Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Кордеро-Сото, С. К. Суслов, Обращение времени для модифицированных осцилляторов, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 3, 345–380

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6475>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:49:29

© 2010 г.

Р. Кордеро-Сото*, С. К. Суслов*

ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Рассмотрен новый вполне интегрируемый случай зависящего от времени уравнения Шредингера в $\mathbb{R}^n$ с переменными коэффициентами для модифицированного осциллятора, дуального (по отношению к обращению времени) модельному квантовому осциллятору. Найдена вторая пара дуальных гамильтонианов в импульсном представлении. Рассмотренные примеры показывают, что в математической физике и квантовой механике для возвращения системы в исходное квантовое состояние изменение направления времени может потребовать полного изменения динамики системы. Получены частные решения соответствующих нелинейных уравнений Шредингера. Также рассмотрены гамильтонова структура классической интегрируемой задачи и ее квантование.

Ключевые слова: задача Коши, уравнение Шредингера с переменными коэффициентами, функция Грина, пропагатор, обращение времени, гиперсферическая гармоника, нелинейное уравнение Шредингера.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] получено явное решение задачи Коши для уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(t)\psi \quad (1.1)$$

для некоторого модифицированного осциллятора в $\mathbb{R}^n$. При $n = 1$ гамильтониан, рассмотренный в работе [1], имеет вид

$$H(t) = \frac{1}{2} (aa^\dagger + a^\dagger a) + \frac{1}{2} e^{2it} a^2 + \frac{1}{2} e^{-2it} (a^\dagger)^2, \quad (1.2)$$

где операторы рождения и уничтожения определяются, как в работе [2]:

$$a^\dagger = \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - x \right), \quad a = \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + x \right). \quad (1.3)$$

*School of Mathematical and Statistical Sciences; Mathematical, Computational and Modeling Sciences Center, Arizona State University, Tempe, USA.
E-mail: ricardojavier81@gmail.com, sks@asu.edu

Соответствующий оператор временной эволюции был найден в работе [1] в виде интегрального оператора, заданного формулой

$$\psi(x, t) = U(t)\psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t)\psi(y, 0) dy, \quad (1.4)$$

с ядром (функцией Грина, или пропагатором), выраженным в терминах тригонометрических и гиперболических функций следующим образом:

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i(\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)}} \times \\ \times \exp\left(\frac{(x^2 - y^2) \sin t \operatorname{sh} t + 2xy - (x^2 + y^2) \cos t \operatorname{ch} t}{2i(\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)}\right). \quad (1.5)$$

Стоит отметить, что оператор временной эволюции известен явно только в нескольких специальных случаях. Важным примером является гармонический осциллятор с вынуждающей силой, исходно рассмотренный Фейнманом в рамках подхода к нерелятивистской квантовой механике, основанного на интегралах по траекториям [3]–[7] (см. также работу [8]). С тех пор эта задача и ее специальные и предельные случаи изучались многими авторами (см. работы [9]–[14] для простого гармонического осциллятора и работы [15]–[19] для частицы в постоянном внешнем поле, а также приведенную в этих работах библиографию). Более того, в работе [20] оператор эволюции для одномерного уравнения Шредингера (1.1) был построен в общем случае, когда гамильтониан дается произвольной квадратичной формой от операторов координаты и линейного импульса. В рамках этого подхода упомянутые выше точно решаемые модели, включая модифицированный осциллятор из работы [1], классифицируются в терминах элементарных решений некоторого характеристического уравнения, связанного с дифференциальным уравнением Риккати.

В настоящей работе мы находим оператор эволюции для “дуального” зависящего от времени уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = H(\tau)\psi, \quad \tau = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t, \quad (1.6)$$

с другим, “экзотическим”, гамильтонианом модифицированного осциллятора, задаваемым равенством

$$H(\tau) = \frac{1}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) + \frac{1}{2}e^{-i \operatorname{arctg} 2\tau} a^2 + \frac{1}{2}e^{i \operatorname{arctg} 2\tau} (a^\dagger)^2. \quad (1.7)$$

Мы покажем, что соответствующий пропагатор можно получить из выражения (1.5), делая взаимную замену координат $x \leftrightarrow y$. Отсюда следует, что две рассматриваемые модели связаны друг с другом обращением времени, что и представляет собой основной результат настоящей работы.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы выводим пропагаторы для гамильтонианов (1.2) и (1.7), следуя методу из работы [20]; заметим, что в работе [1] выражение (1.5) было получено с помощью совершенно иного подхода, с использованием $SU(1, 1)$ -симметрии волновых функций n -мерного осциллятора и полиномов

Майкснера–Поллачека. В разделе 2 также рассматривается еще одна пара вполне интегрируемых дуальных гамильтонианов. Вопрос “скрытой” симметрии квадратичных пропагаторов рассмотрен в разделе 3. Раздел 4 посвящен комплексному виду пропагаторов, который позволяет с помощью геометрических приемов объединить функции Грина для нескольких классических моделей. В разделе 5 мы рассматриваем операторы, обратные к операторам эволюции, и их связь с обращением времени. Переход к импульсному представлению в разделе 6 позволяет по-новому взглянуть на симметрии рассматриваемых квадратичных гамильтонианов, а также на набор тождеств для соответствующих операторов эволюции. В разделах 7 и 8 рассматривается n -мерный случай. В разделе 9 построены частные решения нелинейных уравнений Шредингера. Раздел 10 посвящен некорректности уравнений Шредингера. В трех приложениях приведены необходимые нам решения определенного типа характеристических уравнений, квантовое преобразование Гамильтона, а также гамильтонова структура рассматриваемых характеристических уравнений.

Как и в работах [1], [20]–[22], мы рассматриваем решения зависящего от времени уравнения Шредингера с переменными коэффициентами. Случай уравнения типа уравнения диффузии исследован в работе [23]. Эти точно решаемые модели представляют интерес с точки зрения общего анализа нелинейных эволюционных уравнений (см. работы [24]–[45] и приведенную в них библиографию). Например, они упрощают детальное исследование задач, связанных с глобальным существованием и единственностью решений для нелинейных уравнений Шредингера с квадратичными гамильтонианами общего вида. Более того, эти явные решения могут быть полезны при проверке численных методов решения уравнения Шредингера и уравнений типа уравнения диффузии с переменными коэффициентами.

2. ВЫВОД ПРОПАГАТОРОВ

Рассмотрим зависящее от времени уравнение Шредингера с квадратичным гамильтонианом:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -a(t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b(t)x^2\psi - i \left(c(t)x \frac{\partial \psi}{\partial x} + d(t)\psi \right). \quad (2.1)$$

Выделим два интересных специальных случая

$$a = \cos^2 t, \quad b = \sin^2 t, \quad c = 2d = \sin 2t \quad (2.2)$$

и

$$a = \operatorname{ch}^2 t, \quad b = \operatorname{sh}^2 t, \quad c = 2d = -\operatorname{sh} 2t, \quad (2.3)$$

соответствующие гамильтонианам (1.2) и (1.7) (подробности приведены в приложении А). С помощью метода, предложенного в работе [20], фундаментальное решение уравнения (2.1) можно найти в виде

$$\psi = G(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i \mu(t)}} e^{i(\alpha(t)x^2 + \beta(t)xy + \gamma(t)y^2)}, \quad (2.4)$$

где

$$\alpha(t) = \frac{1}{4a(t)} \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} - \frac{d(t)}{2a(t)}, \quad (2.5)$$

$$\beta(t) = -\frac{1}{\mu(t)}, \quad \frac{d\gamma}{dt} + \frac{a(t)}{\mu(t)^2} = 0, \quad (2.6)$$

$$\gamma(t) = \frac{a(t)}{\mu(t)\mu'(t)} + \frac{d(0)}{2a(0)} - 4 \int_0^t \frac{a(\tau)\sigma(\tau)}{(\mu'(\tau))^2} d\tau, \quad (2.7)$$

а функция $\mu(t)$ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\mu'' - \tau(t)\mu' + 4\sigma(t)\mu = 0, \quad (2.8)$$

где

$$\tau(t) = \frac{a'}{a} - 2c + 4d, \quad \sigma(t) = ab - cd + d^2 + \frac{d}{2} \left(\frac{a'}{a} - \frac{d'}{d} \right), \quad (2.9)$$

с начальными условиями

$$\mu(0) = 0, \quad \mu'(0) = 2a(0) \neq 0. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.5) позволяет проинтегрировать (детали см. в работе [20]) обычное нелинейное дифференциальное уравнение Риккати, если подставить (2.4) в (2.1) (см., например, работы [46]–[50] и приведенную в них библиографию). Гамильтонова структура этих характеристических уравнений рассмотрена в приложении Б.

В случае (2.2) характеристическое уравнение имеет специальный вид уравнения Инса [51]

$$\mu'' + 2 \operatorname{tg} t \cdot \mu' - 2\mu = 0. \quad (2.11)$$

В работе [20] найдены два линейно независимых решения этого уравнения:

$$\mu_1 = \cos t \operatorname{ch} t + \sin t \operatorname{sh} t = W(\cos t, \operatorname{sh} t), \quad (2.12)$$

$$\mu_2 = \cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t = W(\cos t, \operatorname{ch} t) \quad (2.13)$$

с вронскианом $W(\mu_1, \mu_2) = 2 \cos^2 t = 2a$. Другой метод интегрирования всех характеристических уравнений из данного раздела рассматривается в приложении В (см. табл. 1, где приведен набор фундаментальных решений). Случай (2.3) дает

$$\mu'' - 2 \operatorname{th} t \cdot \mu' + 2\mu = 0, \quad (2.14)$$

и два линейно независимых решения имеют вид [23]

$$\mu_2 = \cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t = W(\cos t, \operatorname{ch} t), \quad (2.15)$$

$$\mu_3 = \sin t \operatorname{sh} t - \cos t \operatorname{ch} t = W(\sin t, \operatorname{ch} t), \quad (2.16)$$

а $W(\mu_2, \mu_3) = 2 \operatorname{ch}^2 t = 2a$. Уравнение (2.14) можно получить из (2.11) подстановкой $t \rightarrow it$. При этом $W(\mu_1, \mu_3) = \sin 2t + \operatorname{sh} 2t$. Общее решение обоих характеристических уравнений, а именно

$$\mu(t) = \mu_2 = \cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t, \quad (2.17)$$

удовлетворяет начальным условиям (2.10).

В результате элементарных вычислений получаем из (2.4)–(2.7) функцию Грина (1.5) в случае (2.2), а в случае (2.3) следует выполнить взаимную замену $x \leftrightarrow y$. Подробности вычислений читатель может найти в разделе 9, где аналогичным способом получены более общие решения. Такая необычная симметрия между двумя пропагаторами объясняется в разделе 3 с более общей точки зрения.

Два других случая вполне интегрируемых дуальных квадратичных гамильтонианов реализуются при

$$a = \sin^2 t, \quad b = \cos^2 t, \quad c = 2d = -\sin 2t \quad (2.18)$$

и

$$a = \operatorname{sh}^2 t, \quad b = \operatorname{ch}^2 t, \quad c = 2d = \operatorname{sh} 2t. \quad (2.19)$$

Соответствующие характеристические уравнения

$$\mu'' - 2 \operatorname{ctg} t \cdot \mu' - 2\mu = 0 \quad (2.20)$$

и

$$\mu'' - 2 \operatorname{cth} t \cdot \mu' + 2\mu = 0 \quad (2.21)$$

обладают общим решением вида

$$\mu(t) = \mu_4 = \sin t \operatorname{ch} t - \cos t \operatorname{sh} t = W(\sin t, \operatorname{sh} t) \quad (2.22)$$

при $\mu(0) = \mu'(0) = \mu''(0) = 0$ и $\mu'''(0) = 4$. Из (2.4)–(2.7) в случае (2.18) снова получаем функцию Грина

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i(\sin t \operatorname{ch} t - \cos t \operatorname{sh} t)}} \times \\ \times \exp\left(\frac{(x^2 + y^2) \cos t \operatorname{ch} t - 2xy + (x^2 - y^2) \sin t \operatorname{sh} t}{2i(\cos t \operatorname{sh} t - \sin t \operatorname{ch} t)}\right), \quad (2.23)$$

а в случае (2.19) следует выполнить взаимную замену $x \leftrightarrow y$. Соответствующая асимптотическая формула принимает вид

$$G(x, y, t) = \frac{e^{i(\alpha(t)x^2 + \beta(t)xy + \gamma(t)y^2)}}{\sqrt{2\pi i\mu(t)}} \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi i\varepsilon}} \exp\left(i \frac{(x - y)^2}{4\varepsilon}\right) \quad (2.24)$$

при $\varepsilon = t^3/3 \rightarrow +0$. В разделе 6 показано (см. уравнения (6.1) и (6.8)), что наши случаи (2.2), (2.3) и (2.18), (2.19) связаны между собой преобразованием Фурье.

Мы рассмотрели некоторые элементарные решения характеристического уравнения (2.8), которые представляют для нас интерес. Обобщение на модифицированные осцилляторы с вынуждающей силой очевидно (см. работу [1]). Более сложный случай может включать в себя специальные функции типа функций Бесселя, гипергеометрических или эллиптических функций [20], [21], [50], [52]–[55].

3. ПО ПОВОДУ “СКРЫТОЙ” СИММЕТРИИ КВАДРАТИЧНЫХ ПРОПАГАТОРОВ

В данном разделе мы будем изучать симметрию пропагаторов относительно перестановки $x \leftrightarrow y$.

ЛЕММА 1. *Рассмотрим два зависящих от времени уравнения Шредингера с квадратичными гамильтонианами:*

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -a_k(t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b_k(t) x^2 \psi - i \left(c_k(t) x \frac{\partial \psi}{\partial x} + d_k(t) \psi \right), \quad k = 1, 2, \quad (3.1)$$

где $c_1 - 2d_1 = c_2 - 2d_2 = \varepsilon(t)$ и $d_k(0) = 0$. Пусть задачи с начальными условиями для соответствующих характеристических уравнений

$$\mu'' - \tau_k(t)\mu' + 4\sigma_k(t)\mu = 0, \quad \mu(0) = 0, \quad \mu'(0) = 2a_k(0) \neq 0, \quad (3.2)$$

где

$$\tau_k(t) = \frac{a'_k}{a_k} - 2c_k + 4d_k, \quad \sigma_k(t) = a_k b_k - c_k d_k + d_k^2 + \frac{d_k}{2} \left(\frac{a'_k}{a_k} - \frac{d'_k}{d_k} \right), \quad (3.3)$$

имеют совместное решение $\mu(t)$ и, кроме того, выполняются соотношения

$$4(a_1 b_1 - c_1 d_1 + d_1^2) = \frac{4a_1 a_2 h^2 - (\mu')^2}{\mu^2} - 2\varepsilon \frac{\mu'}{\mu} = 4(a_2 b_2 - c_2 d_2 + d_2^2), \quad (3.4)$$

где $h(t) = \exp(-\int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau)$. Тогда соответствующие фундаментальные решения

$$\psi_k = G_k(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i \mu(t)}} e^{i(\alpha_k(t)x^2 + \beta_k(t)xy + \gamma_k(t)y^2)} \quad (3.5)$$

обладают симметриями

$$\alpha(t) = \alpha_1(t) = \gamma_2(t), \quad \gamma(t) = \gamma_1(t) = \alpha_2(t), \quad \beta(t) = \beta_1(t) = \beta_2(t) \quad (3.6)$$

и

$$G_1(x, y, t) = G_2(y, x, t). \quad (3.7)$$

Это свойство выполнено для одного уравнения Шредингера при выполнении одной только гипотезы (3.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для совместного решения $\mu(t)$ двух характеристических уравнений согласно статье [20] имеем

$$\beta(t) = \beta_1(t) = \beta_2(t) = -\frac{h(t)}{\mu(t)}. \quad (3.8)$$

С учетом структуры пропагаторов квадратичных гамильтонианов общего вида, найденных в работе [20], рассматриваемая симметрия имеет место, если одновременно выполняются соотношения

$$\alpha = \frac{1}{4a_1} \frac{\mu'}{\mu} - \frac{d_1}{2a_1}, \quad \frac{d\alpha}{dt} + a_2 \frac{h^2}{\mu^2} = 0 \quad (3.9)$$

и

$$\gamma = \frac{1}{4a_2} \frac{\mu'}{\mu} - \frac{d_2}{2a_2}, \quad \frac{d\gamma}{dt} + a_1 \frac{h^2}{\mu^2} = 0. \quad (3.10)$$

Исключая α из (3.9), получаем

$$\mu'' - \frac{a'_1}{a_1} \mu' + 2d_1 \left(\frac{a'_1}{a_1} - \frac{d'_1}{d_1} \right) \mu = \frac{(\mu')^2 - 4a_1 a_2 h^2}{\mu}. \quad (3.11)$$

Сравнение этого уравнения с характеристическим уравнением дает первое равенство в (3.4). Из уравнения (3.10) для γ аналогично получаем второе равенство в (3.4), чем и завершается доказательство.

Уместными будут несколько примеров. При $a = 1/2$, $b = c = d = 0$ и $\mu'' = 0$, $\mu = t$ для пропагатора свободной частицы [7] получаем

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i t}} \exp\left(\frac{i(x-y)^2}{2t}\right) \quad (3.12)$$

с очевидной симметрией. Наше условие (3.4), а именно $4a^2 = (\mu')^2$, при этом выполняется.

Простой гармонический осциллятор с $a = b = 1/2$, $c = d = 0$ и $\mu'' + \mu = 0$, $\mu = \sin t$ имеет пропагатор вида

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i \sin t}} \exp\left(\frac{i}{2 \sin t} ((x^2 + y^2) \cos t - 2xy)\right), \quad (3.13)$$

который подробно изучался в работах [9]–[14]. Обобщение на случай гармонического осциллятора с вынуждающей силой, включая дополнительный зависящий от скорости член и зависящую от времени частоту, было получено в работах [3], [4], [7], [8]. Наше условие (3.4) принимает вид тригонометрического тождества

$$4ab = \frac{4a^2 - (\mu')^2}{\mu^2}, \quad (3.14)$$

которое подтверждает симметрию пропагатора.

Для квантового осциллятора с трением [56] $a = b = \omega_0/2$, $c = d = -\lambda$ и

$$G(x, y, t) = \sqrt{\frac{\omega e^{\lambda t}}{2\pi i \omega_0 \sin \omega t}} \exp\left(\frac{i\omega}{2\omega_0 \sin \omega t} ((x^2 + y^2) \cos \omega t - 2xy)\right) \times \\ \times \exp\left(\frac{i\lambda}{2\omega_0} (x^2 - y^2)\right), \quad (3.15)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} > 0$ и $\mu = (\omega_0/\omega) e^{-\lambda t} \sin \omega t$. Условие

$$4ab = \frac{4(ah)^2 - (\mu')^2}{\mu^2} - 2\varepsilon \frac{\mu'}{\mu}, \quad (3.16)$$

где $\varepsilon = c - 2d = \lambda$ и $h = e^{-\lambda t}$, здесь выполнено. Однако при этом $d(0) = -\lambda \neq 0$, и более подробный анализ асимптотик дает дополнительный антисимметричный член в приведенном выше пропагаторе [56].

Гамильтонианы (1.2) и (1.7) соответствуют случаям

$$a_1 = \cos^2 t, \quad b_1 = \sin^2 t, \quad c_1 = 2d_1 = \sin 2t \quad (3.17)$$

и

$$a_2 = \operatorname{ch}^2 t, \quad b_2 = \operatorname{sh}^2 t, \quad c_2 = 2d_2 = -\operatorname{sh} 2t. \quad (3.18)$$

Наши критерии (3.4) выполнены в силу очевидного тождества

$$4a_1a_2 = (\mu')^2. \quad (3.19)$$

Характеристическая функция имеет вид (2.17). Это объясняет симметрию пропагатора, найденную в предыдущем разделе.

Последняя дуальная пара квадратичных гамильтонианов имеет коэффициенты

$$a_1 = \sin^2 t, \quad b_1 = \cos^2 t, \quad c_1 = 2d_1 = -\sin 2t \quad (3.20)$$

и

$$a_2 = \operatorname{sh}^2 t, \quad b_2 = \operatorname{ch}^2 t, \quad c_2 = 2d_2 = \operatorname{sh} 2t. \quad (3.21)$$

Критерии (3.4) выполнены в силу тождества (3.19) с характеристической функцией (2.22), поэтому пропагатор (2.23) подчиняется симметрии относительно взаимной замены $x \leftrightarrow y$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В условии (3.4) можно использовать простое соотношение

$$\frac{\mu'}{\mu} = 4 \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\tau_1 - \tau_2}, \quad (3.22)$$

справедливое для совместного решения двух характеристических уравнений.

Хотя условия леммы 1 сформулированы только для функций Грина, ее можно применить к решениям с регулярными начальными условиями. Например, пара характеристических уравнений (2.11) и (2.21) имеет совместное решение, задаваемое выражением (2.12), которое не удовлетворяет начальным условиям, налагаемым на функции Грина. Коэффициенты соответствующих квадратичных гамильтонианов имеют вид

$$a_1 = \cos^2 t, \quad b_1 = \sin^2 t, \quad c_1 = 2d_1 = \sin 2t \quad (3.23)$$

и

$$a_2 = \operatorname{sh}^2 t, \quad b_2 = \operatorname{ch}^2 t, \quad c_2 = 2d_2 = \operatorname{sh} 2t. \quad (3.24)$$

Условие (3.4) выполнено в силу тождества (3.19), а частное решение

$$\begin{aligned} \psi = K(x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\cos t \operatorname{ch} t + \sin t \operatorname{sh} t)}} \times \\ &\times \exp\left(\frac{(x^2 + y^2) \sin t \operatorname{ch} t - 2xy - (x^2 - y^2) \cos t \operatorname{sh} t}{2i(\cos t \operatorname{ch} t + \sin t \operatorname{sh} t)}\right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

подчиняется симметрии $x \leftrightarrow y$. Начальное условие представляет собой стоячую волну $K(x, y, 0) = e^{ixy}/\sqrt{2\pi}$.

Аналогичным образом характеристические уравнения (2.20) и (2.14) обладают общим решением

$$\mu = -\mu_3 = \cos t \operatorname{ch} t - \sin t \operatorname{sh} t. \quad (3.26)$$

Коэффициенты соответствующих гамильтонианов имеют вид

$$a_1 = \sin^2 t, \quad b_1 = \cos^2 t, \quad c_1 = 2d_1 = -\sin 2t \quad (3.27)$$

и

$$a_2 = \operatorname{ch}^2 t, \quad b_2 = \operatorname{sh}^2 t, \quad c_2 = 2d_2 = -\operatorname{sh} 2t. \quad (3.28)$$

Условие (3.4) снова выполнено, а частное решение записывается так:

$$\begin{aligned} \psi = K(x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\cos t \operatorname{ch} t - \sin t \operatorname{sh} t)}} \times \\ &\times \exp\left(\frac{(x^2 + y^2) \sin t \operatorname{ch} t + 2xy + (x^2 - y^2) \cos t \operatorname{sh} t}{2i(\cos t \operatorname{ch} t - \sin t \operatorname{sh} t)}\right), \end{aligned} \quad (3.29)$$

где $K(x, y, 0) = e^{-ixy}/\sqrt{2\pi}$. В разделе 6 мы рассмотрим, как эти решения связаны с соответствующими операторами эволюции.

4. КОМПЛЕКСНЫЙ ВИД ПРОПАГАТОРОВ

Стоит отметить, что пропагатор (1.5) можно переписать в терминах вронскианов тригонометрических и гипергеометрических функций:

$$\begin{aligned} G(x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i W(\cos t, \operatorname{ch} t)}} \times \\ &\times \exp\left(\frac{W(\sin t, \operatorname{ch} t)x^2 + 2xy - W(\cos t, \operatorname{sh} t)y^2}{2iW(\cos t, \operatorname{ch} t)}\right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Это означает, что данный пропагатор имеет структуру

$$G = \sqrt{\frac{c_2 - c_3}{4\pi i}} \exp\left(\frac{c_1 x^2 + (c_2 - c_3)xy - c_4 y^2}{2i}\right), \quad (4.2)$$

где коэффициенты представляют собой решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} c_1 \cos t + c_2 \operatorname{ch} t &= \sin t, & -c_1 \sin t + c_2 \operatorname{sh} t &= \cos t, \\ c_3 \cos t + c_4 \operatorname{ch} t &= \operatorname{sh} t, & -c_3 \sin t + c_4 \operatorname{sh} t &= \operatorname{ch} t. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Эта система может быть записана в комплексном виде

$$c_1 z^* + c_2 \zeta = iz^*, \quad c_3 z^* + c_4 \zeta = i\zeta^*, \quad (4.4)$$

где введены две комплексные переменные

$$z = \cos t + i \sin t, \quad \zeta = \operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t, \quad (4.5)$$

а звездочка обозначает комплексное сопряжение. Взяв комплексное сопряжение системы (4.4), которая имеет вещественнозначные решения, и снова решив систему, получим

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{z\zeta + z^*\zeta^*}{i(z\zeta - z^*\zeta^*)}, & c_2 &= \frac{2i}{z\zeta - z^*\zeta^*}, \\ c_3 &= \frac{2}{i(z\zeta - z^*\zeta^*)}, & c_4 &= -\frac{z\zeta^* + z^*\zeta}{i(z\zeta - z^*\zeta^*)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В результате находим компактное симметричное выражение для пропагатора (1.5) в виде функции двух комплексных переменных:

$$\begin{aligned} G(x, y, t) = G(x, y, z, \zeta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi(z\zeta - z^*\zeta^*)}} \times \\ &\times \exp\left(\frac{(z\zeta + z^*\zeta^*)x^2 - 4xy + (z\zeta^* + z^*\zeta)y^2}{2(z^*\zeta^* - z\zeta)}\right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Эта функция принимает привычный вид

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi i(x_1x_4 + x_2x_3)}} \exp\left(\frac{(x^2 - y^2)x_2x_4 + 2xy - (x^2 + y^2)x_1x_3}{2i(x_1x_4 + x_2x_3)}\right) \quad (4.8)$$

в вещественнозначном четырехмерном векторном пространстве, если положить $z = x_1 + ix_2$ и $\zeta = x_3 + ix_4$ при $x'_1 = -x_2$, $x'_2 = x_1$, $x'_3 = x_4$, $x'_4 = x_3$ и решить следующие уравнения с начальными условиями:

$$\begin{aligned} x''_1 + x_1 &= 0, & x_1(0) &= 1, & x'_1(0) &= 0, \\ x''_2 + x_2 &= 0, & x_2(0) &= 0, & x'_2(0) &= 1, \\ x''_3 - x_3 &= 0, & x_3(0) &= 1, & x'_3(0) &= 0, \\ x''_4 - x_4 &= 0, & x_4(0) &= 0, & x'_4(0) &= 1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Решение этих уравнений можно интерпретировать как траекторию классической “частицы”, движущейся в этом пространстве; ср. с (1.5).

Отметим, что выражение для пропагаторов (4.7), расширенное до функции двух независимых комплексных переменных z и ζ , позволяет унифицировать несколько точно решаемых квантово-механических моделей в геометрических терминах, а именно с помощью выбора различных контуров с некоторой “синхронизированной” параметризацией на паре рассматриваемых комплексных “временных” плоскостей. В самом деле, пропагатор свободной частицы (3.12) возникает при $z = 1$ и $\zeta = 1 + it$. Пропагатор простого гармонического осциллятора (3.13) соответствует случаю $z = 1$ и $\zeta = e^{it}$. Как мы увидим ниже в данном разделе, пропагатор (1.5) является также специальным случаем выражения (4.7). Поэтому о рассматриваемых гамильтонианах можно говорить, как о гамильтонианах модифицированных осцилляторов. Используя не вполне точную аналогию со специальной теорией относительности, можно также сказать, что в этом случае имеются двое синхронизированных “часов”, а именно два контура, параметризованных переменными (4.5), один в евклидовом, а другой в псевдоевклидовом двумерных пространствах. Эти

Рис. 1. Двое синхронизированных “часов” – контуров, соответствующих модифицированным осцилляторам, в комплексной евклидовой z (а) и псевдоевклидовой ζ (б) “временных” плоскостях.

контуров геометрически описывают эволюцию гамильтонианов модифицированных осцилляторов (см. рис. 1). Идея введения геометрической структуры времени в рассматриваемую задачу может быть полезна для эволюционных уравнений других типов.

Аналогичным образом новый пропагатор (2.23) можно переписать в терминах вронскианов,

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i W(\sin t, \operatorname{sh} t)}} \times \exp\left(\frac{W(\cos t, \operatorname{sh} t)x^2 - 2xy - W(\sin t, \operatorname{ch} t)y^2}{2iW(\operatorname{sh} t, \sin t)}\right), \quad (4.10)$$

или в комплексном виде

$$G(x, y, t) = G(x, y, z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi(z\zeta^* - z^*\zeta)}} \times \exp\left(\frac{(z\zeta^* + z^*\zeta)x^2 - 4xy + (z\zeta + z^*\zeta^*)y^2}{2(z^*\zeta - z\zeta^*)}\right). \quad (4.11)$$

Подробности вывода этих соотношений мы оставляем читателю.

5. ОБРАТНЫЙ ОПЕРАТОР И ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ

Будем следовать методу, предложенному в работе [22] для квадратичных гамильтонианов общего вида, хотя и с некоторыми отличиями в мелочах. Левый обратный

Рис. 2. Оператор эволюции и обратный к нему.

для интегрального оператора, определяемого выражениями (1.4), (1.5), а именно формулой

$$U(t)\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t)\psi(y) dy, \quad (5.1)$$

задается равенством

$$U^{-1}(t)\chi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(y, x, -t)\chi(y) dy, \quad (5.2)$$

поскольку $U^{-1} = U^\dagger$ (см. рис. 2). Действительно, при $s < t$ согласно теореме Фубини

$$\begin{aligned} U^{-1}(s)(U(t)\psi) &= U^{-1}(s)\chi = \int_{-\infty}^{\infty} G(z, x, -s)\chi(z) dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(z, x, -s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(z, y, t)\psi(y) dy \right) dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, s, t)\psi(y) dy. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G(x, y, s, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(z, x, -s)G(z, y, t) dz = \\ &= \frac{e^{i(\gamma(t)y^2 - \gamma(s)x^2)}}{2\pi \sqrt{\mu(s)\mu(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(\alpha(t) - \alpha(s))z^2 + (\beta(t)y - \beta(s)x)z]} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi i \mu(s)\mu(t)(\alpha(s) - \alpha(t))}} \times \\ &\times \exp\left(\frac{(\beta(t)y - \beta(s)x)^2 - 4(\alpha(t) - \alpha(s))(\gamma(t)y^2 - \gamma(s)x^2)}{4i(\alpha(t) - \alpha(s))}\right), \end{aligned} \quad (5.4)$$

причем мы использовали известный гауссов интеграл [57]–[59]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(az^2 + 2bz)} dz = \sqrt{\frac{\pi i}{a}} e^{-ib^2/a}. \quad (5.5)$$

С учетом (2.6) получаем

$$(\beta(t)y - \beta(s)x)^2 = \left(\frac{x}{\mu(s)} - \frac{y}{\mu(t)} \right)^2 = \frac{\left(\sqrt{\frac{\mu(t)}{\mu(s)}} x - \sqrt{\frac{\mu(s)}{\mu(t)}} y \right)^2}{\mu(s)\mu(t)}, \quad (5.6)$$

и сингулярная часть выражения (5.4) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{4\pi i \mu(s)\mu(t)(\alpha(s) - \alpha(t))}} \exp\left(\frac{(\beta(t)y - \beta(s)x)^2}{4i(\alpha(t) - \alpha(s))}\right) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{4\pi i \mu(s)\mu(t)(\alpha(s) - \alpha(t))}} \exp\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{\mu(t)}{\mu(s)}} x - \sqrt{\frac{\mu(s)}{\mu(t)}} y\right)^2}{4i\mu(s)\mu(t)(\alpha(t) - \alpha(s))}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, в пределе $s \rightarrow t-0$ в правой части уравнения (5.3) можно формально получить единичный оператор. Подробности мы здесь не приводим.

С другой стороны, интегральный оператор, заданный формулами (1.4), (1.5), которые мы здесь запишем в виде

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i \mu(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha(t)x^2 + \beta(t)xy + \gamma(t)y^2)} \psi(y) dy, \quad (5.7)$$

по сути представляет собой преобразование Фурье, причем обратный к нему оператор задается равенством

$$\psi(y) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi i \mu(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha(t)x^2 + \beta(t)xy + \gamma(t)y^2)} \chi(x) dx \quad (5.8)$$

в соответствии с определением (5.2) и с учетом (2.6).

Уравнение Шредингера (1.1) сохраняет свой вид, если мы заменим в нем t на $-t$ и при этом возьмем комплексное сопряжение в соответствии с $(H(-t)\varphi)^* = H(t)\varphi^*$. Последнее соотношение имеет место для обоих гамильтонианов (1.2) и (1.7). Поэтому функция $\chi(x, t) = \psi^*(x, -t)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и исходная волновая функция $\psi(x, t)$. В квантовой механике это свойство обычно известно как симметрия относительно обращения времени [10], [13], [60], [61]. Этот факт очевиден из общего решения, задаваемого для наших гамильтонианов формулами (1.4), (1.5).

С другой стороны, по определению (левый) обратный $U^{-1}(t)$ к оператору эволюции $U(t)$ возвращает систему в ее исходное квантовое состояние:

$$\psi(x, t) = U(t)\psi(x, 0), \quad (5.9)$$

$$U^{-1}(t)\psi(x, t) = U^{-1}(t)(U(t)\psi(x, 0)) = \psi(x, 0). \quad (5.10)$$

Наш анализ двух моделей осциллятора показывает, что это может быть связано с обращением времени следующим образом. Левый обратный оператора эволюции (1.4)

для уравнения Шредингера (1.1) с гамильтонианом модифицированного осциллятора (1.2) можно получить путем обращения времени $t \rightarrow -t$ в операторе эволюции, соответствующем новому “дуальному” гамильтониану (1.7) (и наоборот). То же верно для второй пары дуальных гамильтонианов. Более подробно мы рассмотрим этот вопрос в разделе 6. Таким образом, мы имеем пример ситуации в математической физике и квантовой механике, когда изменение направления времени может потребовать полного изменения динамики системы для возвращения системы в исходное квантовое состояние. Более того, двигаясь назад по времени, система будет повторять те же квантовые состояния, только если

$$\psi(x, t - s) = U(t - s)\psi(x, 0) = U^{-1}(s)U(t)\psi(x, 0), \quad 0 \leq s \leq t, \quad (5.11)$$

что эквивалентно полугрупповому свойству

$$U(s)U(t - s) = U(t) \quad (5.12)$$

для оператора эволюции. По-видимому, для пропагаторов (1.5) и (2.23) это не так.

6. ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Зависящее от времени уравнение Шредингера (2.1) можно переписать в терминах оператора координаты x и оператора линейного импульса $p_x = i^{-1}\partial/\partial x$ следующим образом:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (a(t)p_x^2 + b(t)x^2 + d(t)(xp_x + p_x x))\psi, \quad (6.1)$$

где $c = 2d$. Соответствующий квадратичный гамильтониан

$$H = a(t)p_x^2 + b(t)x^2 + d(t)(xp_x + p_x x) \quad (6.2)$$

подчиняется специальной симметрии: он формально сохраняет эту структуру при перестановке $x \leftrightarrow p_x$. Для простого гармонического осциллятора этот факт хорошо известен [10], [13], [60].

Чтобы поменять местами операторы координаты и импульса, в квантовой механике переходят от координатного представления к импульсному с помощью преобразования Фурье

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \chi(y) dy = F[\chi] \quad (6.3)$$

и обратного преобразования Фурье

$$\chi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \psi(x) dx = F^{-1}[\psi]. \quad (6.4)$$

Действительно, из известных свойств

$$p_x \psi = p_x F[\chi] = F[y\chi], \quad x\psi = xF[\chi] = -F[p_y \chi] \quad (6.5)$$

следует, что

$$p_x^2 \psi = F[y^2 \chi], \quad x^2 \psi = F[p_y^2 \chi], \quad (6.6)$$

$$(xp_x + p_x x)\psi = -F[(p_y y + yp_y)\chi]. \quad (6.7)$$

Поэтому

$$H\psi = (ap_x^2 + bx^2 + d(xp_x + p_x x))F[\chi] = F[(bp_y^2 + ay^2 - d(yp_y + p_y y))\chi]$$

в силу линейности преобразования Фурье. Поскольку

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = F\left[\frac{\partial \chi}{\partial t}\right],$$

уравнение Шредингера (6.1) принимает вид

$$i \frac{\partial \chi}{\partial t} = (b(t)p_y^2 + a(t)y^2 - d(t)(yp_y + p_y y))\chi, \quad (6.8)$$

причем в импульсном представлении мы должны совершить замены $a \leftrightarrow b$ и $d \rightarrow -d$.

Это свойство окончательно проясняет тот факт, что наши квадратичные гамильтонианы (2.2), (2.18) и аналогично (2.3), (2.19) соответствуют одному и тому же уравнению Шредингера, записанному в координатном и импульсном представлениях. Таким образом, в разделе 2 мы решили задачу Коши для модифицированных осцилляторов как в координатном, так и в импульсном представлениях.

В настоящей работе операторы рождения и уничтожения определяются как

$$a^\dagger = \frac{p_x + ix}{\sqrt{2}} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - x\right), \quad (6.9)$$

$$a = \frac{p_x - ix}{\sqrt{2}} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\right) \quad (6.10)$$

с привычным коммутатором $[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1$ [2]. Можно видеть, что при преобразовании Фурье

$$a_x \psi = a_x F[\chi] = F[ia_y \chi], \quad a_x^\dagger \psi = a_x^\dagger F[\chi] = F[-ia_y^\dagger \chi] \quad (6.11)$$

или, другими словами,

$$a_x \rightarrow ia_y, \quad a_x^\dagger \rightarrow -ia_y^\dagger. \quad (6.12)$$

Это наблюдение сыграет важную роль в следующем разделе.

Наконец, можно суммировать все результаты, полученные при решении задач Коши для рассматриваемого модифицированного осциллятора, в виде коммутативной эволюционной диаграммы, показанной на рис. 3. Пусть

$$U(t)\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_U(x, y, t)\psi(y) dy, \quad (6.13)$$

$$K(t)\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_U(x, y, t)\psi(y) dy, \quad (6.14)$$

$$V(t)\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_V(x, y, t)\psi(y) dy, \quad (6.15)$$

Рис. 3. Коммутативная эволюционная диаграмма в $\mathbb{R}$

$$L(t)\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_V(x, y, t)\psi(y) dy, \quad (6.16)$$

где $G_U(x, y, t)$ и $G_V(x, y, t)$ – функции Грина в выражениях (1.5) и (2.23) соответственно, а ядра $K_U(x, y, t)$ и $K_V(x, y, t)$ даются выражениями (3.25) и (3.29) соответственно. Выполняются следующие операторные тождества:

$$U(t) = K(t)F^{-1} = FL(t) = FV(t)F^{-1}, \quad (6.17)$$

$$V(t) = L(t)F = F^{-1}K(t) = F^{-1}U(t)F, \quad (6.18)$$

$$U^{-1}(t) = FK^{-1}(t) = L^{-1}(t)F^{-1} = FV^{-1}(t)F^{-1}, \quad (6.19)$$

$$V^{-1}(t) = F^{-1}L^{-1}(t) = K^{-1}(t)F = F^{-1}U^{-1}(t)F, \quad (6.20)$$

$$K(t) = FL(t)F, \quad L(t) = F^{-1}K(t)F^{-1}, \quad (6.21)$$

$$K^{-1}(t) = F^{-1}L^{-1}(t)F^{-1}, \quad L^{-1}(t) = FK^{-1}(t)F. \quad (6.22)$$

Здесь F и F^{-1} – операторы преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье, которые связывают волновые функции в координатном и импульсном представлениях, $\psi = F[\chi]$, $\chi = F^{-1}[\psi]$, в любой заданный момент времени и таким образом соответствуют вертикальным стрелкам на диаграмме. Операторы эволюции $U(t)$, $V(t)$ и обратные к ним $U^{-1}(t)$, $V^{-1}(t)$ отвечают горизонтальным стрелкам в координатном и импульсном представлениях соответственно. Они подчиняются симметрии относительно обращения времени, которая рассматривалась в разделе 5.

При рассмотрении диагональных стрелок на эволюционной диаграмме, изображенной на рис. 3, нам следует вернуться, скажем, к частному решению (3.25). Более общее решение уравнения Шредингера (2.1), (2.2) можно получить с помощью принципа суперпозиции в виде

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_U(x, y, t)\chi(y, 0) dy, \quad (6.23)$$

где χ – подходящая произвольная, не зависящая от времени функция такая, что интеграл сходится и можно поменять местами дифференцирование и интегрирование. С учетом непрерывности ядра при $t = 0$ получаем выражение

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\chi(y, 0) dy, \quad (6.24)$$

которое связывает начальные данные в координатном и импульсном представлении. Тогда решение задачи с начальными значениями дается обратным преобразованием Фурье

$$\chi(y, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \psi(x, 0) dx, \quad (6.25)$$

после которого выполняется обратная подстановка полученного выражения в выражение (6.23). Отсюда следует приведенная выше факторизация $U(t) = K(t)F^{-1}$ соответствующего оператора эволюции (см. (6.17)). С помощью интеграла (5.5) функцию Грина (1.5) можно получить в виде

$$G_U(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyz} K_U(x, z, t) dz. \quad (6.26)$$

Второе уравнение $U(t) = FL(t)$ связано с интегралом

$$G_U(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixz} K_V(z, y, t) dz. \quad (6.27)$$

Смысл оператора $L(t)$, представленного другой диагональной стрелкой на эволюционной диаграмме, устанавливается аналогично. Можно видеть, что соотношение $V(t) = L(t)F$ в выражении (6.18) следует из элементарного интеграла

$$G_V(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyz} K_V(x, z, t) dz, \quad (6.28)$$

а $K(t) = FV(t)$ соответствует равенству

$$K_U(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixz} G_V(z, y, t) dz. \quad (6.29)$$

Это доказывает формулы (6.17), (6.18). Обратные операторы $K^{-1}(t)$ и $L^{-1}(t)$ можно найти, например, с помощью обратного преобразования Фурье аналогично выражениям (5.7), (5.8). Они не связаны непосредственно с обращением времени. Дальнейшее подробное рассмотрение структуры коммутативной диаграммы, изображенной на рис. 3, мы опускаем.

7. СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА

В случае пространства $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности уравнение Шредингера для модифицированного осциллятора (1.1) с исходным гамильтонианом

$$H(t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n (a_s a_s^\dagger + a_s^\dagger a_s) + \frac{1}{2} e^{2it} \sum_{s=1}^n (a_s)^2 + \frac{1}{2} e^{-2it} \sum_{s=1}^n (a_s^\dagger)^2, \quad (7.1)$$

рассмотренное в работе [1], имеет функцию Грина

$$G_t(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \prod_{s=1}^n G_t(x_s, x'_s) = \left(\frac{1}{2\pi i (\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)} \right)^{n/2} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{(\mathbf{x}^2 - (\mathbf{x}')^2) \sin t \operatorname{sh} t + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' - (\mathbf{x}^2 + (\mathbf{x}')^2) \cos t \operatorname{ch} t}{2i(\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)}\right). \quad (7.2)$$

Решение задачи Коши можно записать в виде

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}', 0) d\mathbf{x}', \quad (7.3)$$

где $d\mathbf{x}' = dx'_1 \dots dx'_n$. Разложение пропагатора по гиперсферическим гармоникам имеет вид

$$G_t(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{K, \nu} Y_{K\nu}(\Omega) Y_{K\nu}^*(\Omega') \mathcal{G}_t^K(r, r'), \quad (7.4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_t^K(r, r') &= \frac{e^{-i\pi(2K+n)/4}}{2^{K+n/2-1} \Gamma(K+n/2)} \frac{(rr')^K}{(\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)^{K+n/2}} \times \\ &\times \exp\left(i \frac{(r^2 + (r')^2) \cos t \operatorname{ch} t - (r^2 - (r')^2) \sin t \operatorname{sh} t}{2(\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)}\right) \times \\ &\times {}_0F_1\left(; K+n/2; -\frac{(rr')^2}{4(\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)^2}\right). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Здесь $Y_{K\nu}(\Omega)$ – гиперсферические гармоники, построенные по заданному дереву T в рамках графического подхода работы [62], целое число K соответствует постоянной разделения переменных в корне дерева T (обозначаемой через K в методе K -гармоник в ядерной физике [63]), а $\nu = \{l_1, l_2, \dots, l_p\}$ – набор всех других нижних индексов, соответствующих остальным вершинам бинарного дерева T . Из этих формул следует известное разложение плоской волны в $\mathbb{R}^n$ по гиперсферическим гармоникам:

$$e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'} = rr' \left(\frac{2\pi}{rr'}\right)^{n/2} \sum_{K, \nu} i^K Y_{K\nu}^*(\Omega) Y_{K\nu}(\Omega') J_{K+n/2-1}(rr'), \quad (7.6)$$

где

$$J_\mu(z) = \frac{(z/2)^\mu}{\Gamma(\mu+1)} {}_0F_1\left(; \mu+1; -\frac{z^2}{4}\right) \quad (7.7)$$

– функция Бесселя (подробности см. в работе [1] и в приведенной там библиографии). Стоит отметить, что функция Грина (1.5) исходно была получена в работе [1] в специальном случае разложения (7.4), (7.5) при $n = 1$. Для вывода n -мерной функции Грина использовались динамическая $SU(1, 1)$ -симметрия волновых функций гармонического осциллятора, функции Баргманна для дискретной положительной серии неприводимых представлений этой группы, интеграл Фурье взвешенного произведения многочленов Майкснера–Поллачека, интегральное преобразование типа преобразования Ханкеля и гиперсферические гармоники.

Наши результаты показывают, что “дуальное” уравнение Шредингера (1.6) с новым гамильтонианом

$$H(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n (a_s a_s^\dagger + a_s^\dagger a_s) + \frac{1}{2} e^{-i \arctg 2\tau} \sum_{s=1}^n (a_s)^2 + \frac{1}{2} e^{i \arctg 2\tau} \sum_{s=1}^n (a_s^\dagger)^2 \quad (7.8)$$

обладает пропагатором, который почти тождествен (7.2), но с заменой $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$. Действительно, в n -мерном случае имеем

$$H(\tau) = \sum_{s=1}^n H_s(\tau), \quad (7.9)$$

где

$$H_s(\tau) = \frac{1}{2} (a_s a_s^\dagger + a_s^\dagger a_s) + \frac{1}{2} e^{-i \arctg 2\tau} (a_s)^2 + \frac{1}{2} e^{i \arctg 2\tau} (a_s^\dagger)^2. \quad (7.10)$$

Если выбрать

$$\begin{aligned} \psi_s = \psi_s(x_s, t) = G_t(x'_s, x_s) &= \left(\frac{1}{2\pi i (\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)} \right)^{1/2} \times \\ &\times \exp \left(\frac{((x'_s)^2 - x_s^2) \sin t \operatorname{sh} t + 2x'_s x_s - ((x'_s)^2 + x_s^2) \cos t \operatorname{ch} t}{2i (\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)} \right), \end{aligned} \quad (7.11)$$

где

$$i \frac{\partial \psi_s}{\partial \tau} = H_s(\tau) \psi_s, \quad t = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\tau, \quad (7.12)$$

и положить

$$\psi = \prod_{k=1}^n \psi_k = \prod_{k=1}^n G_t(x'_k, x_k) = G_t(\mathbf{x}', \mathbf{x}), \quad (7.13)$$

то мы получим, что

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \sum_{s=1}^n \left(i \frac{\partial \psi_s}{\partial \tau} \right) \prod_{k \neq s} \psi_k, \quad (7.14)$$

$$H(\tau) \psi = \sum_{s=1}^n (H_s(\tau) \psi_s) \prod_{k \neq s} \psi_k. \quad (7.15)$$

В результате мы имеем

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - H(\tau) \right) \psi = \sum_{s=1}^n \left(i \frac{\partial \psi_s}{\partial \tau} - H_s(\tau) \psi_s \right) \prod_{k \neq s} \psi_k \equiv 0, \quad (7.16)$$

и уравнение (1.6) для n -мерного пропагатора выполнено. Для начальных условий формально

$$\lim_{t \rightarrow +0} G_t(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \prod_{k=1}^n \lim_{t \rightarrow +0} G_t(x'_k, x_k) = \prod_{k=1}^n \delta(x'_k - x_k) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (7.17)$$

где $\delta(\mathbf{x})$ – дельта-функция Дирака в $\mathbb{R}^n$.

Далее, n -мерный вариант гамильтониана с коэффициентами (2.18) имеет вид

$$H(t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n (a_s a_s^\dagger + a_s^\dagger a_s) - \frac{1}{2} e^{2it} \sum_{s=1}^n (a_s)^2 - \frac{1}{2} e^{-2it} \sum_{s=1}^n (a_s^\dagger)^2, \quad (7.18)$$

причем пропагатор равен

$$G_t(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left(\frac{1}{2\pi i (\sin t \operatorname{ch} t - \cos t \operatorname{sh} t)} \right)^{n/2} \times \\ \times \exp \left(\frac{(\mathbf{x}^2 + (\mathbf{x}')^2) \cos t \operatorname{ch} t - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + (\mathbf{x}^2 - (\mathbf{x}')^2) \sin t \operatorname{sh} t}{2i(\cos t \operatorname{sh} t - \sin t \operatorname{ch} t)} \right). \quad (7.19)$$

Дуальный вариант этого гамильтониана по отношению к обращению времени есть

$$H(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n (a_s a_s^\dagger + a_s^\dagger a_s) - \frac{1}{2} e^{-i \operatorname{arctg} 2\tau} \sum_{s=1}^n (a_s)^2 - \frac{1}{2} e^{i \operatorname{arctg} 2\tau} \sum_{s=1}^n (a_s^\dagger)^2, \quad (7.20)$$

а чтобы получить соответствующую функцию Грина, в выражении (7.19) следует выполнить замену $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$. Стоит отметить, что гамильтонианы (7.1) и (7.18) (соответственно, (7.8) и (7.20)) преобразуются друг в друга подстановкой $a_s \rightarrow i a_s$, $a_s^\dagger \rightarrow -i a_s^\dagger$, которая сохраняет коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения. Как было показано в предыдущем разделе, это свойство связано с решением задачи в координатном и импульсном представлениях.

Собирая вместе все четыре случая, можно сделать вывод, что два гамильтониана

$$H_\pm(t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n (a_s a_s^\dagger + a_s^\dagger a_s) \pm \frac{1}{2} e^{2it} \sum_{s=1}^n (a_s)^2 \pm \frac{1}{2} e^{-2it} \sum_{s=1}^n (a_s^\dagger)^2 \quad (7.21)$$

и гамильтонианы, дуальные к ним относительно обращения времени,

$$H_\pm(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n (a_s a_s^\dagger + a_s^\dagger a_s) \pm \frac{1}{2} e^{-i \operatorname{arctg} 2\tau} \sum_{s=1}^n (a_s)^2 \pm \frac{1}{2} e^{i \operatorname{arctg} 2\tau} \sum_{s=1}^n (a_s^\dagger)^2, \quad (7.22)$$

где $\tau = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t$, имеют следующие функции Грина: для гамильтонианов (7.21)

$$G_t^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left(\frac{1}{2\pi i (\sin t \operatorname{ch} t \pm \cos t \operatorname{sh} t)} \right)^{n/2} \times \\ \times \exp \left(\frac{\pm(\mathbf{x}^2 - (\mathbf{x}')^2) \sin t \operatorname{sh} t + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' - (\mathbf{x}^2 + (\mathbf{x}')^2) \cos t \operatorname{ch} t}{2i(\sin t \operatorname{ch} t \pm \cos t \operatorname{sh} t)} \right); \quad (7.23)$$

для дуальных гамильтонианов (7.22) следует сделать замену $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$.

Аналогичным образом n -мерные ядра, отвечающие (3.25) и (3.29), принимают вид

$$K_t^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left(\frac{1}{2\pi(\cos t \operatorname{ch} t \pm \sin t \operatorname{sh} t)} \right)^{n/2} \times \\ \times \exp \left(\frac{(\mathbf{x}^2 + (\mathbf{x}')^2) \sin t \operatorname{ch} t \mp 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' \mp (\mathbf{x}^2 - (\mathbf{x}')^2) \cos t \operatorname{sh} t}{2i(\cos t \operatorname{ch} t \pm \sin t \operatorname{sh} t)} \right), \quad (7.24)$$

при этом

$$G_t^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mp i \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}''} K_t^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') d\mathbf{x}'' =$$

Рис. 4. Коммутативная эволюционная диаграмма в $\mathbb{R}^n$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}''} K_t^{\mp}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') d\mathbf{x}'' . \quad (7.25)$$

Пусть

$$\begin{aligned} U_{\pm}(t)\psi(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} G_t^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \\ K_{\pm}(t)\psi(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} K_t^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \\ F_{\pm}\psi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}\psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Тогда получим коммутативную эволюционную диаграмму в $\mathbb{R}^n$, изображенную на рис. 4. Соответствующие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} U_{\pm}(t) &= K_{\pm}(t)F_{\mp} = F_{\pm}K_{\mp}(t) = F_{\pm}U_{\mp}(t)F_{\mp}, \\ U_{\pm}^{-1}(t) &= F_{\pm}K_{\pm}^{-1}(t) = K_{\mp}^{-1}(t)F_{\mp} = F_{\pm}U_{\mp}^{-1}(t)F_{\mp}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Остальные подробности мы предоставляем выяснить читателю.

В работе [1] в связи с представлениями группы $SU(1, 1)$ в абстрактном гильбертовом пространстве с чисто алгебраической точки зрения рассматривалось некоторое зависящее от времени уравнение Шредингера с переменными коэффициентами. Наши гамильтонианы (7.21) и (7.22) принадлежат к тому же классу, и это дает новые явные реализации данной модели в дополнение к тем нескольким случаям, которые уже были исследованы в работе [1].

8. РАЗЛОЖЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Нормированные волновые функции n -мерного гармонического осциллятора,

$$H_0\Psi = E\Psi, \quad H_0 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + x_s^2 \right), \quad (8.1)$$

имеют вид

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_{NK\nu}(r, \Omega) = Y_{K\nu}(\Omega)R_{NK}(r), \quad (8.2)$$

где обозначения те же, что и в (7.5) (см. [62]–[64] по поводу графического подхода Виленкина, Кузнецова и Смородинского к теории сферических гармоник). Радиальные функции даются выражением

$$R_{NK}(r) = \sqrt{\frac{2[(N-K)/2]!}{\Gamma[(N+K+n)/2]}} e^{-r^2/2} r^K L_{(N-K)/2}^{K+n/2-1}(r^2), \quad (8.3)$$

где $L_k^\alpha(\xi)$ – полиномы Лагерра. Соответствующие уровни энергии суть

$$E = E_N = N + \frac{n}{2}, \quad \frac{N-K}{2} = k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.4)$$

а для волновой функции можно использовать $SU(1,1)$ -обозначения:

$$\psi_{jm\{\nu\}}(\mathbf{x}) = \Psi_{NK\nu}(r, \Omega) = Y_{K\nu}(\Omega) R_{NK}(r), \quad (8.5)$$

где новые квантовые числа равны $j = K/2 + n/4 - 1$ и $m = N/2 + n/4$, $m = j + 1, j + 2, \dots$. Неравенство $m \geq j + 1$ выполнено в соответствии с правилом квантования (8.4), которое дает $N = K, K + 2, K + 4, \dots$. Более подробно вопрос о теоретико-групповых свойствах волновой функции n -мерного гармонического осциллятора рассмотрен в работах [1], [62], [63].

Задача Коши для уравнения Шредингера (1.1) с гамильтонианом модифицированного осциллятора (7.1) также имеет решение в виде разложения по собственным функциям [1]:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{j\{\nu\}} \sum_{m=j+1}^{\infty} c_m(t) \psi_{jm\{\nu\}}(\mathbf{x}), \quad (8.6)$$

с зависящими от времени коэффициентами

$$c_m(t) = e^{-2imt} \sum_{m'=j+1}^{\infty} i^{m'-m} v_{m'm}^j(2t) \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{jm'\{\nu\}}^*(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}', 0) dv', \quad (8.7)$$

заданными в терминах функций Баргманна [62], [64], [65]:

$$\begin{aligned} v_{mm'}^j(\mu) &= \frac{(-1)^{m-j-1}}{\Gamma(2j+2)} \sqrt{\frac{(m+j)!(m'+j)!}{(m-j-1)!(m'-j-1)!}} \left(\operatorname{sh} \frac{\mu}{2}\right)^{-2j-2} \left(\operatorname{th} \frac{\mu}{2}\right)^{m+m'} \times \\ &\times {}_2F_1\left(-m+j+1, -m'+j+1; 2j+2; -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(\mu/2)}\right). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Выбирая начальные данные в (7.3) и (8.6), (8.7) в виде $\psi(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, получаем разложение функции Грина по собственным функциям:

$$G_t(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{j\{\nu\}} \sum_{m, m'=j+1}^{\infty} e^{-2imt} i^{m'-m} v_{m'm}^j(2t) \psi_{jm\{\nu\}}(\mathbf{x}) \psi_{jm'\{\nu\}}^*(\mathbf{x}'), \quad (8.9)$$

где согласно (7.19) выполнено свойство симметрии

$$G_t(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_{-t}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (8.10)$$

В настоящей работе нами получено решение задачи Коши для нового гамильтониана (7.8) в интегральном виде:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}', 0) d\mathbf{x}'. \quad (8.11)$$

С учетом уравнений (8.9), (8.10) разложение этого решения по собственным функциям имеет вид

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{j\{\nu\}} \sum_{m=j+1}^{\infty} c_m(t) \psi_{jm\{\nu\}}(\mathbf{x}), \quad (8.12)$$

где

$$c_m(t) = \sum_{m'=j+1}^{\infty} (-i)^{m-m'} e^{-2im't} (v_{m'm}^j(-2t))^* \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{jm'\{\nu\}}^*(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}', 0) dv'. \quad (8.13)$$

Это разложение согласуется с унитарной бесконечной матрицей обратного оператора в базисе волновых функций гармонического осциллятора (см. раздел 5).

Случай гамильтониана (7.18) и его дуального гамильтониана (7.20) можно исследовать, взяв преобразование Фурье разложений (8.6), (8.7) и (8.12), (8.13) соответственно. Преобразования осцилляторных волновых функций имеют вид

$$i^{\pm N} \Psi_{NK\nu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'} \Psi_{NK\nu}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (8.14)$$

Их можно вычислить в гипертсферических координатах с помощью разложения (7.6), (7.7) или складывая $SU(1, 1)$ -импульсы согласно рецепту, определяемому деревом T [62], [63], и учитывая линейность преобразования Фурье. Можно использовать равенство

$$e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'} = (2\pi)^{n/2} \sum_{K, \nu} i^K Y_{K\nu}^*(\Omega) Y_{K\nu}(\Omega') S_{-1}(r, r'), \quad (8.15)$$

где

$$S_{-1}(r, r') = \frac{(rr')^K}{2^{K+n/2-1} \Gamma(K+n/2)} {}_0F_1\left(; K+n/2; -\frac{(rr')^2}{4}\right) \quad (8.16)$$

и

$$(-1)^{(N-K)/2} R_{NK}(r) = \int_0^\infty S_{-1}(r, r') R_{NK}(r') (r')^{n-1} dr', \quad (8.17)$$

как специальный случай уравнений (7.3), (7.6) из работы [1], а также свойство ортогональности гипертсферических гармоник.

9. ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

В работе [20] метод решения уравнения (2.1) обобщен на решение нелинейного уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -a(t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b(t) x^2 \psi - i \left(c(t) x \frac{\partial \psi}{\partial x} + d(t) \psi \right) + h(t) |\psi|^{2s} \psi, \quad s \geq 0. \quad (9.1)$$

Рассмотрим первый из двух случаев (2.2) и (2.3). Частное решение имеет вид

$$\psi = \psi(x, t) = K_h(x, y, t) = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{\mu(t)}} e^{i(\alpha(t)x^2 + \beta(t)xy + \gamma(t)y^2 + \kappa(t))}, \quad \phi = \text{const}, \quad (9.2)$$

причем выполняются уравнения (2.5)–(2.7) и, кроме того,

$$\frac{d\kappa}{dt} = -\frac{h(t)}{\mu^s(t)}, \quad \kappa(t) = \kappa(0) - \int_0^t \frac{h(\tau)}{\mu^s(\tau)} d\tau, \quad (9.3)$$

откуда следует, что интеграл сходится.

В случае (2.2) согласно принципу суперпозиции общее решение характеристического уравнения (2.11) имеет вид

$$\begin{aligned} \mu &= c_1\mu_1(t) + c_2\mu_2(t) = \cos t(c_1 \operatorname{ch} t + c_2 \operatorname{sh} t) + \sin t(c_1 \operatorname{sh} t + c_2 \operatorname{ch} t) = \\ &= \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2}} e^t \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{2}} e^{-t} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned} \quad (9.4)$$

где $\mu' = 2 \cos t(c_1 \operatorname{sh} t + c_2 \operatorname{ch} t)$ и

$$\mu(0) = c_1, \quad \mu'(0) = 2c_2. \quad (9.5)$$

Тогда в результате элементарных, но достаточно утомительных вычислений получаем

$$\alpha(t) = \frac{\cos t(c_1 \operatorname{sh} t + c_2 \operatorname{ch} t) - \sin t(c_1 \operatorname{ch} t + c_2 \operatorname{sh} t)}{2(\cos t(c_1 \operatorname{ch} t + c_2 \operatorname{sh} t) + \sin t(c_1 \operatorname{sh} t + c_2 \operatorname{ch} t))}, \quad (9.6)$$

$$\beta(t) = \frac{c_1\beta(0)}{\cos t(c_1 \operatorname{ch} t + c_2 \operatorname{sh} t) + \sin t(c_1 \operatorname{sh} t + c_2 \operatorname{ch} t)}, \quad (9.7)$$

$$\gamma(t) = \gamma(0) - \frac{c_1\beta^2(0)(\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)}{2(\cos t(c_1 \operatorname{ch} t + c_2 \operatorname{sh} t) + \sin t(c_1 \operatorname{sh} t + c_2 \operatorname{ch} t))}. \quad (9.8)$$

Первое и второе уравнения непосредственно следуют соответственно из (2.5) и из уравнения, отличающегося от первого из уравнений (2.6) лишь постоянным общим множителем. Для вывода (9.8) следует использовать уравнение

$$\frac{d\gamma}{dt} + a(t)\beta^2 = 0 \quad (9.9)$$

(см. [20]), интегрирование по частям, как и в (2.7), а также элементарный интеграл

$$\int \frac{dt}{(c_1 \operatorname{sh} t + c_2 \operatorname{ch} t)^2} = \frac{\operatorname{sh} t}{c_2(c_1 \operatorname{sh} t + c_2 \operatorname{ch} t)} + C. \quad (9.10)$$

Имеются два специальных случая. Исходный пропагатор (1.5) возникает в пределе $c_1 \rightarrow 0$ при $\beta(0) = -c_1^{-1}$ и $\gamma(0) = (2c_1c_2)^{-1}$. Найденное в работе [20] решение при начальных данных $\psi(x, 0) = e^{ixy}$ (стоячая волна) соответствует $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$.

В некоторых специальных случаях уравнение (9.3) можно проинтегрировать, например при $h(t) = \lambda \mu'(t)$:

$$\kappa(t) = \begin{cases} \kappa(0) - \frac{\lambda}{1-s} (\mu^{1-s}(t) - \mu^{1-s}(0)) & \text{при } s \neq 1, \\ \kappa(0) - \lambda \ln \left(\frac{\mu(t)}{\mu(0)} \right) & \text{при } s = 1. \end{cases} \quad (9.11)$$

Здесь $\mu(0) \neq 0$ (ср. [20]). Можно трактовать общее частное решение вида (9.2) с коэффициентами (9.6)–(9.8) и (9.11) как пример применения пока неизвестного “нелинейного” принципа суперпозиции для рассматриваемого уравнения Шредингера к двум частным решениям сходного вида, для которых $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$ и $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$.

Следует отметить, что функция (9.2) с коэффициентами, заданными выражениями (9.4)–(9.11), также удовлетворяет линейному уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -a(t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b(t)x^2 \psi - i \left(c(t)x \frac{\partial \psi}{\partial x} + d(t)\psi \right) + \frac{h(t)}{\mu^s(t)} \psi, \quad s \geq 0. \quad (9.12)$$

Более общее решение этого уравнения можно получить с помощью принципа суперпозиции следующим образом:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_h(x, y, t) \chi(y) dy, \quad (9.13)$$

где χ – такая произвольная функция, что интеграл сходится и можно поменять местами дифференцирование и интегрирование. Решение задачи Коши просто требует обращения интеграла

$$\psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} K_h(x, y, 0) \chi(y) dy, \quad (9.14)$$

т. е.

$$\chi(y) = \frac{c_1 \beta(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_h^*(x, y, 0) \psi(x, 0) dx, \quad (9.15)$$

скажем, с помощью обратного преобразования Фурье. Таким образом, наши равенства (9.13) и (9.15) дают решение задачи с начальными значениями для приведенного выше линейного уравнения Шредингера (9.12) в терминах двукратного интеграла с ядром $K_h(x, y, t)$, регулярным при $t = 0$ и при $\mu(0) = c_1 \neq 0$.

С другой стороны,

$$K_h(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_h(x, z, t) K_h(z, y, 0) dz, \quad (9.16)$$

где $G_h(x, y, t)$ – функция Грина, которую можно получить из нашего решения (9.2) в пределе $c_1 \rightarrow 0$ с должной нормировкой, как в пропагаторе (1.5). Поэтому подстановка выражения (9.15) в выражение (9.14) дает решение в виде традиционного однократного интеграла от функции Грина:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_h(x, y, t) \psi(y, 0) dy \quad (9.17)$$

согласно (9.16).

Случай нового гамильтониана, соответствующего (2.3), рассматривается аналогично. Общее решение характеристического уравнения (2.14) имеет вид

$$\begin{aligned}\mu &= c_2\mu_2(t) + c_3\mu_3(t) = \cos t(c_2 \operatorname{sh} t - c_3 \operatorname{ch} t) + \sin t(c_2 \operatorname{ch} t + c_3 \operatorname{sh} t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \left(c_2 \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) - c_3 \cos \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \left(c_2 \cos \left(t + \frac{\pi}{4} \right) + c_3 \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \right),\end{aligned}\quad (9.18)$$

где $\mu' = 2 \operatorname{ch} t(c_2 \cos t + c_3 \sin t)$, а $\mu(0) = -c_3$, $\mu'(0) = 2c_2$. Три первых коэффициента квадратичной формы в решении (9.2) имеют вид

$$\alpha(t) = \frac{\cos t(c_2 \operatorname{ch} t - c_3 \operatorname{sh} t) + \sin t(c_2 \operatorname{sh} t + c_3 \operatorname{ch} t)}{2(\cos t(c_2 \operatorname{sh} t - c_3 \operatorname{ch} t) + \sin t(c_2 \operatorname{ch} t + c_3 \operatorname{sh} t))}, \quad (9.19)$$

$$\beta(t) = \frac{-c_3\beta(0)}{\cos t(c_2 \operatorname{sh} t - c_3 \operatorname{ch} t) + \sin t(c_2 \operatorname{ch} t + c_3 \operatorname{sh} t)}, \quad (9.20)$$

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \frac{c_3\beta^2(0)(\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)}{2(\cos t(c_2 \operatorname{sh} t - c_3 \operatorname{ch} t) + \sin t(c_2 \operatorname{ch} t + c_3 \operatorname{sh} t))}, \quad (9.21)$$

а для последнего коэффициента можно воспользоваться формулой (9.11). Соответствующий элементарный интеграл записывается как

$$\int \frac{dt}{(A \cos t + B \sin t)^2} = \frac{\sin t}{A(A \cos t + B \sin t)} + C. \quad (9.22)$$

Случаи (2.18) и (2.19) рассматриваются аналогично; для случая (2.18) мы получаем в результате

$$\mu = c_3\mu_3(t) + c_4\mu_4(t) = \sin t(c_3 \operatorname{sh} t + c_4 \operatorname{ch} t) - \cos t(c_3 \operatorname{ch} t + c_4 \operatorname{sh} t), \quad (9.23)$$

$$\alpha(t) = \frac{\sin t(c_3 \operatorname{ch} t + c_4 \operatorname{sh} t) + \cos t(c_3 \operatorname{sh} t + c_4 \operatorname{ch} t)}{2(\sin t(c_3 \operatorname{sh} t + c_4 \operatorname{ch} t) - \cos t(c_3 \operatorname{ch} t + c_4 \operatorname{sh} t))}, \quad (9.24)$$

$$\beta(t) = \frac{-c_3\beta(0)}{\sin t(c_3 \operatorname{sh} t + c_4 \operatorname{ch} t) - \cos t(c_3 \operatorname{ch} t + c_4 \operatorname{sh} t)}, \quad (9.25)$$

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \frac{c_3\beta^2(0)(\sin t \operatorname{ch} t - \cos t \operatorname{sh} t)}{2(\sin t(c_3 \operatorname{sh} t + c_4 \operatorname{ch} t) - \cos t(c_3 \operatorname{ch} t + c_4 \operatorname{sh} t))}; \quad (9.26)$$

для случая (2.19) –

$$\mu = c_1\mu_1(t) + c_4\mu_4(t) = \cos t(c_1 \operatorname{ch} t - c_4 \operatorname{sh} t) + \sin t(c_1 \operatorname{sh} t + c_4 \operatorname{ch} t), \quad (9.27)$$

$$\alpha(t) = -\frac{\operatorname{sh} t(c_1 \cos t + c_4 \sin t) + \operatorname{ch} t(c_1 \sin t - c_4 \cos t)}{2(\operatorname{sh} t(c_1 \sin t - c_4 \cos t) + \operatorname{ch} t(c_1 \cos t + c_4 \sin t))}, \quad (9.28)$$

$$\beta(t) = \frac{c_1\beta(0)}{\operatorname{sh} t(c_1 \sin t - c_4 \cos t) + \operatorname{ch} t(c_1 \cos t + c_4 \sin t)}, \quad (9.29)$$

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \frac{c_1\beta^2(0)(\cos t \operatorname{sh} t - \sin t \operatorname{ch} t)}{2(\operatorname{sh} t(c_1 \sin t - c_4 \cos t) + \operatorname{ch} t(c_1 \cos t + c_4 \sin t))}. \quad (9.30)$$

Для последнего коэффициента снова можно воспользоваться формулой (9.11). Более подробный анализ мы оставляем читателю.

10. ЗАМЕЧАНИЕ ПО ПОВОДУ НЕКОРРЕКТНОСТИ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

Описанный выше подход позволяет показать, что совместное решение как линейного (9.12), так и нелинейного (9.1) уравнений Шредингера с начальными условиями

$$\psi|_{t=0} = \delta_\varepsilon(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\varepsilon}} \exp\left(\frac{i(x-y)^2}{2\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad (10.1)$$

имеет вид

$$\psi = G_\varepsilon(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{i\mu_\varepsilon(t)}} e^{i(\alpha_\varepsilon(t)x^2 + \beta_\varepsilon(t)xy + \gamma_\varepsilon(t)y^2 + \kappa_\varepsilon(t))} \quad (10.2)$$

с характеристической функцией $\mu_\varepsilon(t) = 2\pi(\varepsilon\mu_1(t) + \mu_2(t))$. Коэффициенты квадратичной формы выражаются как

$$\alpha_\varepsilon(t) = \frac{\cos t(\varepsilon \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t) - \sin t(\varepsilon \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)}{2(\cos t(\varepsilon \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t) + \sin t(\varepsilon \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t))}, \quad (10.3)$$

$$\beta_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\cos t(\varepsilon \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t) + \sin t(\varepsilon \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)}, \quad (10.4)$$

$$\gamma_\varepsilon(t) = \frac{\cos t \operatorname{ch} t + \sin t \operatorname{sh} t}{2(\cos t(\varepsilon \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t) + \sin t(\varepsilon \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t))}. \quad (10.5)$$

Выберем $c_1 = 2\pi\varepsilon > 0$, $c_2 = 2\pi$ и $e^{i\varphi} = 1/\sqrt{i}$, а начальные данные в общем решении (9.6)–(9.8) возьмем в виде $\alpha(0) = \gamma(0) = -\beta(0)/2 = 1/2\varepsilon$. Случай $\varepsilon = 0$, $t > 0$ соответствует исходному пропагатору (1.5), а случай $\varepsilon > 0$, $t = 0$ дает дельта-последовательность (10.1).

Если $h = h_\varepsilon(t) = (\lambda/2\pi)\mu'_\varepsilon = 2\lambda \cos t(\varepsilon \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)$, то

$$\kappa_\varepsilon(t) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{(2\pi)^s} \frac{(\varepsilon\mu_1(t) + \mu_2(t))^{1-s} - \varepsilon^{1-s}}{1-s} & \text{при } 0 \leq s < 1, \\ -\frac{\lambda}{2\pi} \ln\left(\mu_1(t) + \frac{\mu_2(t)}{\varepsilon}\right) & \text{при } s = 1, \end{cases} \quad (10.6)$$

где $\kappa_\varepsilon(0) = 0$ при $\varepsilon > 0$.

В приведенном примере начальные данные $\psi|_{t=0} = G_\varepsilon(x, y, 0) = \delta_\varepsilon(x-y)$ сходятся к дельта-функции Дирака $\delta(x-y)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ в смысле обобщенных функций [31], [66]–[68]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} G_\varepsilon(x, y, 0) \varphi(y) dy = \varphi(x). \quad (10.7)$$

С другой стороны,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} G_\varepsilon(x, y, t) \varphi(y) dy = \exp(i \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \kappa_\varepsilon(t)) \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x, y, t) \varphi(y) dy, \quad (10.8)$$

где $t > 0$. При $s = 1$ решение $\psi = G_\varepsilon(x, y, t)$, $t > 0$, расходится вследствие расходимости логарифмического фазового множителя $\kappa_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ (см. также

работы [32], [39] по поводу некорректности некоторых канонических дисперсионных уравнений).

Второй случай, отвечающий (2.3), рассматривается аналогично. Можно выбрать $\mu_\varepsilon(t) = 2\pi(\mu_2(t) - \varepsilon\mu_3(t))$, и тогда мы получим

$$\alpha_\varepsilon(t) = \frac{\cos t(\operatorname{ch} t + \varepsilon \operatorname{sh} t) + \sin t(\operatorname{sh} t - \varepsilon \operatorname{ch} t)}{2(\cos t(\operatorname{sh} t + \varepsilon \operatorname{ch} t) + \sin t(\operatorname{ch} t - \varepsilon \operatorname{sh} t))}, \quad (10.9)$$

$$\beta_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\cos t(\operatorname{sh} t + \varepsilon \operatorname{ch} t) + \sin t(\operatorname{ch} t - \varepsilon \operatorname{sh} t)}, \quad (10.10)$$

$$\gamma_\varepsilon(t) = \frac{\cos t \operatorname{ch} t - \sin t \operatorname{sh} t}{2(\cos t(\operatorname{sh} t + \varepsilon \operatorname{ch} t) + \sin t(\operatorname{ch} t - \varepsilon \operatorname{sh} t))}. \quad (10.11)$$

Если $h_\varepsilon(t) = (\lambda/2\pi)\mu'_\varepsilon = 2\lambda \operatorname{ch} t(\cos t - \varepsilon \sin t)$, то

$$\kappa_\varepsilon(t) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{(2\pi)^s} \frac{(\mu_2(t) - \varepsilon\mu_3(t))^{1-s} - \varepsilon^{1-s}}{1-s} & \text{при } 0 \leq s < 1, \\ -\frac{\lambda}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu_2(t)}{\varepsilon} - \mu_3(t)\right) & \text{при } s = 1, \end{cases} \quad (10.12)$$

где $\kappa_\varepsilon(0) = 0$ при $\varepsilon > 0$. Формулы (10.2) и (10.9)–(10.12) описывают реальную (нелинейную) эволюцию начальных данных (10.1). Снова можно заметить разрывность этих начальных данных при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Теперь рассмотрим случаи (2.18) и (2.19). В случае (2.18) имеем характеристическую функцию $\mu_\varepsilon(t) = 2\pi(\mu_4(t) - \varepsilon\mu_3(t))$, коэффициенты

$$\alpha_\varepsilon(t) = \frac{\sin t(\operatorname{sh} t - \varepsilon \operatorname{ch} t) + \cos t(\operatorname{ch} t - \varepsilon \operatorname{sh} t)}{2(\sin t(\operatorname{ch} t - \varepsilon \operatorname{sh} t) - \cos t(\operatorname{sh} t - \varepsilon \operatorname{ch} t))}, \quad (10.13)$$

$$\beta_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\sin t(\operatorname{ch} t - \varepsilon \operatorname{sh} t) - \cos t(\operatorname{sh} t - \varepsilon \operatorname{ch} t)}, \quad (10.14)$$

$$\gamma_\varepsilon(t) = \frac{\cos t \operatorname{ch} t - \sin t \operatorname{sh} t}{2(\sin t(\operatorname{ch} t - \varepsilon \operatorname{sh} t) - \cos t(\operatorname{sh} t - \varepsilon \operatorname{ch} t))} \quad (10.15)$$

и $h_\varepsilon(t) = (\lambda/2\pi)\mu'_\varepsilon = 2\lambda \sin t(\operatorname{sh} t - \varepsilon \operatorname{ch} t)$,

$$\kappa_\varepsilon(t) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{(2\pi)^s} \frac{(\mu_4(t) - \varepsilon\mu_3(t))^{1-s} - \varepsilon^{1-s}}{1-s} & \text{при } 0 \leq s < 1, \\ -\frac{\lambda}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu_4(t)}{\varepsilon} - \mu_3(t)\right) & \text{при } s = 1, \end{cases} \quad (10.16)$$

где $\kappa_\varepsilon(0) = 0$ при $\varepsilon > 0$. В случае (2.19) $\mu_\varepsilon(t) = 2\pi(\mu_4(t) + \varepsilon\mu_1(t))$,

$$\alpha_\varepsilon(t) = \frac{\operatorname{sh} t(\sin t + \varepsilon \cos t) - \operatorname{ch} t(\cos t - \varepsilon \sin t)}{2(\operatorname{sh} t(\cos t - \varepsilon \sin t) - \operatorname{ch} t(\sin t + \varepsilon \cos t))}, \quad (10.17)$$

$$\beta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\operatorname{sh} t(\cos t - \varepsilon \sin t) - \operatorname{ch} t(\sin t + \varepsilon \cos t)}, \quad (10.18)$$

$$\gamma_\varepsilon(t) = -\frac{\cos t \operatorname{ch} t + \sin t \operatorname{sh} t}{2(\operatorname{sh} t(\cos t - \varepsilon \sin t) - \operatorname{ch} t(\sin t + \varepsilon \cos t))} \quad (10.19)$$

$$\text{и } h_\varepsilon(t) = (\lambda/2\pi)\mu'_\varepsilon = 2\lambda \operatorname{sh} t(\sin t + \varepsilon \cos t),$$

$$\kappa_\varepsilon(t) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{(2\pi)^s} \frac{(\mu_4(t) + \varepsilon\mu_1(t))^{1-s} - \varepsilon^{1-s}}{1-s} & \text{при } 0 \leq s < 1, \\ -\frac{\lambda}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu_4(t)}{\varepsilon} + \mu_1(t)\right) & \text{при } s = 1, \end{cases} \quad (10.20)$$

где $\kappa_\varepsilon(0) = 0$ при $\varepsilon > 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Преобразование квантовых гамильтонианов

Из определения (1.3) операторов рождения и уничтожения следуют операторные тождества

$$x^2 = \frac{1}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) - \frac{1}{2}(a^2 + (a^\dagger)^2), \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) - \frac{1}{2}(a^2 + (a^\dagger)^2), \quad (A.2)$$

$$2x \frac{\partial}{\partial x} + 1 = -a^2 + (a^\dagger)^2 \quad (A.3)$$

(и наоборот), что позволяет записать зависящее от времени уравнение Шредингера (2.1) в гамильтоновой форме (1.1), где гамильтониан записан в терминах операторов рождения и уничтожения:

$$H = \frac{1}{2}(a(t) + b(t))(aa^\dagger + a^\dagger a) + \frac{1}{2}(a(t) - b(t) + 2id(t))a^2 + \frac{1}{2}(a(t) - b(t) - 2id(t))(a^\dagger)^2, \quad (A.4)$$

причем $c = 2d$. Это помогает преобразовать рассматриваемые гамильтонианы модифицированных осцилляторов в различные эквивалентные гамильтонианы, используемые в настоящей работе.

В тригонометрических случаях (2.2) и (2.18) мы соответственно получаем гамильтонианы (1.2) и (7.18) при $n = 1$. В первом гиперболическом случае (2.3) имеем

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2t \cdot (aa^\dagger + a^\dagger a) + \frac{1}{2}(1 - i \operatorname{sh} 2t)a^2 + \frac{1}{2}(1 + i \operatorname{sh} 2t)(a^\dagger)^2, \quad (A.5)$$

где

$$1 \pm i \operatorname{sh} 2t = \operatorname{ch} 2t \cdot e^{\pm i \arctg 2\tau}, \quad \tau = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t, \quad (A.6)$$

откуда следует уравнение Шредингера (1.6), (1.7). Второй гиперболический случай (2.19) рассматривается аналогично.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Гамильтонова структура характеристических уравнений

Уравнения Гамильтона в классической механике [69]

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (\text{Б.1})$$

с квадратичным гамильтонианом общего вида

$$H = a(t)p^2 + b(t)q^2 + 2d(t)pq \quad (\text{Б.2})$$

имеют вид

$$\dot{q} = 2ap + 2dq, \quad \dot{p} = -2bq - 2dp, \quad (\text{Б.3})$$

где, как это принято, дифференцирование по времени обозначено точкой над каноническими переменными p и q . Исключение обобщенного импульса p из этой системы дает уравнение второго порядка на обобщенную координату:

$$\ddot{q} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{q} + 4 \left(ab - d^2 + \frac{d}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{d}}{d} \right) \right) q = 0. \quad (\text{Б.4})$$

Это уравнение совпадает с характеристическим уравнением (2.8), (2.9) при $c = 2d$. Если мы выберем коэффициенты в классическом гамильтониане (Б.2) в формах (2.2), (2.3) и (2.18), (2.19), то это будет соответствовать следующим моделям модифицированных классических осцилляторов:

$$\ddot{q} + 2 \operatorname{tg} t \cdot \dot{q} - 2q = 0, \quad (\text{Б.5})$$

$$\ddot{q} - 2 \operatorname{th} t \cdot \dot{q} + 2q = 0 \quad (\text{Б.6})$$

и

$$\ddot{q} - 2 \operatorname{ctg} t \cdot \dot{q} - 2q = 0, \quad (\text{Б.7})$$

$$\ddot{q} - 2 \operatorname{cth} t \cdot \dot{q} + 2q = 0. \quad (\text{Б.8})$$

Фундаментальные решения для этих моделей приведены в приложении В.

Стандартное квантование рассматриваемых классических интегрируемых систем, а именно

$$q \rightarrow x, \quad p \rightarrow i^{-1} \frac{\partial}{\partial x}, \quad [x, p] = xp - px = i, \quad (\text{Б.9})$$

и

$$H \rightarrow ap^2 + bx^2 + d(px + xp), \quad i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (\text{Б.10})$$

приводит к квантовым точно решаемым моделям модифицированных осцилляторов, рассматриваемым в настоящей работе.

Другим примером является осциллятор с трением и с переменными коэффициентами $a = (\omega_0/2)e^{-2\lambda t}$, $b = (\omega_0/2)e^{2\lambda t}$, $c = d = 0$ [56]. Классическое уравнение

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (\text{Б.11})$$

описывает затухающие колебания [69]. Соответствующий квантовый пропагатор имеет вид (2.4), где

$$\mu = \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t, \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 > 0, \quad (\text{B.12})$$

и

$$\alpha(t) = \frac{\omega \cos \omega t - \lambda \sin \omega t}{2\omega_0 \sin \omega t} e^{2\lambda t}, \quad (\text{B.13})$$

$$\beta(t) = -\frac{\omega}{\omega_0 \sin \omega t} e^{\lambda t}, \quad (\text{B.14})$$

$$\gamma(t) = \frac{\omega \cos \omega t + \lambda \sin \omega t}{2\omega_0 \sin \omega t}. \quad (\text{B.15})$$

Уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\omega_0}{2} \left(-e^{-2\lambda t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + e^{2\lambda t} x^2 \psi \right) \quad (\text{B.16})$$

описывает линейный осциллятор с переменной единицей длины $x \rightarrow x e^{\lambda t}$. Подробности см. в работе [56].

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Фундаментальные решения характеристических уравнений

Пусть

$$u_1 = \cos t, \quad u_2 = \sin t, \quad v_1 = \operatorname{ch} t, \quad v_2 = \operatorname{sh} t, \quad (\text{B.1})$$

так что $u'_1 = -u_2$, $u'_2 = u_1$, $v'_1 = v_2$, $v'_2 = v_1$. Исследуем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет следующий набор вронскианов тригонометрических и гиперболических функций:

$$\{W(u_\alpha, v_\beta)\}_{\alpha, \beta=1,2} = \{W(u_1, v_1), W(u_1, v_2), W(u_2, v_1), W(u_2, v_2)\}. \quad (\text{B.2})$$

Возьмем, например,

$$y = W(u_1, v_1) = u_1 v_2 + u_2 v_1. \quad (\text{B.3})$$

Тогда

$$y' = 2u_1 v_1, \quad y'' = 2u_1 v_2 - 2u_2 v_1, \quad (\text{B.4})$$

$$y'' - \tau y' + 4\sigma y = (4\sigma + 2)u_1 v_2 + (4\sigma - 2)u_2 v_1 - 2\tau u_1 v_1 = 0. \quad (\text{B.5})$$

Последнее уравнение выполнено, если $\sigma = 1/2$, $\tau = 2v_2/v_1$ или $\sigma = -1/2$, $\tau = -2u_2/u_1$. Все остальные вронскианы рассматриваются аналогично, результаты представлены в табл. 1.

В результате вычислений для рассматриваемых вронскианов получаются следующие тождества:

$$\begin{aligned} W''(u_1, v_1) &= -2W(u_2, v_2), & W''(u_1, v_2) &= -2W(u_2, v_1), \\ W''(u_2, v_1) &= 2W(u_1, v_2), & W''(u_2, v_2) &= 2W(u_1, v_1). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Таблица 1. Фундаментальные решения характеристических уравнений

Характеристическое уравнение $y'' - \tau y' + 4\sigma y = 0$	Набор фундаментальных решений $\{y_i, y_k\}_{i < k}$
$u'' + u = 0$ ($\sigma = 1/4, \tau = 0$)	$u_1 = \cos t, \quad u_2 = \sin t,$ $u'_1 = -u_2, \quad u'_2 = u_1$
$v'' - v = 0$ ($\sigma = -1/4, \tau = 0$)	$v_1 = \operatorname{ch} t, \quad v_2 = \operatorname{sh} t,$ $v'_1 = v_2, \quad v'_2 = v_1$
$y'' + 2 \operatorname{tg} t \cdot y' - 2y = 0$ ($\sigma = -1/2, \tau = -2u_2/u_1$)	$y_1 = W(u_1, v_1) = u_1 v_2 + u_2 v_1,$ $y_2 = W(u_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$
$y'' - 2 \operatorname{ctg} t \cdot y' - 2y = 0$ ($\sigma = -1/2, \tau = 2u_2/u_1$)	$y_3 = W(u_2, v_2) = u_2 v_1 - u_1 v_2,$ $y_4 = W(u_2, v_1) = u_2 v_2 - u_1 v_1$
$y'' - 2 \operatorname{th} t \cdot y' + 2y = 0$ ($\sigma = 1/2, \tau = 2v_2/v_1$)	$y_1 = W(u_1, v_1) = u_1 v_2 + u_2 v_1,$ $y_4 = W(u_2, v_1) = u_2 v_2 - u_1 v_1$
$y'' - 2 \operatorname{cth} t \cdot y' + 2y = 0$ ($\sigma = 1/2, \tau = 2v_1/v_2$)	$y_2 = W(u_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2,$ $y_3 = W(u_2, v_2) = u_2 v_1 - u_1 v_2$

Отсюда следует, что множество вронскианов (B.2) дает фундаментальные решения дифференциального уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами

$$W^{(4)} + 4W = 0. \quad (\text{B.7})$$

Соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^4 + 4 = 0$ имеет четыре корня $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i, \lambda_3 = -1 + i, \lambda_4 = -1 - i$, а множество фундаментальных решений задается как

$$\{u_\alpha v_\beta\}_{\alpha, \beta=1,2} = \{u_1 v_1, u_1 v_2, u_2 v_1, u_2 v_2\}. \quad (\text{B.8})$$

Эти решения бигармонического уравнения (B.7) являются четными или нечетными функциями времени. Они не удовлетворяют нашим характеристическим уравнениям второго порядка. Например, пусть $w_1 = u_1 v_2 = \cos t \operatorname{sh} t$ и $w_1 = u_2 v_1 = \sin t \operatorname{ch} t$. Тогда прямым вычислением получаем

$$\begin{aligned} L(w_1) &= w_1'' + 2 \operatorname{tg} t \cdot w_1' - 2w_1 = -2 \frac{\operatorname{sh} t}{\cos t}, \\ L(w_2) &= w_2'' + 2 \operatorname{tg} t \cdot w_2' - 2w_2 = 2 \frac{\operatorname{sh} t}{\cos t}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Таким образом эти решения уравнения (B.7) по отдельности удовлетворяют неоднородным характеристическим уравнениям. Однако если взять их вместе, то мы получим

$$L(y_1) = L(w_1 + w_2) = L(w_1) + L(w_2) = -2 \frac{\operatorname{sh} t}{\cos t} + 2 \frac{\operatorname{sh} t}{\cos t} = 0. \quad (\text{B.10})$$

Аналогичное свойство имеет место для всех остальных решений характеристических уравнений из табл. 1.

Таблица 2. Построение фундаментальных решений

Линейные операторы	$u_1 v_1$	$u_1 v_2$	$u_2 v_1$	$u_2 v_2$
$\frac{d}{dt}$	$u_1 v_2 - u_2 v_1$	$u_1 v_1 - u_2 v_2$	$u_1 v_1 + u_2 v_2$	$u_1 v_2 + u_2 v_1$
$\frac{d^2}{dt^2}$	$-2u_2 v_2$	$-2u_2 v_1$	$2u_1 v_2$	$2u_1 v_1$
L_1	$-2 \frac{v_1}{u_1}$	$-2 \frac{v_2}{u_1}$	$2 \frac{v_2}{u_1}$	$2 \frac{v_1}{u_1}$
L_2	$-2 \frac{v_2}{u_2}$	$-2 \frac{v_1}{u_2}$	$-2 \frac{v_1}{u_2}$	$-2 \frac{v_2}{u_2}$
L_3	$2 \frac{u_1}{v_1}$	$-2 \frac{u_2}{v_1}$	$2 \frac{u_2}{v_1}$	$2 \frac{u_1}{v_1}$
L_4	$2 \frac{u_2}{v_2}$	$-2 \frac{u_1}{v_2}$	$-2 \frac{u_1}{v_2}$	$-2 \frac{u_2}{v_2}$

Чтобы получить фундаментальные решения алгебраическим путем, положим

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \frac{d^2}{dt^2} + 2 \frac{u_2}{u_1} \frac{d}{dt} - 2, & L_2 &= \frac{d^2}{dt^2} - 2 \frac{u_1}{u_2} \frac{d}{dt} - 2, \\
 L_3 &= \frac{d^2}{dt^2} - 2 \frac{v_2}{v_1} \frac{d}{dt} + 2, & L_4 &= \frac{d^2}{dt^2} - 2 \frac{v_1}{v_2} \frac{d}{dt} + 2
 \end{aligned}
 \tag{B.11}$$

и вычислим действие этих линейных дифференциальных операторов второго порядка L_k на четырех базисных векторах $\{u_\alpha v_\beta\}_{\alpha,\beta=1,2}$, а именно $L_k(u_\alpha v_\beta)$, $k = 1, 2, 3, 4$, $\alpha, \beta = 1, 2$. Результаты представлены в табл. 2.

Поэтому

$$\begin{aligned}
 L_1(u_1 v_1 + u_2 v_2) &= L_1(u_1 v_2 + u_2 v_1) = L_2(u_2 v_2 - u_1 v_1) = \\
 &= L_2(u_2 v_1 - u_1 v_2) = L_3(u_1 v_2 + u_2 v_1) = L_3(u_2 v_2 - u_1 v_1) = \\
 &= L_4(u_1 v_1 + u_2 v_2) = L_4(u_2 v_1 - u_1 v_2) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{B.12}$$

что соответствует выражениям, приведенным в табл. 1.

Для всех характеристических уравнений, рассматриваемых в настоящей работе, выполнены некоторые свойства периодичности. Например, уравнения

$$y'' + 2 \operatorname{tg} t \cdot y' - 2y = 0 \tag{B.13}$$

и

$$y'' - 2 \operatorname{ctg} t \cdot y' - 2y = 0 \tag{B.14}$$

инвариантны относительно сдвигов $t \rightarrow t \pm \pi$ и переходят одно в другое при сдвиге $t \rightarrow t \pm \pi/2$. Поскольку только два решения линейного дифференциального уравнения второго порядка могут быть линейно независимыми, фундаментальные решения

уравнений (B.13) и (B.14) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{pmatrix} y_1(t \pm \pi) \\ y_2(t \pm \pi) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \pi & \pm \operatorname{sh} \pi \\ \pm \operatorname{sh} \pi & \operatorname{ch} \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

и

$$\begin{pmatrix} y_1(t \pm \pi/2) \\ y_2(t \pm \pi/2) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \operatorname{sh}(\pi/2) & \pm \operatorname{ch}(\pi/2) \\ \pm \operatorname{ch}(\pi/2) & \operatorname{sh}(\pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

соответственно. Два других характеристических уравнения имеют чисто мнимые периоды.

Благодарности. Авторы выражают благодарность профессору Карлосу Кастильо-Чавесу за поддержку и за то, что он обратил их внимание на работу [70]. Мы благодарим профессоров Алексея Махалова и Светлану Руденко за полезные замечания, а также профессора Александра Итса за то, что он обратил наше внимание на гамильтонову структуру характеристических уравнений (см. приложение Б).

Настоящая работа представляет собой часть программы по математическому анализу в Институте математической и теоретической биологии и Научном центре математического и компьютерного моделирования Университета Аризоны (летний семестр 2008 г.). Эта программа поддержана Национальным научным фондом (DMS-0502349), Национальным агентством безопасности (DOD-H982300710096), Фондом Слоана и Университетом Аризоны. Работа одного из авторов (Р. Кордеро-Сото) поддержана следующими программами Национального научного фонда: Louis Stokes Alliances for Minority Participation: NSF Cooperative Agreement № HRD-0602425 (WAESO LSAMP Phase IV), Alliances for Graduate Education and the Professoriate. NSF Cooperative Agreement № HRD-0450137 (MGE@MSA AGEP Phase II).

Список литературы

- [1] M. Meiler, R. Cordero-Soto, S.K. Suslov, *J. Math. Phys.*, **49**:7 (2008), 072102; [arXiv:0711.0559](#).
- [2] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Classics Math., Springer, Berlin, 1999.
- [3] R. P. Feynman, *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics*, Ph. D. Thesis, Princeton Univ., 1942; reprinted in: *Feynman's Thesis – A New Approach to Quantum Theory*, ed. L. M. Brown, World Sci., Hackensack, NJ, 2005, 1–69.
- [4] R. P. Feynman, *Rev. Modern Phys.*, **20**:2 (1948), 367–387; reprinted in: *Feynman's Thesis – A New Approach to Quantum Theory*, ed. L. M. Brown, World Sci., Hackensack, NJ, 2005, 71–112.
- [5] R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **76**:6 (1949), 749–759.
- [6] R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **76**:6 (1949), 769–789.
- [7] Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, М., 1968.
- [8] R. M. Lopez, S.K. Suslov, *The Cauchy problem for a forced harmonic oscillator*, [arXiv:0707.1902](#).
- [9] L. A. Beauregard, *Amer. J. Phys.*, **34**:4 (1966), 324–332.
- [10] K. Gottfried, T.-M. Yan, *Quantum Mechanics: Fundamentals*, Springer, New York, 2004.
- [11] B. R. Holstein, *Amer. J. Phys.*, **66**:7 (1998), 583–589.
- [12] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.

- [13] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, John Wiley and Sons, New York, 1961.
- [14] N. S. Thornber, E. F. Taylor, *Amer. J. Phys.*, **66**:11 (1998), 1022–1024.
- [15] G. P. Arrighini, N. L. Durante, *Amer. J. Phys.*, **64**:8 (1996), 1036–1041.
- [16] L. S. Brown, Y. Zhang, *Amer. J. Phys.*, **62**:9 (1994), 806–808.
- [17] B. R. Holstein, *Amer. J. Phys.*, **65**:5 (1997), 414–418.
- [18] P. Nardone, *Amer. J. Phys.*, **61**:3 (1993), 232–237.
- [19] R. W. Robinett, *Amer. J. Phys.*, **64**:6 (1996), 803–808.
- [20] R. Cordero-Soto, R. M. Lopez, E. Suazo, S. K. Suslov, *Lett. Math. Phys.*, **84**:2–3 (2008), 159–178.
- [21] N. Lanfear, S. K. Suslov, *The time-dependent Schrödinger equation, Riccati equation and Airy functions*, [arXiv: 0903.3608](#).
- [22] E. Suazo, S. K. Suslov, *An integral form of the nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients*, [arXiv: 0805.0633](#).
- [23] E. Suazo, S. K. Suslov, J. M. Vega-Guzman, *The Riccati differential equation and a diffusion-type equation*, [arXiv: 0807.4349](#).
- [24] J. R. Cannon, *The One-Dimensional Heat Equation*, Encyclopedia Math. Appl., **23**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.
- [25] R. Carles, *Semi-Classical Analysis for Nonlinear Schrödinger Equations*, World Sci., Hackensack, NJ, 2008.
- [26] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger Equations*, Courant Lect. Notes Math., **10**, AMS, Providence, RI, 2003.
- [27] T. Cazenave, A. Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **13**, Oxford Sci., Clarendon Press, Oxford–New York, 1998.
- [28] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [29] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазILINEЙНЫЕ уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.
- [30] I. V. Melnikova, A. Filinkov, *Abstract Cauchy problems: Three Approaches*, Chapman and Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math., **120**, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London–New York–Washington, 2001.
- [31] T. Tao, *Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., **106**, AMS, Providence, RI, 2006.
- [32] V. Banica, L. Vega, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **25**:4 (2008), 697–711; [arXiv: 0706.0819](#).
- [33] R. Carles, *Ann. Henri Poincaré*, **3**:4 (2002), 757–772.
- [34] R. Carles, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **20**:3 (2003), 501–542.
- [35] R. Carles, *SIAM J. Math. Anal.*, **35**:4 (2003), 823–843.
- [36] R. Carles, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **13**:2 (2005), 385–398; [arXiv: math/0405197](#).
- [37] R. Carles, L. Miller, *Osaka J. Math.*, **41**:3 (2004), 693–725.
- [38] R. Carles, Y. Nakamura, *Hokkaido Math. J.*, **33**:3 (2004), 719–729.
- [39] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Duke Math. J.*, **106**:3 (2001), 617–633.
- [40] V. Naibo, A. Stefanov, *Math. Ann.*, **334**:2 (2006), 325–338.
- [41] V. M. Pérez-García, P. J. Torres, G. D. Montesinos, *SIAM J. Appl. Math.*, **67**:4 (2007), 990–1015.
- [42] I. Rodnianski, W. Schlag, *Invent. Math.*, **155**:3 (2004), 451–513.
- [43] O. S. Rozanova, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**:8 (2005), 2347–2358.
- [44] W. Schlag, *Dispersive estimates for Schroedinger operators: a survey*, [arXiv: math/0501037](#).
- [45] G. Staffilani, D. Tataru, *Comm. Partial Differ. Equ.*, **27**:7–8 (2002), 1337–1372.
- [46] D. R. Haaheim, F. M. Stein, *Math. Mag.*, **42** (1969), 233–240.
- [47] А. М. Молчанов, *Докл. РАН*, **383**:2 (2002), 175–178.
- [48] E. D. Rainville, *Intermediate Differential Equations*, Macmillan Company, New York, 1964.

- [49] S. S. Rajah, S. D. Maharaj, *J. Math. Phys.*, **49**:1 (2008), 012501.
- [50] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1944.
- [51] W. Magnus, S. Winkler, *Hill's Equation*, Interscience Tracts Pure Appl. Math., **20**, John Wiley and Sons, New York–London–Sydney, 1966.
- [52] G. E. Andrews, R. A. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia Math. Appl., **71**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [53] А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров, *Специальные функции математической физики*, Наука, М., 1978.
- [54] E. D. Rainville, *Special Functions*, The Macmillan Company, New York, 1960.
- [55] S. K. Suslov, B. Trey, *J. Math. Phys.*, **49**:1 (2008), 012104.
- [56] R. Cordero-Soto, E. Suazo, S. K. Suslov, *J. Phys. Math.*, **1** (2009), S090603; [arXiv:0905.0507](#).
- [57] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1973.
- [58] J. D. Paliouras, D. S. Meadows, *Complex Variables for Scientists and Engineers*, Macmillan, New York, 1990.
- [59] У. Рудин, *Основы математического анализа*, Мир, М., 1976.
- [60] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1974.
- [61] Е. Вигнер, *Теория групп и ее приложения к квантомеханической теории атомных спектров*, ИЛ, М., 1961.
- [62] А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*, Наука, М., 1985.
- [63] Ю. Ф. Смирнов, К. В. Шитикова, *ЭЧАЯ*, **8** (1977), 847–910.
- [64] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1965.
- [65] V. Bargmann, *Ann. Math.*, **48**:3 (1947), 568–640.
- [66] L. Carleson, “Some analytic problems related to statistical mechanics”, *Euclidean Harmonic Analysis*, Lecture Notes in Math., **779**, ed. J. J. Benedetto, Springer, Berlin, 1980, 5–45.
- [67] P. Sjölin, *Duke Math. J.*, **55**:3 (1987), 699–715.
- [68] L. Vega, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **102**:4 (1988), 874–878.
- [69] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. I. Механика*, Физматлит, М., 1958.
- [70] L. M. A. Bettencourt, A. Cintrón-Arias, D. I. Kaiser, C. Castillo-Chávez, *Physica A*, **364** (2006), 513–536.

Поступила в редакцию 11.06.2009