Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Свинин, Редукции цепочек Вольтерра и Тоды, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 3, 419–425

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf648>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:52:13

© 2000 г.

А. К. Свинин*

РЕДУКЦИИ ЦЕПОЧЕК ВОЛЬТЕРРА И ТОДЫ

Рассматриваются системы Вольтерра и Тоды. Для этих дифференциально-разностных систем с помощью некоторых алгебраических соотношений строится счетный класс редукций. В результате получаются конечномерные системы, дополненные автопреобразованиями Беклунда.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются уравнения цепочек Вольтерра [1] и Тоды [2–6]. Хорошо известны физические приложения этих дифференциально-разностных систем. Известно также, что для некоторых систем эволюционного типа эти цепочки могут служить источником определения автопреобразований Беклунда (АПБ) [7–9]. В частности, они имеют отношение к эволюционным уравнениям ограниченных иерархий Кадома-Петвиашвили [9].

Основная цель данной работы – представить конечномерные системы, возникающие в результате редукций, с помощью некоторых алгебраических соотношений. Сдвиг дискретной переменной порождает АПБ для этих конечномерных систем.

В разделе 2 строится счетный класс редукций цепочки Вольтерра. В разделе 3 на основе преобразования типа Миуры получены редукции уравнений цепочки Тоды. При этом соответствующие конечномерные системы типа системы Вольтерра и типа системы Тоды (в случае четных n) связываются преобразованием Беклунда. Для конечномерных систем типа системы Тоды найдено лагранжево представление.

2. РЕДУКЦИИ ЦЕПОЧКИ ВОЛЬТЕРРА

Рассмотрим цепочку Вольтерра

$$\dot{r}(i) = r(i)\{r(i-1) - r(i+1)\}, \quad r(i) = r(i, t), \quad i \in \mathbf{Z}, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Для произвольного $n \in \mathbf{N}$ наложим ограничение в виде следующих алгебраических соотношений:

$$r(i) + \dots + r(i+n-1) = r(i-1)r(i) \dots r(i+n), \quad i \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

*Институт динамики систем и теории управления, Иркутск, Россия. E-mail: svinin@icc.ru

Вообще говоря, соотношения (2) не обязаны быть совместными с уравнениями движения (1). Однако далее мы покажем, что эти соотношения выделяют конечномерные инвариантные многообразия.

Зафиксируем некоторое (произвольное) значение дискретной переменной $i = i_0 \in \mathbf{Z}$ и определим конечный набор функций $\mathbf{y} = (y_1(t), \dots, y_{n+1}(t))$, отождествляя

$$y_1 = r(i_0), \quad y_2 = r(i_0 + 1), \dots, \quad y_{n+1} = r(i_0 + n). \quad (3)$$

Очевидно, что в силу соотношений (2) бесконечный набор переменных $r(i)$ будет однозначно выражаться через переменные y_k в виде рациональных функций.

Из уравнений (1) и соотношений (2) несложно получить конечный набор уравнений на функции $y_k = y_k(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{y_1 + \dots + y_n}{y_2 \dots y_{n+1}} - y_1 y_2, \\ \dot{y}_k &= y_k (y_{k-1} - y_{k+1}), \quad k = 2, \dots, n, \\ \dot{y}_{n+1} &= y_n y_{n+1} - \frac{y_2 + \dots + y_{n+1}}{y_1 \dots y_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для того чтобы ограничение (2) было совместным с цепочкой Вольтерра, необходимо и достаточно, чтобы сдвиг $i_0 \rightarrow i_0 + 1$ порождал обратимое АПБ для конечномерной системы (4). В данном случае понятие АПБ (дискретная симметрия) для системы (4) означает некоторое отображение $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y})$, которое переводит каждое решение системы (4) в решение этой же системы.

Определим набор новых функций $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1(t), \dots, \tilde{y}_{n+1}(t))$ с помощью соотношений

$$\tilde{y}_1 = r(i_0 + 1), \quad \tilde{y}_2 = r(i_0 + 2), \dots, \quad \tilde{y}_{n+1} = r(i_0 + n + 1).$$

Из условий (2) несложно получить явный вид отображения $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y})$. Имеем

$$\tilde{y}_1 = y_2, \dots, \quad \tilde{y}_n = y_{n+1}, \quad \tilde{y}_{n+1} = \frac{y_2 + \dots + y_{n+1}}{y_1 y_2 \dots y_{n+1}}. \quad (5)$$

При этом обратное отображение $\mathbf{y} = \mathbf{F}^{-1}(\tilde{\mathbf{y}})$ определяется формулами

$$y_1 = \frac{\tilde{y}_1 + \dots + \tilde{y}_n}{\tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \dots \tilde{y}_{n+1}}, \quad y_2 = \tilde{y}_1, \dots, \quad y_{n+1} = \tilde{y}_n.$$

Можно проверить, что соотношения (5) реализуют АПБ для системы (4). Таким образом, сформулируем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Соотношения (2) совместны с уравнениями цепочки Вольтерра и редуцируют их к конечномерным системам (4) с обратимым АПБ (5).*

ПРИМЕР 1. При $n = 1$ имеем систему

$$\dot{y}_1 = y_1 \left(\frac{1}{y_2} - y_2 \right), \quad \dot{y}_2 = y_2 \left(y_1 - \frac{1}{y_1} \right) \quad (6)$$

с АПБ

$$\tilde{y}_1 = y_2, \quad \tilde{y}_2 = \frac{1}{y_1}. \quad (7)$$

Несложно проверить, что функция

$$P = -(y_1 + y_2) - \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2}$$

является первым интегралом для системы (6). Заметим, что интеграл P также инвариантен относительно отображения (7).

ПРИМЕР 2. При $n = 2$ имеем систему

$$\dot{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{y_2 y_3} - y_1 y_2, \quad \dot{y}_2 = y_2 (y_1 - y_3), \quad \dot{y}_3 = y_2 y_3 - \frac{y_2 + y_3}{y_1 y_2} \quad (8)$$

с АПБ

$$\tilde{y}_1 = y_2, \quad \tilde{y}_2 = y_3, \quad \tilde{y}_3 = \frac{y_2 + y_3}{y_1 y_2 y_3}. \quad (9)$$

Для уравнений (8) можно отметить два первых интеграла

$$P = -(y_1 + y_2 + y_3) - \frac{y_1 + y_2 + y_3}{y_1 y_2 y_3}, \quad E = -y_1 y_3 - \frac{(y_1 + y_2)(y_2 + y_3)}{y_1 y_2 y_3}.$$

Также несложно проверить инвариантность P и E относительно АПБ (9).

3. РЕДУКЦИИ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Определим функции

$$a_0(i) = -r(2i - 1) - r(2i), \quad a_1(i) = r(2i - 2)r(2i - 1).$$

Известно, что эти соотношения задают отображение решений цепочки Вольтерра в решения цепочки Тоды [3, 4]

$$\dot{a}_0(i) = a_1(i + 1) - a_1(i), \quad \dot{a}_1(i) = a_1(i) \{a_0(i) - a_0(i - 1)\}, \quad i \in \mathbf{Z}. \quad (10)$$

В соотношениях (2) сделаем замену $i \rightarrow 2i - 1$. В случае четных n эти соотношения переписываются в виде

$$-a_0(i) - \dots - a_0(i + m - 1) = a_1(i)a_1(i + 1) \dots a_1(i + m), \quad i \in \mathbf{Z}, \quad (11)$$

где $m = n/2$.

Естественно предположить, что соотношения (11) редуцируют уравнения цепочки Тоды (10) к конечномерным системам. Перепишем уравнения (10) в более известной форме, определив бесконечный набор функций $\{u_i(t), i \in \mathbf{Z}\}$ соотношениями

$$a_0(i) = -\dot{u}_i, \quad a_1(i) = e^{u_{i-1}-u_i}.$$

В результате имеем

$$\ddot{u}_i = e^{u_{i-1}-u_i} - e^{u_i-u_{i+1}}, \quad i \in \mathbf{Z}. \quad (12)$$

При этом условие (11) переписывается в виде

$$\dot{u}_i + \dots + \dot{u}_{i+m-1} = e^{u_{i-1}-u_{i+m}}, \quad i \in \mathbf{Z}. \quad (13)$$

Также заметим, что в терминах τ -функции, определяемой соотношениями

$$e^{u_i} = \frac{\tau_i}{\tau_{i+1}},$$

ограничение (13) записывается в виде простого билинейного уравнения

$$\dot{\tau}_i \tau_{i+m} - \tau_i \dot{\tau}_{i+m} = D_t \tau_i \cdot \tau_{i+m} = \tau_{i-1} \tau_{i+m+1}.$$

По аналогии с цепочкой Вольтерра определим конечный набор функций $\mathbf{q} = (q_1(t), \dots, q_{m+1}(t))$, отождествляя

$$q_1 = u_{i_0}, \quad q_2 = u_{i_0+1}, \dots, \quad q_{m+1} = u_{i_0+m}.$$

Из уравнений цепочки Тоды (10) и условий (13) получаем следующие конечномерные системы:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= (\dot{q}_1 + \dots + \dot{q}_m) e^{q_{m+1}-q_1} - e^{q_1-q_2}, \\ \ddot{q}_k &= e^{q_{k-1}-q_k} - e^{q_k-q_{k+1}}, \quad k = 2, \dots, m, \\ \ddot{q}_{m+1} &= e^{q_m-q_{m+1}} - (\dot{q}_2 + \dots + \dot{q}_{m+1}) e^{q_{m+1}-q_1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Определим новые функции $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{q}_1(t), \dots, \tilde{q}_{m+1}(t))$:

$$\tilde{q}_1 = u_{i_0+1}, \quad \tilde{q}_2 = u_{i_0+2}, \dots, \quad \tilde{q}_{m+1} = u_{i_0+m+1}.$$

Из соотношений (13), получаем

$$\tilde{q}_1 = q_2, \dots, \tilde{q}_m = q_{m+1}, \quad \tilde{q}_{m+1} = q_1 - \ln(\dot{q}_2 + \dots + \dot{q}_{m+1}). \quad (15)$$

Нетрудно также найти обратное отображение. Имеем

$$q_1 = \tilde{q}_{m+1} + \ln(\dot{\tilde{q}}_1 + \dots + \dot{\tilde{q}}_m), \quad q_2 = \tilde{q}_1, \quad \dots, \quad q_{m+1} = \tilde{q}_m.$$

Можно показать, что соотношения (15) реализуют АПБ для систем (14). Таким образом, доказано следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Соотношения (13) совместны с уравнениями цепочки Тоды (10) и редуцируют их к конечномерным системам (14) с обратимым АПБ (15).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Соотношения

$$\begin{aligned} y_{2k-1} + y_{2k} &= \dot{q}_k, \quad k = 1, \dots, m, \\ y_{2m+1} + \frac{y_2 + \dots + y_{2m+1}}{y_1 y_2 \dots y_{2m+1}} &= \dot{q}_{m+1}, \\ y_{2k} y_{2k+1} &= e^{q_k - q_{k+1}}, \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (16)$$

реализуют преобразование Беклунда между конечномерными системами (4) и (14) в случае $n = 2m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3. Заменим в формулах (3) i_0 на $2i_0 - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} y_{2k-1} + y_{2k} &= r(2i_0 + 2k - 3) + r(2i_0 + 2k - 2) = \\ &= -a_0(i_0 + k - 1) = \dot{u}_{i_0+k-1} = \dot{q}_k, \quad k = 1, \dots, m, \\ y_{2m+1} + \tilde{y}_{2m+1} &= y_{2m+1} + \frac{y_2 + \dots + y_{2m+1}}{y_1 y_2 \dots y_{2m+1}} = \\ &= r(2i_0 + 2m - 1) + r(2i_0 + 2m) = a_0(i_0 + m) = \dot{u}_{i_0+m} = \dot{q}_{m+1}, \\ y_{2k} y_{2k+1} &= r(2i_0 + 2k - 2)r(2i_0 + 2k - 1) = \\ &= a_1(i_0 + k) = e^{u_{i_0+k-1} - u_{i_0+k}} = e^{q_k - q_{k+1}}, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

ПРИМЕР 3. При $m = 1$ система (14) записывается в виде

$$\ddot{q}_1 = \dot{q}_1 e^{q_2 - q_1} - e^{q_1 - q_2}, \quad \ddot{q}_2 = e^{q_1 - q_2} - \dot{q}_2 e^{q_2 - q_1}. \quad (17)$$

АПБ этой системы выглядит следующим образом:

$$\tilde{q}_1 = q_2, \quad \tilde{q}_2 = q_1 - \ln \dot{q}_2. \quad (18)$$

В свою очередь, преобразование Беклунда (16) задается формулами

$$y_1 + y_2 = \dot{q}_1, \quad y_3 + \frac{y_2 + y_3}{y_1 y_2 y_3} = \dot{q}_2, \quad y_2 y_3 = e^{q_1 - q_2}. \quad (19)$$

Используя соотношения (19), несложно получить первые интегралы для системы (17):

$$P = -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 - e^{q_2 - q_1}, \quad E = -\dot{q}_1 \dot{q}_2 + e^{q_1 - q_2}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Системы типа системы Тоды (14) записываются в форме уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m+1,$$

с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \sum_{i < j} \dot{q}_i \dot{q}_j - \sum_{i=1}^m e^{q_i - q_{i+1}} - \left(\frac{1}{2} \dot{q}_1 + \sum_{j=2}^m \dot{q}_j + \frac{1}{2} \dot{q}_{m+1} \right) e^{q_{m+1} - q_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисляем производные Эйлера

$$E_{q_k} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} E_{q_1} \mathcal{L} &= - \sum_{j=2}^{m+1} \ddot{q}_j - e^{q_1 - q_2} + \left(\sum_{j=2}^{m+1} \dot{q}_j \right) e^{q_{m+1} - q_1}, \\ E_{q_k} \mathcal{L} &= - \sum_{j \neq k} \ddot{q}_j - e^{q_k - q_{k+1}} + e^{q_{k-1} - q_k} + \\ &\quad + (\dot{q}_{m+1} - \dot{q}_1) e^{q_{m+1} - q_1}, \quad k = 2, \dots, m, \\ E_{q_{m+1}} \mathcal{L} &= - \sum_{j=1}^m \ddot{q}_j + e^{q_m - q_{m+1}} - \left(\sum_{j=1}^m \dot{q}_j \right) e^{q_{m+1} - q_1}. \end{aligned}$$

Приравнявая производные $E_{q_k} \mathcal{L}$ к нулю, получаем систему

$$\sum_{j=1}^{m+1} A_{ij} \ddot{q}_j = f_i(q_k, \dot{q}_k), \quad k = 1, \dots, m+1, \quad (20)$$

где матрица $A = (A_{ij})$ состоит из нулей на главной диагонали и единиц на остальных местах. Несложно проверить, что обратная матрица A^{-1} состоит из чисел $(2-m-1)/m$ на главной диагонали и чисел $1/m$ на остальных местах. Подставляя правые части системы (14) в (20), убеждаемся, что эти системы эквивалентны. Таким образом, утверждение 4 доказано.

Используя преобразование Лежандра, при любом m несложно получить для каждой из систем (14) соответствующий гамильтониан.

ПРИМЕР 4. Система (17) описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\dot{q}_1 \dot{q}_2 - e^{q_1 - q_2} - \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)e^{q_2 - q_1}.$$

Выражения для обобщенных импульсов имеют вид

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = -\dot{q}_2 - \frac{1}{2}e^{q_2 - q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = -\dot{q}_1 - \frac{1}{2}e^{q_2 - q_1},$$

а для гамильтониана –

$$\mathcal{H} = \dot{q}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} - \mathcal{L} = -\left(p_1 + \frac{1}{2}e^{q_2 - q_1}\right)\left(p_2 + \frac{1}{2}e^{q_2 - q_1}\right) + e^{q_1 - q_2}.$$

Несложно проверить, что интегралы $\mathcal{H}$ и $P = p_1 + p_2$ находятся в инволюции относительно стандартной скобки Пуассона, задаваемой формой

$$w = \sum_{i=1}^2 dp_i \wedge dq_i.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что система (17) является гамильтоновой и интегрируема по Лиувиллю [10, 11].

Естественно предположить, что все системы типа системы Тоды (14) – интегрируемые системы.

Сделаем несколько заключительных замечаний. В статье построен класс редукций уравнений цепочки Вольтерра и Тоды к динамическим системам на конечномерных многообразиях. Естественно ожидать от соответствующих конечномерных систем проявления различных свойств интегрируемости, таких как свойство Пенлеве, бигамильтоново представление, лаксово представление и т.д.

Список литературы

- [1] *С. В. Манаков*. ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 543.
- [2] *М. Toda*. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
- [3] *М. Toda*. Suppl. Progr. Theor. Phys. 1976. V. 59. P. 1.
- [4] *М. Wadati*. Suppl. Progr. Theor. Phys. 1976. V. 59. P. 36.
- [5] *Н. Flaschka*. Phys. Rev. B. 1974. V. 9. P. 1924.
- [6] *Н. Flaschka*. Progr. Theor. Phys. 1974. V. 51. P. 703.
- [7] *Д. Levi*. J. Phys. A. 1981. V. 14. P. 1083.
- [8] *А. Н. Leznov, А. В. Shabat, Р. I. Yamilov*. Phys. Lett. A. 1993. V. 174. P. 397.
- [9] *Н. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomez, A. H. Zimerman*. Toda and Volterra lattice equations from discrete symmetries of KP hierarchies. hep-th/9307147.
- [10] *Ж. Liouville*. J. Math. Pure Appl. 1855. V. 20. P. 137.
- [11] *В. И. Арнольд*. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 22.11.2000 г.