Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Лобанов, В. Ю. Лоторейчик, И. Ю. Попов, Оценка снизу спектра двумерного оператора Шредингера с δ -потенциалом на кривой, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 3, 397–407

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:22:51

© 2010 г. И. С. Лобанов*, В. Ю. Лоторейчик*, И. Ю. Попов*

ОЦЕНКА СНИЗУ СПЕКТРА ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С δ -ПОТЕНЦИАЛОМ НА КРИВОЙ

Рассматривается двумерный оператор Шредингера с δ -потенциалом, имеющим кривую в качестве носителя. Для случаев бесконечных и конечных замкнутых гладких кривых получены оценки снизу для спектра исследуемого оператора, выраженные явно через силу взаимодействия и параметр, характеризующий их геометрию. Изучаются кусочно-гладкие кривые, для которых получена оценка спектра снизу в терминах параметров, характеризующих геометрию отдельных частей. Как приложение полученных результатов в качестве носителя δ -потенциала рассматриваются кривые с конечным числом каспов, а также исследуется случай общего “липкого” квантового графа.

Ключевые слова: оператор Шредингера, сингулярный потенциал, спектральные оценки, преобразование Бирмана–Швингера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим оператор

$$H_{\alpha,\Gamma} = -\Delta - \alpha\delta(\cdot - \Gamma), \quad \text{dom } H_{\alpha,\Gamma} \subset L^2(\mathbb{R}^2),$$

с притягивающим δ -потенциалом силы $\alpha > 0$, имеющим кривую Γ в качестве носителя. Оператор $H_{\alpha,\Gamma}$ является модельным гамильтонианом притягивающей квантовой проволоки. Подобные операторы изучались в течение последних двух десятилетий; подробный обзор последних результатов по теории таких операторов можно найти в работе [1]. Оператор $H_{\alpha,\Gamma}$ строго определен через квадратичную форму (см. работу [2])

$$q_{\alpha,\Gamma}[u] = \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \alpha\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2, \quad \text{dom } q_{\alpha,\Gamma} = W^{1,2}(\mathbb{R}^2).$$

Если Γ является прямой линией, то хорошо известно, что $H_{\alpha,\Gamma}$ не имеет собственных значений, и его спектр в предположении, что α – положительная константа,

* Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: lobanov.igor@gmail.com, vladimir.lotoreichik@gmail.com, popov@mail.ifmo.ru

имеет вид

$$\sigma(H_{\alpha,\Gamma}) = \sigma_{\text{ess}}(H_{\alpha,\Gamma}) = \left[-\frac{\alpha^2}{4}, +\infty\right). \quad (1.1)$$

В статье [3] показано, что при малой деформации кривой Γ с сохранением некоторой гладкости существенный спектр остается неизменным, но появляется по крайней мере одно собственное число ниже существенного спектра. Существенный спектр оператора Шредингера с δ -потенциалом на замкнутой кривой согласно с работой [2] имеет вид

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\alpha,\Gamma}) = [0, +\infty), \quad (1.2)$$

более того, существует по крайней мере одно отрицательное собственное число. В настоящей статье получены оценки спектра оператора $H_{\alpha,\Gamma}$ снизу как для случая бесконечной кривой, так и для случая конечной замкнутой кривой.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+$, Γ – непрерывная и кусочно- C^1 кривая в $\mathbb{R}^2$. Нам понадобится следующая геометрическая характеристика кривой Γ :

$$c(\Gamma) = \inf_{x,y \in \Gamma} \frac{\text{dist}_{\mathbb{R}^2}(x,y)}{\text{dist}_{\Gamma}(x,y)}, \quad (1.3)$$

где через $\text{dist}_{\mathbb{R}^2}$ обозначено расстояние между точками на плоскости, а через dist_{Γ} – расстояние между точками вдоль кривой. Отметим, что если $c(\Gamma) > 0$, то Γ не имеет каспов (заострений) и самопересечений, и в случае неограниченности Γ ее возможные асимптоты не параллельны друг другу.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ – замкнутая кривая конечной длины и $c(\Gamma) > 0$. Тогда

$$\inf \sigma(H_{\alpha,\Gamma}) \geq -\frac{\alpha^2}{4(c(\Gamma))^2}. \quad (1.4)$$

В частности, для окружности Γ_0 имеем $c(\Gamma_0) = 2/\pi$ из простых геометрических соображений, и тогда

$$\inf \sigma(H_{\alpha,\Gamma_0}) \geq -\frac{\alpha^2 \pi^2}{16}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть Γ – бесконечная кривая и $c(\Gamma) > 0$. Тогда:

1) в самом общем случае справедлива следующая оценка дискретного спектра:

$$\inf \sigma_d(H_{\alpha,\Gamma}) \geq -\frac{\alpha^2}{4(c(\Gamma))^2}; \quad (1.5)$$

2) если Γ удовлетворяет сформулированному ниже условию (2.9), которое, в частности, требует существования асимптот, то

$$\inf \sigma(H_{\alpha,\Gamma}) \geq -\frac{\alpha^2}{4(c(\Gamma))^2}. \quad (1.6)$$

Оценка (1.6) является точной в том случае, если Γ – прямая линия. Для двух лучей, формирующих угол Γ_β величиной β , из простых геометрических соображений $c(\Gamma_\beta) = \sin(\beta/2)$, и тем самым при $\beta \rightarrow 0$ оценка $\inf \sigma(H_{\alpha,\Gamma_\beta}) \geq -\alpha^2/(4 \sin^2(\beta/2))$

становится, как мы увидим далее, очень грубой. Однако оценки (1.4) и (1.6) могут быть уточнены, если Γ является композицией (склежкой) кривых с положительными параметрами s , определенными формулой (1.3). Под композицией кривых Γ_i мы понимаем кривую Γ , которая может быть разделена конечным числом точек на ней на части Γ_i . При этом мы допускаем, что характеристика $c(\Gamma)$ может быть равна нулю; этот случай не описывается результатами работы [2].

ТЕОРЕМА 3. Пусть кривая Γ является композицией кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$, $N < \infty$, таким образом, что каждая Γ_i имеет характеристику $c(\Gamma_i) > 0$. Тогда квадратичная форма $q_{\alpha, \Gamma}$ является полуограниченной снизу и замкнутой, и ей соответствует самосопряженный оператор $H_{\alpha, \Gamma}$. Если, более того, каждая Γ_i обладает непрерывным кусочно- C^1 расширением $\Gamma_i^{\text{ext}} \supset \Gamma_i$ с параметром $c(\Gamma_i^{\text{ext}}) > 0$, причем Γ_i^{ext} является замкнутой конечной или неограниченной кривой, удовлетворяющей условию (2.9), то справедлива следующая оценка:

$$\inf \sigma(H_{\alpha, \Gamma}) \geq -N \sum_{i=1}^N \frac{\alpha^2}{4(c(\Gamma_i^{\text{ext}}))^2}. \quad (1.7)$$

Следовательно, для уже упомянутого угла Γ_β мы получаем

$$\inf \sigma(H_{\alpha, \Gamma_\beta}) \geq -\alpha^2.$$

Действительно, достаточно разбить Γ_β на два луча, а затем каждый луч расширить до прямой и воспользоваться теоремой 3.

Результат теоремы 3 может быть применен к кривым с конечным количеством каспов. Удается доказать самосопряженность оператора $H_{\alpha, \Gamma}$ и для этого случая, что позволяет расширить класс кривых, на которых можно рассматривать δ -потенциал, по сравнению с классом, описанным в работе [2].

Далее мы приведем необходимые теоретические сведения, затем последовательно докажем теоремы, сформулированные во введении. В последнем разделе статьи теорема 3 применяется к кривым с каспами и обобщается на случай произвольных “липких” квантовых графов.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе приведены необходимые факты об операторах Шредингера с δ -потенциалом на кривой. Доказательства утверждений этого раздела можно найти в работах [2], [3]. Рассмотрим меру Дирака m_Γ , сопоставленную кривой Γ и определенную следующим образом:

$$m_\Gamma(M) = l_1(M \cap \Gamma) \quad (2.1)$$

для каждого борелевского множества $M \subset \mathbb{R}^2$, где l_1 – одномерная мера Хаусдорфа; в нашем случае l_1 – длина той части кривой Γ , которая находится внутри M . Для $\alpha > 0$ и $c(\Gamma) > 0$ в соответствии с работой [2] известно, что соотношение

$$(1 + \alpha) \int_{\mathbb{R}^2} |\psi(x)|^2 dm_\Gamma(x) \leq a \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \psi(x)|^2 dx + b \int_{\mathbb{R}^2} |\psi(x)|^2 dx \quad (2.2)$$

выполняется для всех $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ и некоторых $a < 1$ и b . Через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ обозначен класс Шварца быстроубывающих функций в $\mathbb{R}^2$. Отображение $I_\Gamma: \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \mapsto L^2(\Gamma)$, определенное как $I_\Gamma\psi = \psi$, может быть единственным образом расширено до непрерывного отображения

$$I_\Gamma: W^{1,2}(\mathbb{R}^2) \mapsto L^2(\Gamma) := L^2(\mathbb{R}^2, m_\Gamma). \quad (2.3)$$

Мы используем один и тот же символ ψ для обозначения функции из $W^{1,2}(\Gamma)$ и ее следа на кривой Γ . Соотношение (2.2) может быть расширено на $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ заменой в левой части ψ на $I_\Gamma\psi$.

Оператор, который мы рассматриваем, задается квадратичной формой

$$q_{\alpha,\Gamma}[\psi] := \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\psi(x)|^2 dx - \alpha \int_{\mathbb{R}^2} |I_\Gamma\psi(x)|^2 dm_\Gamma(x) \quad (2.4)$$

с областью определения $\text{dom } q_{\alpha,\Gamma} = W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. В соответствии с работой [2] при условии (2.2) эта форма с ядром $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ замкнута и ограничена, откуда вытекает, что ей соответствует единственный самосопряженный оператор. Обозначим его через $H_{\alpha,\Gamma}$.

К оператору $H_{\alpha,\Gamma}$, соответствующему квадратичной форме (2.4), можно применить технику Бирмана–Швингера и получить формулу для резольвенты. Обозначим через R_0^k резольвенту оператора Шредингера без потенциала в $L^2(\mathbb{R}^2)$, где $\text{Im } k > 0$ и $(-\Delta - k^2)^{-1} = R_0^k$. Резольвента R_0^k является оператором с интегральным ядром

$$G_k(x - y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|). \quad (2.5)$$

Пусть μ и ν – произвольные положительные радоновы меры в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие условию $\mu(x) = \nu(x) = 0$ для любой точки $x \in \mathbb{R}^2$. Через $R_{\nu,\mu}^k$ обозначим интегральный оператор из $L^2(\mu) := L^2(\mathbb{R}^2, \mu)$ в $L^2(\nu)$ с интегральным ядром G_k , т.е.

$$R_{\nu,\mu}^k \phi = G_k * \phi \mu \quad (2.6)$$

выполняется почти всюду относительно меры ν для всех $\phi \in \text{dom } R_{\nu,\mu}^k \subset L^2(\mu)$. В нашем случае меры две – это m_Γ , введенная ранее, и лебегова мера dx в $\mathbb{R}^2$. В этих обозначениях в соответствии с работой [2] можно сформулировать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ. 1. *Существует $\kappa_0 > 0$ такое, что оператор $I - \alpha R_{m_\Gamma, m_\Gamma}^{i\kappa}$ на $L^2(\Gamma)$ имеет ограниченный обратный для всех $\kappa > \kappa_0$.*

2. *Пусть $\text{Im } k > 0$. Предположим, что $I - \alpha R_{m_\Gamma, m_\Gamma}^k$ обратим и оператор*

$$R^k := R_0^k + \alpha R_{dx, m_\Gamma}^k [I - \alpha R_{m_\Gamma, m_\Gamma}^k]^{-1} R_{m_\Gamma, dx}^k \quad (2.7)$$

из $L^2(\mathbb{R}^2)$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ всюду определен. Тогда $k^2 \in \rho(H_{\alpha,\Gamma})$ и $(H_{\alpha,\Gamma} - k^2)^{-1} = R^k$.

3. *$\dim \ker(H_{\alpha,\Gamma} - k^2) = \dim \ker(I - \alpha R_{m_\Gamma, m_\Gamma}^k)$ для всех k таких, что $\text{Im } k > 0$.*

Далее напомним несколько известных результатов о спектре $H_{\alpha,\Gamma}$ в случае замкнутой конечной и бесконечной кривых. Предположим, что кривая Γ определена непрерывным кусочно- C^1 отображением $\gamma = (\gamma_x, \gamma_y)$ либо из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$ в случае бесконечной кривой, либо из $[0, L]$ в $\mathbb{R}^2$ с $\gamma(L) = \gamma(0)$ в случае замкнутой конечной кривой длины L . Мы предполагаем, что кривая задана в натуральной параметризации, т.е. $|\dot{\gamma}(s)| = 1$.

Так как γ непрерывна и имеет натуральную параметризацию, очевидно, что выполняется следующее неравенство:

$$|\gamma(s) - \gamma(s')| \leq |s - s'| \quad (2.8)$$

для всех $s, s' \in \text{dom } \gamma$. Далее мы вводим ограничения на кривую, предложенные в работе [3].

I. Константа $c(\Gamma)$ строго положительна. В частности, для бесконечной кривой выполняется условие

$$|\gamma(s) - \gamma(s')| \geq c(\Gamma)|s - s'|,$$

а для конечной замкнутой кривой справедливо соотношение

$$|\gamma(s) - \gamma(s')| \geq c(\Gamma) \min\{|s - s'|, L - |s - s'|\}.$$

II. Это ограничение имеет смысл только для бесконечных кривых. Мы требуем, чтобы Γ была асимптотически прямой в следующем смысле: существуют положительные константы $d, \mu > 1/2$ и $\omega \in (0, 1)$ такие, что неравенство

$$1 - \frac{|\gamma(s) - \gamma(s')|}{|s - s'|} \leq d[1 + |s + s'|^{2\mu}]^{-1/2} \quad (2.9)$$

выполняется в секторе $S_\omega = \{(s, s') : \omega \leq s/s' \leq \omega^{-1}\}$.

Теперь мы можем сформулировать некоторые результаты статей [2] и [3], которые были неформально даны во введении.

ТЕОРЕМА 4. Пусть Γ – непрерывная кусочно- C^1 кривая и выполняется условие I, тогда:

1) если Γ – замкнутая конечная кривая, то

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\alpha,\Gamma}) = [0, +\infty) \quad (2.10)$$

и существует по крайней мере одно отрицательное собственное значение;

2) если Γ – неограниченная кривая и выполняется условие II, то

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\alpha,\Gamma}) = \left[-\frac{\alpha^2}{4}, +\infty\right), \quad (2.11)$$

более того, если Γ не является прямой, то существует по крайней мере одно собственное число ниже существенного спектра.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Введем в пространстве $L^2[0, L]$ интегральный оператор $\mathcal{R}_{\alpha, \Gamma}^{\kappa} := \alpha R_{m_{\Gamma}, m_{\Gamma}}^{i\kappa}$, где $R_{\nu, \mu}^{\kappa}$ определено формулой (2.6). В соответствии с утверждением (п. 3) отрицательное число $\lambda = -\kappa^2$ является собственным числом для оператора $H_{\alpha, \Gamma}$, если и только если интегральное уравнение

$$\mathcal{R}_{\alpha, \Gamma}^{\kappa} \psi = \psi \quad (3.1)$$

имеет нетривиальное решение. Интегральное ядро $\mathcal{R}_{\alpha, \Gamma}^{\kappa}$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{R}_{\alpha, \Gamma}^{\kappa}(s, s') = \frac{\alpha}{2\pi} K_0(\kappa|\gamma(s) - \gamma(s')|), \quad s, s' \in [0, L], \quad (3.2)$$

где K_0 – функция Макдональда. Напомним, что $K_0(z) = (\pi i/2) H_0^{(1)}(iz)$ (см. книгу [4]). Условие $\|\mathcal{R}_{\alpha, \Gamma}^{\kappa}\| < 1$ является достаточным, для того чтобы уравнение (3.1) имело только тривиальные решения.

Из свойства I и монотонного убывания функции Макдональда следует, что

$$0 \leq K_0(\kappa|\gamma(s) - \gamma(s')|) \leq K_0(\kappa c(\Gamma) \operatorname{dist}_{\Gamma}(\gamma(s), \gamma(s'))). \quad (3.3)$$

Введем оператор $\mathcal{R}_c^{\kappa}$ в $L^2(0, L)$ с интегральным ядром

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_c^{\kappa}(s, s') &= \frac{\alpha}{2\pi} K_0(\kappa c(\Gamma) \operatorname{dist}_{\Gamma}(\gamma(s), \gamma(s'))) = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} K_0(\kappa c(\Gamma) \min\{|s - s'|, L - |s - s'|\}). \end{aligned}$$

В силу (3.3)

$$\|\mathcal{R}_{\alpha, \Gamma}^{\kappa}\| \leq \|\mathcal{R}_c^{\kappa}\|. \quad (3.4)$$

Так как ядро интегрального оператора $\mathcal{R}_c^{\kappa}$ положительно, мы можем применить лемму Шура (см. теорему 5.2 в книге [5]), для того чтобы оценить норму сверху:

$$\|\mathcal{R}_c^{\kappa}\| \leq \sqrt{\sup_{s \in [0, L]} \int_0^L \mathcal{R}_c^{\kappa}(s, s') ds' \cdot \sup_{s' \in [0, L]} \int_0^L \mathcal{R}_c^{\kappa}(s, s') ds}. \quad (3.5)$$

Так как оператор $\mathcal{R}_c^{\kappa}$ имеет разностное ядро, то оба супремума равны. Пусть $s < L/2$, тогда

$$\begin{aligned} \int_0^L \mathcal{R}_c^{\kappa}(s, s') ds' &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^L K_0(\kappa c(\Gamma) \min\{|s - s'|, L - |s - s'|\}) ds' = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_{s-L}^s K_0(\kappa c(\Gamma) \min\{|t|, L - |t|\}) dt = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \left(\int_{s-L}^{-L/2} K_0(\kappa c(\Gamma)(L - |t|)) dt + \int_{-L/2}^s K_0(\kappa c(\Gamma)|t|) dt \right) = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \left(\int_s^{L/2} K_0(\kappa c(\Gamma)t) dt + \int_{-L/2}^s K_0(\kappa c(\Gamma)|t|) dt \right) = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} K_0(\kappa c(\Gamma)|t|) dt < \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(\kappa c(\Gamma)|t|) dt = \frac{\alpha}{2c(\Gamma)\kappa}. \end{aligned}$$

Та же оценка справедлива при $s > L/2$. Отсюда следует, что $\|\mathcal{R}_{\alpha,\Gamma}^\kappa\| < \alpha/(2c(\Gamma)\kappa)$, и если $\kappa > \alpha/(2c(\Gamma))$, то правая часть в оценке меньше единицы. Тем самым, если $\lambda < -\alpha^2/(4(c(\Gamma))^2)$, то λ не может быть собственным числом. В силу п. 1 теоремы 4 получаем

$$\inf \sigma(H_{\alpha,\Gamma}) \geq -\frac{\alpha^2}{4(c(\Gamma))^2}.$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

В духе доказательства предыдущей теоремы мы вводим в $L^2(\mathbb{R})$ интегральный оператор $\mathcal{R}_{\alpha,\Gamma}^\kappa := \alpha R_{m_\Gamma, m_\Gamma}^{i\kappa}$, где $R_{\nu,\mu}^\kappa$ определено формулой (2.6). В соответствии с утверждением (п. 3) отрицательное число $\lambda = -\kappa^2$ является собственным числом оператора $H_{\alpha,\Gamma}$, если и только если интегральное уравнение

$$\mathcal{R}_{\alpha,\Gamma}^\kappa \psi = \psi \quad (4.1)$$

имеет нетривиальное решение. Интегральное ядро оператора $\mathcal{R}_{\alpha,\Gamma}^\kappa$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{R}_{\alpha,\Gamma}^\kappa(s, s') = \frac{\alpha}{2\pi} K_0(\kappa|\gamma(s) - \gamma(s')|), \quad s, s' \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Условие $\|\mathcal{R}_{\alpha,\Gamma}^\kappa\| < 1$ является достаточным, для того чтобы уравнение (3.1) имело только тривиальные решения.

Из свойства I и монотонного убывания функции Макдональда следует, что

$$0 \leq K_0(\kappa|\gamma(s) - \gamma(s')|) \leq K_0(\kappa c(\Gamma)|s - s'|). \quad (4.3)$$

Мы вводим оператор $\mathcal{R}_c^\kappa$ с интегральным ядром $\mathcal{R}_c^\kappa(s, s') = (\alpha/(2\pi))K_0(\kappa c(\Gamma)|s - s'|)$. В соответствии с формулой (4.3)

$$\|\mathcal{R}_{\alpha,\Gamma}^\kappa\| \leq \|\mathcal{R}_c^\kappa\|. \quad (4.4)$$

В случае неограниченной кривой можно сделать более точную оценку. Мы вычислим норму $\mathcal{R}_c^\kappa$ точно. Пусть $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$ – преобразование Фурье на вещественной прямой (см. книгу [6]), определенное формулой

$$\hat{f}(p) = (\mathcal{F}f)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{-i\xi p} d\xi,$$

с обратным преобразованием

$$\check{f}(p) = (\mathcal{F}^{-1}f)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{i\xi p} d\xi.$$

Далее мы рассматриваем оператор $\widehat{\mathcal{R}}_c^\kappa := \mathcal{F}\mathcal{R}_c^\kappa\mathcal{F}^{-1}$ (импульсное представление). Норма вновь введенного оператора совпадает с нормой $\mathcal{R}_c^\kappa$ в силу унитарности преобразования Фурье. Более того,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mathcal{R}_c^\kappa\mathcal{F}^{-1}f &= \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{F}(K_0(\kappa c|\xi|) * (\mathcal{F}^{-1}f)) = \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(K_0(\kappa c(\Gamma)|\xi|)) \cdot \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f) = \frac{\alpha}{2\sqrt{(c(\Gamma))^2\kappa^2 + p^2}} f. \end{aligned}$$

При вычислениях мы применили формулу $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}$ и явный вид преобразования Фурье функции Макдональда (см. книгу [6]). Оператор $\widehat{\mathcal{R}}_c^\kappa$ определен следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{R}}_c^\kappa: L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R}), \quad \widehat{\mathcal{R}}_c^\kappa f = \frac{\alpha}{2\sqrt{(c(\Gamma))^2 \kappa^2 + p^2}} f(p), \quad (4.5)$$

тогда

$$\|\widehat{\mathcal{R}}_c^\kappa\| = \sup_{p \in \mathbb{R}} \frac{\alpha}{2\sqrt{(c(\Gamma))^2 \kappa^2 + p^2}} = \frac{\alpha}{2c(\Gamma)\kappa}.$$

Эта норма меньше единицы, если $\kappa > \alpha/(2c(\Gamma))$. Отсюда следует, что если $\lambda < -\alpha^2/(4c(\Gamma)^2)$, то это число не может быть собственным для $H_{\alpha,\Gamma}$, и п. 1 теоремы 2 доказан. Чтобы доказать п. 2, мы используем п. 2 теоремы 4 и получаем

$$\inf \sigma(H_{\alpha,\Gamma}) \geq -\frac{\alpha^2}{4(c(\Gamma))^2}.$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Прежде всего покажем самосопряженность оператора $H_{\alpha,\Gamma}$. Для каждой части Γ_i исходной кривой Γ известно, что $c(\Gamma_i) > 0$. Следовательно, можно записать неравенство вида (2.2):

$$N(1 + \alpha)\|u\|_{L^2(\Gamma_i)}^2 \leq a_i \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + b_i \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \quad (5.1)$$

где $0 < a_i < 1$ и $b_i > 0$. Здесь мы пользовались тем, что неравенство (2.2) справедливо для любого $\alpha \in \mathbb{R}$. Складывая эти неравенства для всех частей Γ_i и деля их затем на N , получаем

$$(1 + \alpha)\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^N a_i}{N} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{\sum_{i=1}^N b_i}{N} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Так как $0 < \sum_{i=1}^N a_i/N < 1$, то согласно работе [2] форма $q_{\alpha,\Gamma}$ с $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ в качестве области определения ограничена снизу и замкнута. Форме $q_{\alpha,\Gamma}$ соответствует единственный самосопряженный оператор $H_{\alpha,\Gamma}$.

Далее докажем оценку (1.7). Рассмотрим квадратичные формы для каждой части Γ_i исходной кривой Γ :

$$q_{\alpha N, \Gamma_i}[u] = \|\nabla u\|^2 - \alpha N \|u\|_{L^2(\Gamma_i)}^2, \quad \text{dom } q_{\alpha N, \Gamma_i} = W^{1,2}(\mathbb{R}^2). \quad (5.2)$$

Рассмотрим квадратичные формы для каждого расширения Γ_i^{ext} :

$$q_{\alpha N, \Gamma_i^{\text{ext}}}[u] = \|\nabla u\|^2 - \alpha N \|u\|_{L^2(\Gamma_i^{\text{ext}})}^2, \quad \text{dom } q_{\alpha N, \Gamma_i^{\text{ext}}} = W^{1,2}(\mathbb{R}^2).$$

Так как $\Gamma_i^{\text{ext}} \supset \Gamma_i$, то

$$q_{\alpha N, \Gamma_i}[u] \geq q_{\alpha N, \Gamma_i^{\text{ext}}}[u]$$

для каждого $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. Квадратичная форма оператора Шредингера с δ -потенциалом силы α , имеющим всю кривую Γ в качестве носителя, может быть выражена следующим образом:

$$q_{\alpha,\Gamma}[u] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_{\alpha N, \Gamma_i}[u] \geq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_{\alpha N, \Gamma_i^{\text{ext}}}[u]. \quad (5.3)$$

Нижняя граница формы $q_{\alpha N, \Gamma_i^{\text{ext}}}$ совпадает с $\inf \sigma(H_{\alpha N, \Gamma_i^{\text{ext}}})$. Если Γ_i^{ext} – замкнутая конечная кривая, мы применяем теорему 1, если она бесконечна, то применяем п. 2 теоремы 2. Так как $\inf \sigma(H_{\alpha,\Gamma}) = \inf_{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2)} q_{\alpha,\Gamma}[u]$, то

$$\inf \sigma(H_{\alpha,\Gamma}) \geq -N \sum_{i=1}^N \frac{\alpha^2}{4(c(\Gamma_i^{\text{ext}}))^2}. \quad (5.4)$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оценка спектра снизу грубее реального низа спектра примерно в N раз, где N – количество частей, на которые мы разрезаем исходную кривую. Действительно, если разрезать прямую Γ на $N - 2$ отрезка и две полупрямые и затем расширить их до прямых, то согласно теореме 3 получим, что

$$\inf \sigma(H_{\alpha,\Gamma}) \geq -\frac{\alpha^2 N}{4}.$$

Интерес представляет применение теоремы 3 к патологическим случаям, где другие методы доказательства самосопряженности и оценки спектра снизу применить непросто, в частности к случаям, когда $c(\Gamma) = 0$ и теоремы 1 и 2 неприменимы.

6. ПРИЛОЖЕНИЯ И ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

6.1. Приложение к кривым с каспами. Прежде всего дадим определение каспа (см. монографию [7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для кривой, определенной как геометрическое место точек, на которых функция двух переменных $F(x, y) \in C^\infty$ зануляется, точка (x_0, y_0) называется каспом (или каспидальной точкой), если:

- 1) $F(x_0, y_0) = 0$;
- 2) $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$;
- 3) гессиан имеет в этой точке нулевой определитель, т.е.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix} (x_0, y_0) = 0.$$

Примерами каспов на рациональных кривых являются спинода на кривой $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, рамфоида на $\gamma(t) = (t^2, t^5)$, а также касп на кривой $\gamma(t) = \gamma_{m,n}(t) := (t^{2n}, t^{2m+1})$, где $m \geq n$. Все эти кривые имеют касп в начале координат, что может

быть легко проверено построением подходящих функций $F(x, y)$, которые удовлетворяют условиям определения. Покажем, что в случае спиноды $c(\Gamma) = 0$:

$$\begin{aligned} c(\Gamma) &\leq \lim_{t_0 \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{(t_0^2 - t_0^2)^2 + (t_0^3 + t_0^3)^2}}{\int_{-t_0}^{t_0} \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt} = \lim_{t_0 \rightarrow 0+} \frac{2t_0^3}{(16/27)((1 + (9/4)t_0^2)^{3/2} - 1)} = \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow 0+} \frac{2t_0^3}{2t_0^2 + o(t_0^2)} = 0. \end{aligned}$$

Это вычисление показывает, что при рассмотрении кривых с каспами теоремы 1 и 2 неприменимы (они не дают никакой информации о спектре).

Рассмотрим конечную замкнутую кривую Γ без самопересечений длиной L . Мы полагаем, что Γ определена отображением $\gamma(t)$, а также имеет конечное число каспов в точках $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq L$. Дополним эту последовательность точками $t_0 = 0$ и $t_{N+1} = L$. Разрежем кривую Γ на части $\Gamma_i = \gamma([t_i, t_{i+1}])$, $i = 0, \dots, N$. Если каждая часть такова, что $c(\Gamma_i) > 0$, то можно применить теорему 3 для доказательства самосопряженности $H_{\alpha, \Gamma}$, и если существуют расширения $\Gamma_i^{\text{ext}} \supset \Gamma_i$ такие, что $c(\Gamma_i^{\text{ext}}) > 0$, то мы можем получить оценку снизу для спектра. Аналогичные рассуждения можно провести для бесконечной кривой.

6.2. Обобщение на произвольные “липкие” квантовые графы. Результат теоремы 3 может быть обобщен на произвольные “липкие” квантовые графы. Напомним, что модельный гамильтониан “липкого” квантового графа определен как самосопряженный оператор $H_{\alpha, \Gamma}$, соответствующий квадратичной форме $q_{\alpha, \Gamma}$ (см. уравнение (2.4)), где Γ – метрический граф (объединение сегментов, пересекающихся только в точках сочленения концов). Мы предполагаем, что граф конечен, т.е. состоит из конечного числа сегментов, и все бесконечные части являются асимптотически прямыми. Тогда теорема 3 может быть переформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 5. Пусть каждый сегмент Γ_i метрического графа Γ таков, что $c(\Gamma_i) > 0$. Тогда квадратичная форма $q_{\alpha, \Gamma}$ ограничена снизу и замкнута. Ей соответствует единственный самосопряженный оператор $H_{\alpha, \Gamma}$. Если можно построить непрерывные и кусочно- C^1 расширения $\Gamma_i^{\text{ext}} \supset \Gamma_i$, где каждое Γ_i^{ext} является либо бесконечной кривой, удовлетворяющей неравенству (2.9), либо замкнутой конечной кривой, причем $c(\Gamma_i^{\text{ext}}) > 0$, то справедлива следующая оценка:

$$\inf \sigma(H_{\alpha, \Gamma}) \geq -N \sum_{i=1}^N \frac{\alpha^2}{4(c(\Gamma_i^{\text{ext}}))^2}, \quad (6.1)$$

где N – количество ребер графа.

Благодарности. Работа поддержана грантом 2.1.1/4215 программы “Развитие потенциала высшей школы России 2009–2010”. В. Ю. Лоторейчик поддержан персональным грантом 2.1/30-04/035 Правительства Санкт-Петербурга.

Список литературы

- [1] P. Exner, “Leaky quantum graphs: a review”, *Analysis on Graphs and its Applications*, Proc. Symposia Pure Math. Ser., **77**, eds. P. Exner, J. P. Keating, P. Kuchment, T. Sunada, A. Teplyaev, AMS, Providence, RI, 2008, 523–564.
- [2] J. F. Brasche, P. Exner, Yu. A. Kuperin, P. Seba, *J. Math. Anal. Appl.*, **184**:1 (1994), 112–139.
- [3] P. Exner, T. Ichinose, *J. Phys. A*, **34**:7 (2001), 1439–1450.
- [4] М. Абрамовиц, И. Стегун (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.
- [5] П. Халмош, В. Сандер, *Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2* , Наука, М., 1985.
- [6] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1974.
- [7] I. Porteous, *Geometric Differentiation – for the Intelligence of Curves and Surfaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

Поступила в редакцию 1.08.2009