Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. К. Ребане, Границы энергии системы гравитирующих бозонов, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 3, 416–421

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6479>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:40:55

© 2010 г.

Т. К. Ребане*

ГРАНИЦЫ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ ГРАВИТИРУЮЩИХ БОЗОНОВ

Методом, свободным от расчетов волновых функций, вычислена нижняя граница энергии системы взаимно гравитирующих бозонов с любым числом частиц n . Метод основан на использовании геометрических свойств треугольников, образуемых частицами. Найдены пределы коэффициента C в асимптотике нерелятивистской энергии основного состояния гравитационной системы.

Ключевые слова: квантовая механика, границы энергии, бозоны, гравитация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантово-механические системы одинаковых бозонов, между которыми действуют силы притяжения, представляют интерес в связи с фундаментальными проблемами устойчивости материи [1]–[3] и астрофизики [4]–[6], а также с моделированием взаимодействия бозе-эйнштейновских конденсатов [7].

К настоящему времени выполнены расчеты многобозонной гравитационной и родственной ей системы со взаимодействием Юкавы по методу самосогласованного поля [5], [6], а также многопараметрические вариационные расчеты трех- и четырехбозонных гравитационных систем [7], [8]. Эти результаты представляют собой верхние границы нерелятивистской энергии.

В настоящей работе определяется нижняя граница энергии гравитационной системы n одинаковых бозонов. Используется разработанный автором метод, основанный на сочетании модельного уравнения Шредингера с элементарными геометрическими неравенствами, который не требует никаких расчетов волновых функций исследуемых систем.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Оператор энергии нерелятивистской n -бозонной гравитационной системы имеет вид

$$H = -\hbar^2 \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_j}{2m} - Gm^2 \sum_{j < k}^n \frac{1}{r_{jk}}; \quad (1)$$

* Научно-исследовательский институт физики им. В. А. Фока Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: trebane@mail.ru

его низшее собственное значение и соответствующая собственная функция определяются уравнением

$$H\Psi = E\Psi. \quad (2)$$

Составим волновую функцию, экспоненциально зависящую от всех расстояний между частицами:

$$\Phi = \exp\left(-Gm^3 \sum_{j < k}^n \frac{r_{jk}}{2\hbar}\right). \quad (3)$$

Эта функция не имеет узлов и удовлетворяет следующему уравнению Шредингера:

$$\left[-\hbar^2 \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_j}{2m} - Gm^2 \sum_{j < k}^n \frac{1}{r_{jk}} + G^2 m^5 \sum_{j \neq k, k < l}^n \frac{\cos \theta_{jkl}}{4\hbar^2}\right] \Phi = E_{\text{mod}} \Phi. \quad (4)$$

Она является собственной функцией основного состояния модельной системы, описываемой оператором энергии вида

$$H_{\text{mod}} = -\hbar^2 \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_j}{2m} - Gm^2 \sum_{j < k}^n \frac{1}{r_{jk}} + G^2 m^5 \sum_{j \neq k, k < l}^n \frac{\cos \theta_{jkl}}{4\hbar^2}. \quad (5)$$

Через θ_{jkl} обозначен угол с вершиной у частицы j , стороны которого связывают ее с частицами k и l ; $\cos \theta_{jkl} = (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l - \mathbf{r}_j) / (r_{jk} r_{jl})$. Энергия основного состояния модельной системы равна

$$E_{\text{mod}} = -n(n-1) \frac{G^2 m^5 / \hbar^2}{8\hbar^2}. \quad (6)$$

Операторы энергии реальной и модельной систем связаны равенством

$$H = H_{\text{mod}} - W, \quad (7)$$

где оператор W определяется “мгновенным” расположением частиц:

$$W = \sum_{j \neq k, k < l} \cos \theta_{jkl} \frac{G^2 m^5}{4\hbar^2}. \quad (8)$$

Из уравнений (2) и (7) и вариационного принципа для энергии основного состояния модельной системы H_{mod} следует цепочка соотношений

$$E = \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle \Psi | H_{\text{mod}} - W | \Psi \rangle \geq E_{\text{mod}} - \langle \Psi | W | \Psi \rangle, \quad (9)$$

определяющая нижнюю границу энергии гравитационной системы:

$$E \geq -[n(n-1) + 2\langle \Psi | S_n | \Psi \rangle] \frac{G^2 m^5}{8\hbar^2}, \quad (10)$$

где S_n – сумма “мгновенных” значений косинусов углов θ_{jkl} :

$$S_n = \sum_{j \neq k, k < l}^n \cos \theta_{jkl}. \quad (11)$$

Так как $|\cos \theta_{jkl}| \leq 1$, то эта сумма имеет конечное значение при всех возможных вариантах расположения частиц. Ее квантово-механическое среднее значение не превосходит ее максимума относительно расположений n точек в трехмерном пространстве:

$$\langle \Psi | S_n | \Psi \rangle \leq \max S_n. \quad (12)$$

3. ГРАНИЦЫ ЭНЕРГИИ

Из формулы (10) для нижней границы энергии получим

$$E \geq - \frac{[n(n-1) + 2 \max S_n] G^2 m^5}{8\hbar^2}. \quad (13)$$

Достойно внимания то, что с помощью этого неравенства оценка энергии квантово-механической системы сводится к геометрической задаче – отысканию максимума суммы косинусов углов, образуемых частицами.

Неравенство (13) остается в силе, если заменить величину $\max S_n$ ее оценкой сверху. Из неравенства $|\cos \theta_{jkl}| \leq 1$ получим грубую оценку $\max S_n \leq n(n-1)(n-2)/2$. Ее можно улучшить, представив сумму S_n как сумму вкладов $n(n-1)(n-2)/6$ треугольников, образуемых n частицами. Сумма косинусов внутренних углов треугольника лежит в пределах от 1 до $3/2$ (первый предел соответствует вырождению треугольника в отрезок прямой, второй – равностороннему треугольнику). Отсюда следует оценка

$$\max S_n \leq \frac{n(n-1)(n-2)}{4}, \quad (14)$$

и из формулы (13) получим для энергии простую нижнюю границу:

$$E \geq - \frac{n^2(n-1)G^2m^5}{16\hbar^2}. \quad (15)$$

Неравенство (14) для $\max S_n$ переходит в равенство только тогда, когда возможна конфигурация n точек, в которой все образуемые ими треугольники равносторонние. Это возможно при $n = 3$ или $n = 4$. При $n \geq 5$ таких конфигураций не существует. В этом случае для повышения точности нижней границы энергии требуются непосредственные расчеты максимума суммы S_n .

На рис. 1 представлены рассчитанные при различных n максимальные средние значения косинусов углов

$$\max(\cos \theta)_n = \frac{2 \max S_n}{n(n-1)(n-2)}. \quad (16)$$

Нижняя граница энергии (13) определяется величиной $\max(\cos \theta)_n$:

$$E \geq -n(n-1)(n-2) \frac{[\max(\cos \theta)_n + 1/(n-2)] G^2 m^5}{8\hbar^2}. \quad (17)$$

С ростом числа частиц n величина $\max(\cos \theta)_n$ убывает от значения $1/2$ до предельного значения $4/9$ (при $n \rightarrow \infty$). Последнее соответствует равномерному распределению частиц по поверхности сферы. Одновременно с этим происходит повышение (т.е. уточнение) нижней границы энергии (17) по сравнению с простой границей (15).

Рис. 1. Максимальное среднее значение косинусов углов, образуемых n частицами. Сплошная линия – численная оптимизация геометрической конфигурации частиц, звездочки – случаи расположения частиц в вершинах правильных многогранников. Штриховая линия – асимптота $\max\langle\cos\theta\rangle_n = 4/9$ при $n \rightarrow \infty$.

На рис. 2 сопоставляются три границы энергии: простая нижняя граница (15) (линия 1), уточненная нижняя граница (17) (линия 2) с асимптотой (линия 3) и верхняя граница, рассчитанная по методу самосогласованного поля (линия 4) [5] при отделении движения центра масс:

$$E(n) \leq -\frac{0.05426n^2(n-1)G^2m^5}{\hbar^2}. \quad (18)$$

Эти границы имеют при больших n асимптотику $E \sim -Cn^3G^2m^5/\hbar^2$, где соответственно $C = -0.0625, -0.05555$ и -0.05426 . Первое из них было найдено также в работе [9] способом редукции многочастичной задачи к двухчастичной. Таким образом, неизвестное точное значение коэффициента лежит в пределах $-0.05555 \leq C \leq -0.05426$. Расстояние между уточненной нижней границей (17) и самосогласованной верхней границей (18) убывает с ростом числа частиц в пределе до 2.5%.

Точные значения нерелятивистской энергии при всех n заключены между этими границами.

Теорема вириала связывает среднее значение обратных междучастичных расстояний с энергией системы:

$$-\frac{n(n-1)Gm^2\langle 1/r \rangle}{2} = 2E(n) = -\frac{2Cn^2(n-1)G^2m^5}{\hbar^2}. \quad (19)$$

Рис. 2. Границы приведенной энергии гравитационной системы n бозонов. Звездочками отмечены результаты вариационных расчетов при $n = 3$ [7] и $n = 4$ [8].

Для среднего расстояния между частицами получим оценку

$$\langle r \rangle \sim \frac{1}{\langle 1/r \rangle} = \frac{\hbar^2}{4CGm^3n}, \quad (20)$$

а плотность частиц пропорциональна n^3 .

При больших n это приводит к гравитационному коллапсу, для описания которого необходим учет релятивистских эффектов. Поэтому физические выводы из полученных здесь результатов относятся к разреженным системам частиц, плотность которых далека от гравитационного коллапса.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный здесь “геометрический” подход позволяет заключить энергии нерелятивистских гравитационных систем в узкие границы, но существенным является ограниченность “возмущения” W , т.е. отклонения модельного гамильтониана от реального. Благодаря корректному поведению модельной волновой функции Φ при малых междучастичных расстояниях, он свободен от сингулярностей типа $1/r_{jk}$. Оператор W остается ограниченным и для кулоновских систем при использовании модельной волновой функции

$$\Phi = \exp \left[- \sum_{j < k}^n \frac{q_j q_k m_j m_k r_{jk}}{(m_j + m_k) \hbar} \right],$$

где q_j и m_j – заряды и массы частиц. Это позволяет применять изложенный здесь подход также и к кулоновским системам, в которых сочетаются силы притяжения и отталкивания.

Список литературы

- [1] F. J. Dyson, A. Lenard, *J. Math. Phys.*, **8**:3 (1967), 423–434.
- [2] E. H. Lieb, *Rev. Modern Phys.*, **48**:4 (1976), 553–569.
- [3] E. H. Lieb, *The Stability of Matter: From Atoms to Stars*, Selecta of Elliott H. Lieb, ed. W. E. Thirring, Springer, Berlin, 2001.
- [4] R. Ruffini, S. Bonazzola, *Phys. Rev.*, **187**:5 (1969), 1767–1783.
- [5] M. Membrado, A. F. Pacheco, J. Sañudo, *Phys. Rev. A*, **39**:8 (1989), 4207–4211.
- [6] R. L. Hall, *Phys. Rev. A*, **45**:11 (1992), 7682–7687.
- [7] S. Kar, Y. K. Ho, *Phys. Lett. A*, **370**:3–4 (2007), 306–309.
- [8] Т. К. Ребане, О. Н. Юсупов, *ЖЭТФ*, **102**:6 (1992), 1762–1767.
- [9] H. R. Post, *Proc. Phys. Soc.*, **79** (1962), 819–820.

Поступила в редакцию 6.07.2009