Благодарности. Авторы выражают глубокую признательность проф. Н. Н. Ганиходжаеву за внимание к работе.

Список литературы

- [1] Р. Бэкстер. Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985.
- [2] Я. Г. Синай. Теория фазовых переходов: Строгие результаты. М.: Наука, 1980.
- [3] Р. М. Bleher. Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 411–419.
- [4] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев. Теор. вероятн. и ее примен. 1990. Т. 35. № 2. С. 220–230.
- [5] Н. Н. Ганиходжаев. ДАН РУз. 1992. № 6–7. С. 4–7.
- [6] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков. ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 109–117.
- [7] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков. Матем. сб. 1999. Т. 190. № 2. С. 31–42.

Поступила в редакцию 2.11.2000 г.