Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шабат, З. С. Эльканова, О коммутирующих дифференциальных операторах, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 3, 334–344

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6474>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 06:32:53

© 2010 г.

А. Б. Шабат^{*†}, З. С. Эльканова[†]

О КОММУТИРУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ

Рассматривается связанная с функциями Бесселя модельная задача теории коммутативных колец линейных дифференциальных операторов с одной независимой переменной. Построены новые серии таких коммутативных колец и приведены простые примеры колец с тремя образующими.

Ключевые слова: функция Бесселя, коммутативные кольца дифференциальных операторов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы исследуем условия перестановочности пары дифференциальных операторов вида

$$A = D^m + \sum_{k=1}^m a_k x^{-k} D^{m-k}, \quad B = D^n + \sum_{k=1}^n b_k x^{-k} D^{n-k}, \quad (1.1)$$

$$a_k, b_k \in \mathbb{C}, \quad D = \frac{d}{dx},$$

называемых ниже операторами Эйлера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Характеристический многочлен $\hat{A}(k)$ оператора Эйлера A порядка m определяется формулой

$$\hat{A}(k) = x^{m-k} A(x^k), \quad k \in \mathbb{C}.$$

Ясно, что оператор Эйлера однозначно восстанавливается по своему характеристическому многочлену $\hat{A}(k)$ и, разложив многочлен в произведение линейных по k сомножителей, мы получаем следующие две формы дифференциального оператора A :

$$\hat{A}(k) = (k + k_1) \dots (k + k_m) \Rightarrow A = x^{-m} (xD + k_1) \dots (xD + k_m), \quad (1.2)$$

^{*}Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, г. Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: shabat@itp.ac.ru

[†]Карачаево-черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева, Карачаевск, Россия. E-mail: z.109@mail.ru

$$\hat{A}(k) = (k + k_1) \dots (k + k_m) \Rightarrow A = \left(D + \frac{k_1 + m - 1}{x}\right) \dots \left(D + \frac{k_m}{x}\right). \quad (1.3)$$

Так как $[x^p D^p, x^q D^q] = 0$ при любых $\mathbb{Z} \ni p, q \geq 0$, то сомножители в первой из этих формул можно менять местами, тогда как во второй формуле умножение некоммутативно и порядок сомножителей является существенным. Например,

$$\left(D + \frac{a}{x}\right) \left(D + \frac{b}{x}\right) = \left(D + \frac{b}{x}\right) \left(D + \frac{a}{x}\right) \Leftrightarrow a = b.$$

В частном случае операторов порядка 2 формулу (1.3), не теряя общности, можно переписать, ориентируясь на обозначения в главе 17 учебника [1], в виде

$$L_n \stackrel{\text{def}}{=} D^2 + \frac{1}{x} D - \frac{n^2}{x^2} = \begin{cases} \left(D + \frac{1+n}{x}\right) \left(D - \frac{n}{x}\right), \\ \left(D + \frac{1-n}{x}\right) \left(D + \frac{n}{x}\right). \end{cases} \quad (1.4)$$

Характеристическим многочленом этого оператора Эйлера является $\hat{L}_n(k) = k^2 - n^2$. Используя некоммутативность умножения и меняя сомножители местами в формуле (1.4), мы приходим к другому дифференциальному оператору:

$$L_{n+1} \left(D - \frac{n}{x}\right) = \left(D - \frac{n}{x}\right) L_n, \quad L_{n-1} \left(D + \frac{n}{x}\right) = \left(D + \frac{n}{x}\right) L_n. \quad (1.5)$$

Отсюда автоматически получаются известные формулы, связывающие функции Бесселя¹⁾, порядок n которых отличается на целое число. Для дальнейшего важно напомнить, что при **полуцелых** n уравнение $L_n \psi = \lambda \psi$ для функций Бесселя интегрируемо в квадратурах [1].

Из определения 1 следует, что для композиции дифференциальных операторов (1.1) имеет место формула

$$C = AB \Rightarrow \hat{C}(k) = x^{m+n-k} A(B(x^k)) = \hat{A}(k-n) \hat{B}(k). \quad (1.6)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Дифференциальные операторы Эйлера (1.1) порядков m и n соответственно коммутируют в том и только в том случае, когда их характеристические многочлены удовлетворяют уравнению*

$$\hat{A}(k-n) \hat{B}(k) = \hat{B}(k-m) \hat{A}(k). \quad (1.7)$$

Теорема 1 сводит задачу о коммутирующих операторах Эйлера к задаче о полиномиальных решениях уравнения (1.7), которая является, как мы убедимся, хорошо поставленной при условии, что

$$\frac{m}{n}, \frac{n}{m} \notin \mathbb{Z}. \quad (1.8)$$

¹⁾Функции Бесселя $J_n(x)$ являются, как легко видеть, собственными функциями оператора L_n .

Будет проверено, в частности, что для операторов Эйлера второго порядка (1.4) с **полуцелым** n , и только в этих случаях, существует нетривиальный коммутирующий с L_n оператор Эйлера (не являющийся степенью L_n).

В дальнейшем полезно иметь в виду известное, но далеко не тривиальное утверждение (см., например, работу [2]) о коммутативных кольцах линейных дифференциальных операторов с одной независимой переменной:

$$[A, B] = [C, B] = 0 \Rightarrow [A, C] = 0. \quad (1.9)$$

Это означает, что коммутативные кольца дифференциальных операторов разбиваются на непересекающиеся классы, и что структура такого кольца во многом определяется наименьшим порядком $m > 0$ входящих в него дифференциальных операторов. При $m = 1, 2$ эта структура хорошо изучена и достаточно проста, но результаты исследования коммутативных колец с $m = 3$ (см., например, работу [3]) даже в рассматриваемой нами упрощенной постановке представляются интересными (см. ниже п. 2.1).

Из общей теории также следует, что коэффициенты коммутирующих дифференциальных операторов связаны хорошо определенными формулами, которые позволяют существенно понижать порядок системы алгебраических уравнений для коэффициентов при фактических вычислениях. В силу такого рода формул нелинейная система из $n + m$ уравнений для задачи (1.7) при $m < n$ оказывается, как мы убедимся, эквивалентной системе из m уравнений для нахождения коэффициентов характеристического многочлена $\hat{A}(k)$ меньшей степени m . Из этих формул следует также, что при нарушении условий (1.8) и $n = jm$ рассматриваемое уравнение (1.7) имеет только тривиальное решение $B = A^j$, оператор A вида (1.1) остается в этом случае произвольным. Другими словами, операторы Эйлера различных порядков нельзя складывать, но зато, в отличие от общей ситуации, при фиксированном A может существовать в каждом порядке не более одного оператора B такого, что $[A, B] = 0$. Если порядок B кратен порядку A , то этот единственный оператор Эйлера является степенью исходного оператора.

Сдвигу корней $k \mapsto k + k_0$ характеристического многочлена $\hat{A}(k)$ отвечает, очевидно, операция сопряжения $A \mapsto x^{-k_0} A x^{k_0}$, допускаемая операторами вида (1.1). Растяжение независимой переменной x не меняет, однако, корней характеристического многочлена и отражается лишь на масштабе измерения собственных значений соответствующей дифференциальному оператору Эйлера спектральной задачи:

$$A\psi = \lambda\psi \Leftrightarrow A\psi = \psi, \quad \lambda \neq 0.$$

2. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

В дальнейшем основным является следующее “определяющее” уравнение:

$$P(z + \beta)Q(z) = Q(z + \alpha)P(z), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha\beta \neq 0, \quad (2.1)$$

обобщающее уравнение (1.7) для характеристических многочленов из теоремы 1. Здесь

$$P(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m, \quad Q(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n, \quad (2.2)$$

и, сравнивая коэффициенты при степенях z в этом уравнении, мы приходим к системе алгебраических уравнений для коэффициентов многочленов $P(z)$ и $Q(z)$. В частности, приравнявая коэффициенты при z^{n+m-1} и z^{n+m-2} в определяющем уравнении (2.1), получаем

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{n}{m}, \quad b_1 = \frac{n}{m} a_1 + \frac{n}{2}(\beta - \alpha). \quad (2.3)$$

Обобщение этих формул приводит к следующему утверждению.

ЛЕММА. Пусть $n > t$ и многочлены (2.2) удовлетворяют уравнению (2.1). Тогда выбор α и коэффициентов многочлена $P(z)$ степени t однозначно определяют β и коэффициенты $Q(z)$ при помощи рекуррентных формул вида

$$j(\alpha b_j - \beta a_j) = F_j(\alpha, \beta, a_1, b_1, \dots, a_{j-1}, b_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.4)$$

где полагается $a_k = 0$ при $k > t$.

В дополнение к формулам (2.4) отметим, что номер j соответствует коэффициенту при $z^{n+m-1-j}$ в уравнении (2.1). Таким образом, оставшиеся коэффициенты при z^k , $k = 0, \dots, t-2$, дают после подстановки формул (2.4) для b_j $t-1$ уравнений для определения t коэффициентов многочлена $P(z)$:

$$\Phi_k(a_1, a_2, \dots, a_t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, t-2. \quad (2.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Решение определяющего уравнения (2.1) называется тривиальным, если уравнения (2.5) являются следствием формул (2.4)²⁾. В противном случае многочлен $P(z)$ степени $t > 0$ называется *перестановочным*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Запись уравнения (1.7) в форме (2.1) имеет своей целью использовать очевидную инвариантность последнего относительно преобразований сдвига и растяжения переменной z . За счет сдвига можно, например, положить $a_1 = 0$ и уравнять число неизвестных с числом уравнений в системе (2.5). Можно, по-видимому, доказать, что при взаимно простых t и n ,

$$\gcd(m, n) = 1, \quad (2.6)$$

эта система уравнений для коэффициентов многочленов (2.2) имеет конечное число решений. Численные эксперименты свидетельствуют в пользу следующей гипотезы: при выполнении условия (2.6) корни перестановочных многочленов (2.2) не бывают кратными, и их можно сделать целыми числами, используя масштабные преобразования.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Во всех рассматриваемых ниже случаях для проверки выполнения определяющего уравнения оказывается достаточным простое сравнение взаимного расположения корней многочленов, стоящих в левой и правой частях уравнения (2.1).

²⁾Эти уравнения превращаются в тождество при n , кратном t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Многочлен $Q(z)$ перестановочен с многочленом первой степени в том и только в том случае, когда его корни образуют арифметическую прогрессию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что многочлен первой степени $P(z) = z$, а многочлен $Q(z)$ имеет степень $n > 1$. Тогда в силу леммы условие перестановочности (2.1) принимает следующий вид:

$$zQ(z + \alpha) = (z + n\alpha)Q(z). \quad (2.7)$$

Легко видеть, что многочлен, корни которого образуют арифметическую прогрессию

$$Q(z) = z(z + \alpha) \dots (z + n\alpha - \alpha),$$

удовлетворяет этому уравнению. С другой стороны, так как $\alpha \neq 0$, из условия (2.7) следует, что

$$Q(0) = 0, \quad Q(-\alpha) = 0, \quad \dots, \quad Q((1 - n)\alpha) = 0.$$

Доказательство завершено.

Используя растяжение, мы фиксируем в дальнейшем масштаб переменной z и вводим в дополнение к стандартным операциям над многочленами следующую операцию *умножения*:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем многочлен $(P \times Q) \stackrel{\text{def}}{=} P(z + n)Q(z)$, где $n = \deg Q(z)$, некоммутативным произведением многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ степени m и n . Будем говорить, что многочлены $P(z)$ и $Q(z)$ *коммутируют*, если

$$(P \times Q) = (Q \times P) \Leftrightarrow P(z + n)Q(z) = P(z)Q(z + m), \quad (2.8)$$

$$m = \deg P(z), \quad n = \deg Q(z).$$

Легко видеть, что определенная выше на множестве произвольных многочленов бинарная операция “ $\times$ ” является ассоциативной. Действительно, пусть $P_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, – произвольные многочлены степеней n_i . Тогда

$$(P_1 \times (P_2 \times P_3))(z) = P_1(z + n_2 + n_3)P_2(z + n_3)P_3(z) = ((P_1 \times P_2) \times P_3)(z).$$

Используя операцию “ $\times$ ”, можно переписать теперь формулу для многочлена $Q(z)$ из доказательства предложения в виде степени многочлена $P(z) = z$ (аналогично (1.3)):

$$Q(z) = (P \times P \times P \times P \times \dots)(z) = z(z + 1)(z + 2)(z + 3) \dots \quad (2.9)$$

Очевидно также, что любые два многочлена $Q_i(z)$, $i = 1, 2$, вида (2.9) коммутируют:

$$Q_1 \times Q_2 = Q_2 \times Q_1.$$

Рассмотрим теперь похожие на (2.9) многочлены $P_m^n(z)$ степени m , корни которых образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = -n$, $n > 1$:

$$P_m^n(z) \stackrel{\text{def}}{=} z(z + n)(z + 2n) \dots (z + (m - 1)n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.10)$$

Важную роль в дальнейшем играет следующая простая теорема, непосредственную проверку которой мы предоставляем читателю.

ТЕОРЕМА 2. *Многочлен (2.10) коммутирует при любых m и n с двойственным ему многочленом степени n*

$$P_n^m(z) = z(z+m)(z+2m)\dots(z+(n-1)m).$$

В качестве первого примера применения этой теоремы, полагая $m = 2$ и перебирая $n = 3, 5, 7, \dots$, мы получаем следующую серию коммутирующих друг с другом многочленов P и Q :

$$\begin{cases} P = z(z+3), \\ Q = z(z+2)(z+4), \end{cases} \quad \begin{cases} P = z(z+5), \\ Q = z(z+2)(z+4)(z+6)(z+8), \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} P = z(z+7), \\ Q = z(z+2)(z+4)(z+6)(z+8)(z+10)(z+12), \end{cases} \quad \dots$$

При $m = 2$ и четных n двойственный многочлен P_n^2 оказывается “степенью” многочлена $P = z(z+n)$ и, например, при $n = 4$

$$P_4^2 = z(z+2)(z+4)(z+6) = (P \times P)(z), \quad P = z(z+4).$$

В качестве более изощренного примера к теореме 2, выбрав $m = 4$, $n = 5$, мы приходим к коммутирующей паре многочленов четвертой и пятой степеней:

$$P_4^5 = z(z+5)(z+10)(z+15), \quad P_5^4 = z(z+4)(z+8)(z+12)(z+16). \quad (2.12)$$

Из приведенных примеров видно, что коммутирующие многочлены имеют общий максимальный корень и что их минимальные корни отличаются на разность $n-m$ их степеней. Этим свойством, как несложно доказать, обладают вещественные корни любой пары многочленов, удовлетворяющих уравнению (2.8). Сравнив уравнение (1.7) для характеристических многочленов из теоремы 1 с уравнением (2.8), мы находим, что решения этих уравнений связаны простой заменой переменных, сводящейся к отражению и сдвигу:

$$z+k = z_0 \in \mathbb{C}. \quad (2.13)$$

В частном случае характеристических многочленов второй степени (см. формулу (1.4)) для сопоставления с коммутирующими многочленами (2.11) нужно поместить один из корней многочлена (1.4) в начало координат. Это приводит нас к функциям Бесселя $J_j(x)$ с полуцелым индексом j и, как уже отмечалось, устанавливает связь интегрируемости в квадратурах уравнения для собственных функций оператора Эйлера с разрешимостью алгебраического уравнения (1.7).

Из общей теории коммутативных колец дифференциальных операторов (см. формулу (1.9)) следует, что решения рассматриваемой задачи (2.8) разбиваются на непересекающиеся классы коммутирующих друг с другом многочленов. В качестве представителя такого класса естественно выбирать *минимальный многочлен* $P(z)$,

т.е. многочлен минимально возможной степени $m \geq 1$, и обозначать через $\{P(z)\}$ множество коммутирующих с $P(z)$ многочленов ненулевой степени. При $m = 1$ с точностью до сдвига минимальный многочлен $P(z) = z$, и в силу предложения коммутирующие с $P(z)$ многочлены записываются в виде (2.9). Как уже отмечалось во введении, среди коммутирующих многочленов из $\{P(z)\}$ не может существовать двух различных многочленов одинаковой степени. Отсюда следует, например, что класс минимального многочлена $\{z(z+3)\}$ из формулы (2.11) исчерпывается многочленами произвольной степени $n \geq 2$ вида

$$(P \times P \times \cdots \times P) \times (Q \times Q \times \cdots \times Q). \quad (2.14)$$

По той же причине две образующие P и Q множества $\{z(z+3)\}$ связаны соотношением

$$P \times P \times P = Q \times Q.$$

Мы переходим далее от перестановочных многочленов второй степени P_2^n к перестановочным многочленам степени $m > 2$, оставляя тем самым в стороне строгое доказательство того, что полное решение задачи (2.8) при $m = 2$ сводится к теореме 2 и что формулы вида (2.14) с двумя образующими $P = P_2^n$, $Q = P_n^2$ и нечетным $n = 3, 5, \dots$ исчерпывают соответствующие классы коммутирующих многочленов.

2.1. Неприводимые перестановочные многочлены степени 3 и 4. Для построения новых по сравнению с теоремой 2 перестановочных многочленов мы детально исследуем³⁾ решения уравнения (2.8) при

$$m = 3: n = 4, 5, 7; \quad m = 4: n = 5.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество $\{P(z)\}$ многочленов, коммутирующих с многочленом $P(z)$, называется коммутантом. Перестановочный многочлен $Q(z)$ степени $n > m$ называется *приводимым*, если он делится на коммутирующий с ним многочлен $P(z)$ меньшей степени.

При $m = 3$ мы полагаем (см. лемму и замечание 1)

$$a_1 = 0 \Rightarrow b_1 = \frac{n(n-3)}{2} \in \mathbb{Z}, \quad P(x) = x^3 + fx + g, \quad (2.15)$$

выбирая тем самым нормировку коэффициентов, совместимую с гипотезой о целочисленности корней перестановочных многочленов. При $n = 4$, используя нормировку (2.15) и обозначая

$$Q(x) = x^4 + 2x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4,$$

мы получаем, приравнивая последовательно коэффициенты при x^j , $j = 4, 3, 2$, в уравнении (2.8), следующие формулы для коэффициентов b_j :

$$b_2 = \frac{4}{3}f + \frac{1}{3}, \quad b_3 = \frac{4}{3}(f+g) - \frac{2}{3}, \quad b_4 = \frac{8+24g+10f+2f^2}{9}. \quad (2.16)$$

³⁾Для исследований использовались стандартные программы символьных вычислений MAPLE.

Подстановка найденных выражений для коэффициентов многочлена $Q(x)$ в оставшиеся ненулевыми два последних коэффициента “коммутатора” $P \times Q - Q \times P$ приводит к следующим уравнениям для коэффициентов f и g из формулы (2.15):

$$g(f+7)=0, \quad g^2 = \frac{56}{3}f - \frac{70}{3}g + \frac{2}{9}f^3 + \frac{128}{9} - \frac{10}{3}gf + \frac{14}{3}f^2. \quad (2.17)$$

Аналогично при

$$Q(x) = x^5 + 5x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + b_4x + b_5$$

мы получаем после несложных преобразований уравнения

$$g^2 = \frac{100}{9} + \frac{43}{3}f + \frac{10}{3}f^2 + \frac{1}{9}f^3, \quad (f+13)(f+7)g=0. \quad (2.18)$$

Окончательно при $n=7$ и

$$Q(x) = x^7 + 14x^6 + b_2x^5 + b_3x^4 + b_4x^3 + b_5x^2 + b_6x + b_7$$

определяющие уравнения для коэффициентов многочлена $P(x) = x^3 + fx + g$ принимают следующий вид:

$$\begin{cases} 9g^2(2f+35) = 3136 + 4180f + 1113f^2 + 70f^3 + f^4, \\ g(5645 + 105f^2 + 1428f - 3g^2 + 2f^3) = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Нетрудно убедиться, используя символьные вычисления, что все решения (f, g) уравнений (2.17)–(2.19), равно как и все корни коммутирующих многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, являются целочисленными. В частности, в случае (2.19) мы имеем первые четыре решения с $g=0$, приведенные ниже в формуле (2.20), и восемь решений с $g \neq 0$:

$$\begin{aligned} f = -7, \quad g = \pm 6; \quad f = -19, \quad g = \pm 30; \\ f = -13, \quad g = \pm 12; \quad f = -31, \quad g = \pm 30. \end{aligned}$$

Чтобы получить полный список, охватывающий все рассматриваемые случаи $n=4, 5, 7$, к этим решениям надо добавить еще одно решение $(f=-25, g=0)$ уравнений (2.18), соответствующих $n=5$.

Случай перестановочных многочленов третьей степени с $g=0$

$$P_3 = x^3 + fx, \quad f = -1, -4, -16, -49, (-25), \quad (2.20)$$

полностью охватывается теоремой 2. В частности, при $P_3 = x^3 - 25x$ и $n=5$, сместив максимальный корень $x=5$ перестановочного многочлена в начало координат, мы получаем решение (P, Q) коммутационного уравнения (2.8) из формулы (2.10):

$$P = z(z+5)(z+10), \quad Q = z(z+3)(z+6)(z+9)(z+12).$$

Ясно, что теорема 2 позволяет продолжить список (2.20) и построить бесконечную серию перестановочных многочленов третьей степени с $f = -64, -100, \dots$

Решение $P_3 = P = x^3 - 7x \pm 6$ является общим для $n = 4$ и $n = 7$ и, сдвинув максимальный корень в начало координат, мы получаем

$$\begin{cases} P_3 = z(z+1)(z+5), \\ P_4 = z(z+1)(z+3)(z+6), \\ P_7 = P_3 \times P_4, \end{cases} \quad \begin{cases} P_3 = z(z+4)(z+5), \\ P_4 = z(z+3)(z+5)(z+6), \\ P_7 = P_3 \times P_4. \end{cases} \quad (2.21)$$

Соответствующий этому случаю коммутант $\{P_3\}$ имеет, очевидно, две образующие P_3 и P_4 , а перестановочный многочлен P_7 является приводимым. Эти два решения уравнения (2.1) сводятся друг к другу заменой переменных, но с точки зрения уравнения (1.7) это два разных дифференциальных оператора, связанных друг с другом операцией сопряжения.

Решение $P_3 = P = x^3 - 13x \pm 12$ годится для $n = 5$ и $n = 7$, и, выбрав для определенности $P_3 = P = x^3 - 13x - 12$ и переходя, как и в теореме 2, к переменной $z = x - x_0$, мы получаем

$$\begin{cases} P_3 = z(z+5)(z+7), \\ P_5 = z(z+3)(z+6)(z+7)(z+9), \\ P_7 = z(z+3)(z+5)(z+6)(z+8)(z+9)(z+11). \end{cases} \quad (2.22)$$

Это дает первый пример коммутанта с тремя образующими. В случаях $f = -19$, $g = 30$ и $f = -31$, $g = 30$ получаем следующие два примера таких коммутантов:

$$\begin{cases} P_3 = z(z+1)(z+8), \\ P_7 = z(z+1)(z+3)(z+4)(z+6)(z+9)(z+12), \\ P_8 = z(z+1)(z+3)(z+4)(z+6)(z+7)(z+10)(z+13), \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} P_3 = z(z+4)(z+11), \\ P_7 = z(z+3)(z+4)(z+6)(z+9)(z+12)(z+15), \\ P_{11} = z(z+3)(z+4)(z+6)(z+7)(z+9)(z+10)(z+12)(z+13)(z+16)(z+19). \end{cases} \quad (2.24)$$

Случай $m = 4$, $n = 5$. Рассматриваемый в заключение случай помогает оценить сложность рассматриваемой комбинаторной задачи и дает новые примеры перестановочных многочленов. Непосредственная подстановка многочленов

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + fx^2 + gx + h, \quad Q(x) = x^5 + 5x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + b_4x + b_5$$

в определяющее уравнение приводит в данном примере к устрашающей системе трех алгебраических уравнений для коэффициентов многочлена $P(x)$:

$$\begin{aligned} -107f - 76g + 168h - f^3 + 4g^2 - 27f^2 - 12gf + 8hf &= 225, \\ 215f - 7489g + 6104h - 15f^3 + 116g^2 - 335f^2 - 1062gf + \\ + 232hf - 21gf^2 + 56gh &= 12825, \end{aligned}$$

$$\frac{4}{5}h(f^2 + 152f + 34g + 2571 + 8h) - g(22g + 9f^2 + 2gf + 446f + 3877) + \\ + 5f(f^2 + 49f + 463) = 4725.$$

Тем не менее все 14 решений этой алгебраической системы уравнений целочисленны:

$$\begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -13 & -61 & -9 & -25 & -17 & -29 & -37 & -13 & -9 & -25 & -13 & -37 \\ -2 & -6 & -14 & -62 & -18 & -50 & -18 & -30 & -86 & -38 & -2 & -2 & +10 & +10 \\ 0 & 0 & +24 & +336 & 0 & 0 & +72 & 0 & +120 & -24 & +8 & +24 & 0 & +168 \end{pmatrix}.$$

Первые три решения приводят нас к коммутантам многочленов степени 2 и, например, для последнего из этих решений мы имеем⁴⁾, обозначая $z = x - 3$,

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = (x - 3)(x - 1)(x + 2)(x + 4) = (P_2 \times P_2)(z), \\ P_2(z) = z(z + 5).$$

Следующее, четвертое, решение представляет собой частный случай теоремы 2:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 61x^2 - 62x + 336 = (x - 7)(x - 2)(x + 3)(x + 8) = z(z + 5)(z + 10)(z + 15).$$

Из оставшихся 10 решений не все являются независимыми. Преобразования отражения и сдвига позволяют отождествить следующие перестановочные многочлены:

$$\begin{aligned} P(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x &\sim P(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8, \\ P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 10x &\sim P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24, \\ P(x) = x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 50x &\sim P(x) = x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 2x + 24, \\ P(x) = x^4 + 2x^3 - 37x^2 - 86x + 120 &\sim P(x) = x^4 + 2x^3 - 37x^2 + 10x + 168. \end{aligned}$$

В результате мы приходим к следующему списку из шести перестановочных многочленов четвертой степени:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} z(z + 3)(z + 5)(z + 6), \\ z(z + 3)(z + 4)(z + 6)(z + 7), \end{cases} & \begin{cases} z(z + 1)(z + 2)(z + 7), \\ z(z + 1)(z + 2)(z + 4)(z + 8), \end{cases} \\ &\begin{cases} z(z + 5)(z + 7)(z + 10), \\ z(z + 4)(z + 7)(z + 8)(z + 11), \end{cases} & \begin{cases} z(z + 5)(z + 10)(z + 11), \\ z(z + 4)(z + 8)(z + 11)(z + 12), \end{cases} \\ &\begin{cases} z(z + 1)(z + 6)(z + 7), \\ z(z + 1)(z + 4)(z + 7)(z + 8), \end{cases} & \begin{cases} z(z + 5)(z + 6)(z + 11), \\ z(z + 4)(z + 6)(z + 8)(z + 12). \end{cases} \end{aligned}$$

Последние два случая соответствуют здесь перестановочным многочленам

$$\begin{aligned} P(x) = x^4 + 2x^3 - 17x^2 - 18x + 72 &= (x - 3)(x - 2)(x + 3)(x + 4), \\ P(x) = x^4 + 2x^3 - 29x^2 - 30x &= (x - 5)x(x + 1)(x + 6). \end{aligned}$$

⁴⁾Для сравнения многочленов друг с другом и с формулой (2.10) мы помещаем максимальный корень перестановочного многочлена в начало координат.

Имея в виду связь с дифференциальными операторами Эйлера, эти два многочлена можно назвать “самосопряженными”, так как они инвариантны относительно рассматриваемых нами преобразований отражения с последующим сдвигом.

При нарушении условия (2.6) уравнение (2.8) становится недоопределенным. В качестве иллюстрации к этому утверждению можно рассмотреть случай

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + fx^2 + gx + h, \quad Q(x) = x^6 + 9x^5 + b_2x^4 + b_3x^3 + b_4x^2 + b_5x + b_6$$

и проверить, что при $g = f - 1$ и $h = (f + 1)(f + 5)$ или $h = (f + 29)(f + 41)$ условие коммутирования $P \times Q = Q \times P$ выполняется при любом f .

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Можно надеяться, что дальнейший анализ условий (2.8) приведет к полному решению рассматриваемой модельной задачи о коммутирующих парах дифференциальных операторов. В этой связи следует, по-видимому, воспользоваться методами, разработанными в работах [3], [4]. Интересными представляются приложения полученных нами результатов для исследования собственных функций операторов Эйлера (1.1), соответствующих перестановочным многочленам.

Благодарности. Настоящая работа выполнена в рамках Программы РАН и Программы поддержки ведущих научных школ России (грант НШ-3472.2008.2), а также при поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00440_а, 08-01-00453_а). Формулировка задачи о перестановочных многочленах обсуждалась на международной “олимпиаде городов” (Теберда, август 2009 г.), а также на семинаре в Черноголовке, и авторы выражают благодарность В. Э. Адлеру, С. А. Дориченко и А. К. Толпыго за полезные замечания.

Список литературы

- [1] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Ч. 2, Физматлит, М., 1963.
- [2] J. L. Burchnall, T. W. Chaundy, *Proc. London Soc. Ser. 2*, **21**:1 (1923), 420–440.
- [3] В. Э. Адлер, В. Г. Марихин, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **129**:2 (2001), 163–183.
- [4] J. A. Sanders, J. P. Wang, *J. Differ. Equations*, **147**:2 (1998), 410–434.

Поступила в редакцию 7.09.2009