Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Баласубраманья, Переменная действия и частота релятивистского гармонического осциллятора, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 3, 408–415

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:26:37

© 2010 г.

М. К. Баласубраманья*

ПЕРЕМЕННАЯ ДЕЙСТВИЯ И ЧАСТОТА РЕЛЯТИВИСТСКОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Приводятся три представления частоты релятивистского гармонического осциллятора в виде ряда. В первых двух представлениях используются два эквивалентных вида переменной действия. Третье представление включает в себя определение периода прямым интегрированием. Во всех трех представлениях явно видна зависимость частоты данного осциллятора от энергии. Показано, что все три представления приводят к одному и тому же выражению для частоты в случае слабoreлятивистского осциллятора и имеют один и тот же нерелятивистский предел.

Ключевые слова: теория Гамильтона–Якоби, переменная действия, относительность, простой гармонический осциллятор.

1. ВВЕДЕНИЕ

Классические периодические системы допускают элегантный анализ в терминах переменных действие–угол, которые составляют набор канонически сопряженных импульсов и координат. Переменные действия пропорциональны $\oint p_j dq_j$, где q_j и p_j – координаты и канонические импульсы системы. Для консервативных систем они являются константами движения подобно моменту импульса и энергии. Частоты периодических систем можно найти, используя функциональное соотношение между переменными действия и полной механической энергией, не требуя при этом решения динамических уравнений. Сначала мы приводим краткий обзор этого формализма и описываем значимость переменных действия. В разделе 2 данный формализм применяется к релятивистскому гармоническому осциллятору; получена его частота в двух эквивалентных представлениях в виде ряда и показано, что она имеет правильный нерелятивистский предел. Путем прямого интегрирования выведено также выражение для периода этого осциллятора, которое сравнивается с выражением, полученным с использованием переменных действия в слабoreлятивистском режиме.

*Department of Physical and Environmental Sciences, Texas A&M University-Corpus Christi, Corpus Christi, U.S.A. E-mail: Mirley.Balasubramanya@tamucc.edu

Частоту одномерной классической периодической системы с гамильтонианом $H = p^2/(2m) + V(x)$ можно получить, не решая уравнение эволюции, а используя каноническое преобразование координаты x и импульса p в переменные угла w и действия J . Гамильтонова характеристическая функция $W_c(x, J)$ порождает преобразование

$$p = \frac{\partial W_c(x, J)}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial W_c(x, J)}{\partial J}.$$

Индекс c призван подчеркнуть классическую, а не квантовую природу рассматриваемой задачи. Функция W_c удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_c(x, J)}{\partial x} \right)^2 + V(x) = E(J), \quad (1)$$

где полная энергия E есть постоянное значение константы движения H . Преобразованный импульс J_c равен

$$J_c = \frac{1}{2\pi} \oint p_c(x, E) dx, \quad (2)$$

где $p_c(x, E) = \sqrt{2m[E - V(x)]}$, а интеграл в фазовом пространстве берется по одному циклу периодического движения. Поскольку $J_c = J_c(E)$, это соотношение можно обратить, т.е. нахождения $E = E(J_c)$. Из гамильтоновых уравнений движения эволюция новой координаты определяется как $w(t) = \omega t + w_0$, где постоянная “скорость” равна

$$\omega = \frac{\partial H(J_c)}{\partial J_c} = \frac{\partial E(J_c)}{\partial J_c}. \quad (3)$$

Можно показать, что ω является круговой частотой этой периодической системы, связанной с периодом τ равенством $\omega = 2\pi/\tau$ [1].

Таким образом, математическая задача нахождения частоты классического периодического движения для консервативной системы сводится к задаче о взятии интеграла (2), решения получившегося уравнения относительно E , т.е. нахождения $E(J_c)$, и вычисления $\partial E/\partial J_c$. Это дает простой и изящный метод вычисления частоты системы, для которой установлен ее периодический характер. Данный метод изобретен Делоне в ходе его исследований периодических движений Луны [2]. Мы находим частоту классического релятивистского гармонического осциллятора путем вычисления переменной действия с использованием двух различных подходящим образом определенных контурных интегралов. В современной нерелятивистской квантовой механике для определения собственных значений энергии связанной квантовой системы имеется формализм, в котором используется квантовый вариант переменной действия, также вычисляемый с помощью контурных интегралов. Этот формализм привлекал к себе определенное внимание в течение последних двух десятилетий [3]–[5].

Эквивалентное определение величины J_c состоит в том, что она представляет собой контурный интеграл,

$$J_c = \frac{1}{2\pi} \oint_C p_c(x, E) dx, \quad (4)$$

в плоскости комплексной переменной x по контуру C (который будет указан чуть ниже), где $p_c(x, E)$ – комплекснозначная функция аргумента x , определяемая подходящей ветвью функции

$$p_c(x, E) = \sqrt{2m[E - V(x)]}. \quad (5)$$

Точки поворота x_1 и x_2 , которые обе являются вещественными, определяются из условий $p_c(x_1, E) = p_c(x_2, E) = 0$. Они являются также точками ветвления функции $p_c(x, E)$ в плоскости комплексных x . Мы проводим разрез от x_1 до x_2 вдоль вещественной оси. Функция $p_c(x, E)$ выбирается как ветвь квадратного корня, положительная на нижнем крае разреза. Идущий против часовой стрелки контур C охватывает две точки поворота x_1 и x_2 и соединяет их разрез. Интеграл (4) берется путем расширения C до другого контура γ , лежащего вне C , а затем разложения $p_c(x, E)$ в ряд Лорана в кольце, содержащем γ , и использования продолженной интегральной формулы Коши.

Альтернативная конструкция переменной действия имеет вид

$$-\frac{1}{2\pi} \oint_{C'} x_c(p, E) dp,$$

где идущий по часовой стрелке контур C' в комплексной плоскости переменной p охватывает два импульса поворота p_1 и p_2 , а также разрез, проведенный между ними по вещественной оси. Такой вид переменной действия при определении частоты периодических систем подходит не для всех систем, но хорошо работает для релятивистского осциллятора.

2. ПЕРЕМЕННАЯ ДЕЙСТВИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Гамильтониан релятивистского гармонического осциллятора имеет вид

$$H(x, p_{\text{cr}}) = \sqrt{p_{\text{cr}}^2 c^2 + m^2 c^4} + \frac{1}{2} k x^2.$$

Индекс r указывает, что канонический импульс является релятивистским. Полную механическую энергию релятивистского осциллятора будет обозначать через E , тогда $\tilde{E} = E - mc^2$ – его механическая энергия, превышающая энергию покоя. Мы используем связанный с энергией безразмерный параметр $\epsilon = \tilde{E}/mc^2$. В нерелятивистском случае, который характеризуется условием $\epsilon \ll 1$, можно показать, что переменная действия равна $J_c = \tilde{E}/\omega_0$, где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – круговая частота.

Сначала исследуем переменную действия в виде $\oint p dx$. Релятивистское уравнение для орбиты, получаемое из $H(x, p_{\text{cr}}) = \tilde{E} + mc^2$, имеет вид

$$p_{\text{cr}} = \sqrt{2m \left[\tilde{E} - \frac{1}{2} k x^2 \right] \left[1 + \frac{\tilde{E} - k x^2 / 2}{2mc^2} \right]}. \quad (6)$$

В комплексной x -плоскости имеются четыре точки ветвления x_{jr} , $j = 1, 2, 3, 4$, в которых $p_{\text{cr}}(x, \tilde{E})$ обращается в нуль. Две из них являются физическими точками

поворота x_{1r} и x_{2r} ,

$$-x_{1r} = x_{2r} = \sqrt{\frac{2\tilde{E}}{k}}. \quad (7)$$

Их положение в комплексной x -плоскости аналогичны положению точек поворота в нерелятивистском случае. Две другие точки ветвления функции $p_{cr}(x, \tilde{E})$ расположены на вещественной оси,

$$-x_{3r} = x_{4r} = \sqrt{\frac{2\tilde{E}}{k}} \sqrt{1 + \frac{2}{\epsilon}}. \quad (8)$$

Их вид указывает, что в отличие от x_{1r} и x_{2r} эти две точки ветвления имеют полностью релятивистский характер. Ясно, что $x_{2r} < x_{4r}$ для всех энергий. Для функции $p_{cr}(x, \tilde{E})$ мы проводим разрез между x_{1r} и x_{2r} вдоль вещественной оси. Два других разреза соединяют x_{3r} и x_{4r} с $x = \infty$ вдоль вещественной оси. Ветвь функции $p_{cr}(x, \tilde{E})$, которую мы выбираем при комплексных значениях x , положительна непосредственно снизу от разреза между x_{1r} и x_{2r} .

Используя уравнение (6), перепишем p_{cr} в виде

$$p_{cr}(x, \tilde{E}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j x^{3-2j} = i\sqrt{mk}x \left[1 - \left(\frac{x_{2r}}{x} \right)^2 \right]^{1/2} (1 + \epsilon)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{x}{x_{4r}} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Множитель $(1 + \epsilon)^{1/2} [1 - (x/x_{4r})^2]^{1/2}$, который почти точно равен единице при низких энергиях и при $|x| \ll |x_{4r}|$, превращает нерелятивистский импульс $p_c(x, E)$ в релятивистский импульс $p_{cr}(x, \tilde{E})$.

Переменная действия $J_{cr}(E)$ определяется следующим образом:

$$J_{cr} = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_r} p_{cr}(x, E) dx, \quad (10)$$

где контур C_r окружает разрез между x_{1r} и x_{2r} против часовой стрелки. Разлагая p_{cr} в ряд Лорана в кольце $x_{2r} < |x| < x_{4r}$, получаем

$$p_{cr}(x, E) = i\sqrt{mk} \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{2}} x \left[1 - \frac{x_{2r}^2}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{x_{2r}}{x_{4r}} \right)^2 - \frac{1}{64} \left(\frac{x_{2r}}{x_{4r}} \right)^4 - \dots \right\} \frac{1}{x^2} \right] +$$

+ члены порядков, отличных от x^{-1} . (11)

Коэффициент при x^{-1} в этом ряде, необходимый для вычисления J_{cr} с использованием продолженной интегральной формулы Коши, является рядом по степеням $(x_{2r}/x_{4r})^2 = \epsilon/(2 + \epsilon) < 1$ (и имеет значение, много меньшее единицы, при низких энергиях). Деформируем контур C_r в идущий против часовой стрелки внешний круговой контур γ_r с центром в начале координат и с радиусом, меньшим чем x_{4r} , а затем вычислим интеграл в (10), что дает

$$J_{cr} = \frac{\tilde{E}}{\omega_0} \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{2}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon}{2 + \epsilon} \right) - \frac{1}{64} \left(\frac{\epsilon}{2 + \epsilon} \right)^2 - \dots \right]. \quad (12)$$

При низких энергиях с точностью до членов порядка ϵ имеем

$$J_{\text{cr}} \approx \frac{\tilde{E}}{\omega_0} \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right) \left(1 - \frac{\epsilon}{16}\right) \approx \frac{\tilde{E}}{\omega_0} \left(1 + \frac{3}{16} \epsilon\right).$$

Наконец, определим релятивистскую круговую частоту из соотношения

$$\frac{1}{\omega_r} = \frac{dJ_{\text{cr}}}{d\tilde{E}} = \frac{1}{mc^2} \frac{dJ_{\text{cr}}}{d\epsilon} = \frac{1}{\omega_0} \eta(\epsilon), \quad (13)$$

где зависящий от энергии релятивистский множитель $\eta(\epsilon)$ равен

$$\eta(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon} \left[\epsilon \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{2}} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon}{2 + \epsilon} \right) - \frac{1}{64} \left(\frac{\epsilon}{2 + \epsilon} \right)^2 - \dots \right\} \right]. \quad (14)$$

Заметим, что $\eta(\epsilon)$ почти точно равен единице при низких энергиях. Из выражения для ω_r^{-1} , которое верно при всех энергиях, видно, что вследствие замедления времени для наблюдателя в лабораторной системе частота убывает по сравнению с нерелятивистским случаем. Из этого выражения также видна явная зависимость частоты от энергии осциллятора, а тем самым и от его амплитуды. С точностью до членов порядка ϵ эта зависимость сводится к $\omega_r^{-1} \approx \omega_0^{-1} (1 + 3\epsilon/8)$.

Рассмотрим далее переменную действия в виде $-\oint x dp$. Продолжая выражение (6) в плоскость комплексных p , запишем координату следующим образом:

$$x_{\text{cr}} = -\sqrt{\frac{2}{k}} \sqrt{E - \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}. \quad (15)$$

Видим, что имеются два импульса поворота $p_{j\text{r}}$, $j = 1, 2$, определяемые из уравнения $E - \sqrt{p_{j\text{r}}^2 c^2 + m^2 c^4} = 0$, т.е.

$$-p_{1\text{r}} = p_{2\text{r}} = \sqrt{2m\tilde{E} \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)}. \quad (16)$$

Эти импульсы поворота содержат релятивистский множитель $\sqrt{1 + \epsilon/2}$. Они являются также точками ветвления функции $x_{\text{cr}}(p, \tilde{E})$, и мы выбираем один из разрезов от $p_{1\text{r}}$ до $p_{2\text{r}}$. Присутствие слагаемого $\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ в (15) дает две дополнительные точки ветвления функции $x_{\text{cr}}(p, \tilde{E})$, имеющие релятивистское происхождение и задаваемые равенствами $-p_{3\text{r}} = p_{4\text{r}} = imc$. Мы выбираем второй набор разрезов вдоль мнимой оси от точек $p_{3\text{r}}$ и $p_{4\text{r}}$ до $p = \infty$. Далее выбираем ветвь функции $x_{\text{cr}}(p, \tilde{E})$, положительную непосредственно выше разреза между $p_{1\text{r}}$ и $p_{2\text{r}}$.

Координату (15) можно переписать, используя импульсы поворота, в виде, пригодном для разложения Лорана:

$$x_{\text{cr}}(p, \tilde{E}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A'_j p^{3-2j} = \frac{-i}{[mk(1 + \epsilon/2)]^{1/2}} p \sqrt{1 - \left(\frac{p_{2\text{r}}}{p}\right)^2} f(p^2, \epsilon), \quad (17)$$

где

$$f(p^2, \epsilon) = \frac{\sqrt{(1 + \epsilon) - \{1 - (p/p_{4\text{r}})^2\}^{1/2}}}{\sqrt{-\epsilon(p/p_{2\text{r}})^2 \{1 - (p/p_{2\text{r}})^2\}}}. \quad (18)$$

Функция $f(p^2, \epsilon)$ аналитична при $|p^2| < |p_{4r}^2|$, равна 1 при $p^2 = 0$, таким образом, ее ряд Лорана состоит только из неотрицательных степеней p^2 . Заметим, что в этом виде, если не считать мультипликативных констант, $x_{cr}(p, \tilde{E})$ является всего лишь произведением p и двух разновидностей биномиальных рядов, по степеням p_{2r}/p и по степеням p/p_{4r} , которые сходятся равномерно в кольце $p_{2r} < p < p_{4r}$. Разлагая квадратные корни в (17), получаем

$$x_{cr} = -\sqrt{\frac{-2\tilde{E}}{k}} \frac{p}{p_{2r}} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{p_{2r}}{p} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{p_{2r}}{p} \right)^4 - \frac{1}{16} \left(\frac{p_{2r}}{p} \right)^6 - \dots \right] \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\epsilon) p^{2j} \right], \quad (19)$$

где $f_j(\epsilon)$, которые обратно пропорциональны p_{4r}^{2j} , являются коэффициентами разложения в ряде Лорана для $f(p^2, \epsilon)$. Коэффициент при $1/p$, который необходим для вычисления переменной действия, дается степенным рядом по параметру $(p_{2r}/p_{4r})^2 = 2\epsilon(1 + \epsilon/2)$; этот параметр при низких энергиях имеет порядок ϵ .

Альтернативное определение $J_{cr}(\tilde{E})$ имеет вид

$$J_{cr} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{C'_r} x_{cr}(p, \tilde{E}) dp, \quad (20)$$

где идущий по часовой стрелке контур C'_r охватывает разрез между p_{1r} и p_{2r} . Мы расширяем этот контур в идущий по часовой стрелке внешний круговой контур γ'_r с центром в начале координат и с радиусом, меньшим чем p_{4r} . Вычисляя интеграл (20) по γ'_r с использованием (17), получаем

$$J_{cr}(\tilde{E}) = \frac{\tilde{E}}{\omega_0} \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{2}} \left[1 - \frac{1}{16} \epsilon + \frac{7}{256} \epsilon^2 + \frac{1}{128} \epsilon^3 + \dots \right]. \quad (21)$$

Это выражение для релятивистской переменной действия является еще одним представлением в виде ряда по сравнению с (12) и сводится к нерелятивистскому импульсу J_c при $\epsilon \ll 1$. Круговая частота ω_r задается равенством

$$\frac{1}{\omega_r} = \frac{dJ_{cr}}{d\tilde{E}} = \frac{1}{mc^2} \frac{dJ_{cr}}{d\epsilon} = \frac{1}{\omega_0} \frac{d}{d\epsilon} \left[\epsilon \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{2}} \left\{ 1 - \frac{1}{16} \epsilon + \frac{7}{256} \epsilon^2 + \frac{1}{128} \epsilon^3 + \dots \right\} \right]. \quad (22)$$

Обрывая этот ряд на первом порядке по ϵ при низких энергиях, мы воспроизводим предыдущий результат $\omega_r^{-1} \approx \omega_0^{-1}(1 + 3\epsilon/8)$.

3. РАСЧЕТ ПЕРИОДА РЕЛЯТИВИСТСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРЯМЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ

В данном разделе мы вычислим период релятивистского осциллятора путем прямого интегрирования. Период τ при всех энергиях можно получить, взяв интеграл $\oint dx/\dot{x}$ по одному циклу движения. Для потенциальной энергии $V(x)$, имеющей вид симметричной ямы и являющейся четной функцией, период равен

$$\tau = \frac{4}{c} \int_0^{x_{2r}} \frac{[E - V(x)] dx}{\sqrt{[E - V(x)]^2 - m^2 c^4}}. \quad (23)$$

Точка x_{2r} является правой релятивистской точкой поворота, определяемой из условия $E - mc^2 - V(x_{2r}) = 0$. Для гармонического осциллятора при $V(x) = kx^2/2$ период получается путем взятия интеграла:

$$\tau = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{2}{k}} \left[\sqrt{\tilde{E} + 2mc^2} \left(1 - \frac{1}{4} \kappa^2 - \frac{3}{64} \kappa^4 - \dots \right) - \frac{mc^2}{\sqrt{\tilde{E} + 2mc^2}} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \kappa^2 \right) \right], \quad \kappa = \sqrt{\frac{\tilde{E}}{\tilde{E} + 2mc^2}}, \quad (24)$$

где гипергеометрический ряд ${}_2F_1$ есть

$${}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} z^2 + \dots$$

Обращая период, получаем третью формулу для осцилляторной частоты.

В слабoreлятивистском случае, когда $\tilde{E} \ll mc^2$, мы удерживаем члены вплоть до порядка κ^2 , что дает

$$\tau \approx 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \left[2 \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{4} \kappa^2 \right) - \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right)^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{4} \kappa^2 \right) \right]. \quad (25)$$

Далее,

$$\kappa^2 \approx \frac{\epsilon}{2} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right), \quad \tau \approx 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \left[1 + \frac{3}{8} \epsilon \right] \Rightarrow \frac{1}{\omega} \approx \frac{1}{\omega_0} \left[1 - \frac{3}{8} \epsilon \right]. \quad (26)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что при нахождении частоты релятивистского гармонического осциллятора полезно определять переменную действия с помощью контурного интеграла. Для разделяющихся систем формализм легко обобщить на периодические системы в размерностях два и три. Нерелятивистская частота естественно возникает в случае $\epsilon \ll 1$. Мы установили явную эквивалентность трех рядов для круговой частоты в слабoreлятивистском случае. Аналогично можно получить представление частоты в виде ряда для любой релятивистской периодической системы. Другие гамильтоновы модели периодических систем рассматриваются аналогично. Центральная задача дальнейшего анализа переменной действия состоит в определении точек ветвления изменяющейся со временем величины (например, $p(x, E)$ или $x(p, E)$), заданной в виде функции своей сопряженной переменной и других постоянных движения. В каждом из двух рассмотренных нами вариантов релятивистского осциллятора имеются четыре такие точки ветвления, причем параметр разложения для частоты представляет собой отношение “близкой” и “далекой” точек ветвления. Случай общей периодической системы в размерности единица характеризуется тем, что частота зависит от нескольких таких отношений, величина которых меньше 1, причем каждое отношение зависит от энергии системы. Прямое интегрирование приводит к выражению периода в виде ряда по параметру, который пропорционален ϵ . Все три представления ясно показывают понижение частоты релятивистского осциллятора вследствие замедления времени.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. I. Механика*, Физматлит, М., 1958.
- [2] C. E. Delaunay, *Sur une nouvelle théorie analytique du mouvement de la lune*, Academy Sci., Paris, 1846.
- [3] R. A. Leacock, M. J. Padgett, *Phys. Rev. D*, **28**:10 (1983), 2491–2502.
- [4] A. Nanayakkara, *J. Phys. A*, **23**:11 (1990), 2055–2065.
- [5] R. S. Bhalla, A. K. Kapoor, P. K. Panigrahi, *Amer. J. Phys.*, **65**:12 (1997), 1187–1194.

Поступила в редакцию 24.03.2009