Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Н. Кулик, А. В. Тур, В. В. Яновский, Взаимодействие
точечного и дипольного вихрей в несжимаемой жидко-
сти, *ТМФ*, 2010, том 162, номер 3, 459–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:26:27

© 2010 г. К. Н. Кулик*, А. В. Тур*[†], В. В. Яновский*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОЧЕЧНОГО И ДИПОЛЬНОГО ВИХРЕЙ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Обсуждается взаимодействие точечных вихрей и точечных вихревых диполей в двумерной идеальной гидродинамике. Показана точная интегрируемость уравнений движения взаимодействующих точечного и точечного дипольного вихрей. Найдены точные решения для всех возможных значений параметров, характеризующих вихри, и произвольных начальных условий. Установлены режимы движения вихрей.

Ключевые слова: двумерная идеальная гидродинамика, гамильтонов формализм, точечный вихрь, дипольный точечный вихрь, точные решения, режимы движения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В двумерной идеальной гидродинамике несжимаемой жидкости исключительно важную роль играют точечные вихри. Причина этого хорошо известна. Прежде всего, точечные вихри претендуют на роль хорошо определенных квазичастиц. Это означает, что разнообразные течения двумерной идеальной жидкости могут быть представлены как движения, индуцированные системой взаимодействующих точечных вихрей [1]. Определенные ограничения этой идеологии обсуждаются, например, в работе [2]. Точечные вихри порождают интересные конечномерные динамические системы, тесно связанные с бесконечномерными полевыми системами гидродинамического типа. При этом даже небольшое число точечных вихрей обладает нетривиальными, а в некоторых случаях и экзотическими динамическими свойствами. Интересно отметить, что задача трех вихрей точно интегрируемая [3], [4] в отличие от известной проблемы трех тел. Причина этого в том, что в гамильтоновой формулировке [5] система вихрей имеет дополнительный закон сохранения. Кроме того, известен еще целый ряд специальных конфигураций большого числа вихрей, для которых найдены точные решения (см., например, монографию [6]). Однако в случае общего положения доказано возникновение хаотического поведения у четырех и более точечных вихрей [7], [8]. Системы вихрей порождают довольно сложные

*Институт монокристаллов, НАН Украины, Харьков, Украина.
E-mail: koskul@isc.kharkov.ua

[†]Center D'etude Spatiale Des Rayonnements, Toulouse, France

течения, которые важны, например, для описания переноса пассивной примеси или в задачах адвекции [9]. Внимание исследователей привлекли также обобщения таких точечных вихрей на сфере [10] или в замкнутых областях [11]. Особую роль точечные вихри играют в исследовании двумерной турбулентности [12]–[15]. При этом существенное значение имеют как характер взаимодействия вихрей и формирование статистически стационарных состояний [16], [17], так и характер сингулярного поля скорости, индуцированного движениями точечных вихрей [18]. Последний фактор естественно доминирует при определении спектра двумерной турбулентности. Кроме того, течения, порождаемые точечными вихрями, приводят к нетривиальным решениям в гидродинамике и конфигурациям магнитных полей в МГД [19]–[21].

В настоящей работе показано, что нелинейные уравнения идеальной гидродинамики имеют в качестве обобщенных локализованных решений точечные вихри и точечные дипольные вихри. Простейшие из них хорошо известны как точечные вихри. Более сложные квазичастицы соответствуют точечным диполям завихренности. Точечные мультипольные вихри более высокого порядка не реализуются как точные решения [22] в двумерной гидродинамике. С появлением нового типа квазичастиц в двумерной гидродинамике все упомянутые выше направления исследований расширяются с учетом влияния точечных дипольных вихрей. Ниже для произвольного числа взаимодействующих точечных вихрей и точечных дипольных вихрей получены точные уравнения движения. Показано, что эти уравнения являются гамильтоновыми и обладают дополнительными законами сохранения, три из которых находятся в инволюции. Следствием этого является точная интегрируемость двухчастичной системы, состоящей из точечного вихря и точечного дипольного вихря. Задача об эволюции двух дипольных вихрей уже оказывается неинтегрируемой в общем случае. В работе получены точные решения для траекторий точечного вихря и диполя и проанализированы все режимы их движения. Найденные решения определяют все возможные двумерные течения, индуцированные движениями взаимодействующих точечного и точечного дипольного вихрей.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ И ТОЧЕЧНЫХ ДИПОЛЕЙ

Начнем с уравнений движения несжимаемой идеальной жидкости в двумерном случае:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i}, \\ \operatorname{div} \vec{V} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $i, j = 1, 2$ и по двойным индексам подразумевается суммирование. Введем функцию тока φ бездивергентного поля скорости $\vec{V}$, которая определяется соотношением

$$V_i = \varepsilon_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \quad (2)$$

Здесь ε_{ik} – единичный антисимметричный тензор. Условие бездивергентности для поля скорости (2) автоматически выполняется. Действуя оператором ротора на

уравнение (1), получаем хорошо известное уравнение для φ (см., например, книгу [23])

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + \{\Delta \varphi, \varphi\} = 0, \quad (3)$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа, а $\{A, B\} = \varepsilon_{ik}(\partial A / \partial x_i)(\partial B / \partial x_k)$ – стандартная скобка Пуассона. Физическая интерпретация полученного уравнения соответствует вмерзженности поля завихренности ω в среду. Завихренность ω определяется в терминах функции тока φ как

$$\omega = -\Delta \varphi. \quad (4)$$

Далее основное внимание мы уделим локализованным состояниям завихренности. Согласно теории обобщенных функций, самые общие локализованные в точке состояния описываются функциями, совпадающими с суммой δ -функций и ее производных [24], [25]. В дальнейшем ограничимся рассмотрением сумм δ -функций и дипольных вкладов. Тогда локализованное поле завихренности, используя обобщенные функции, можно записать как

$$-\Delta \varphi = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} \delta(\vec{x} - \vec{x}_v^{\alpha}(t)) + \sum_{\beta=1}^M D_m^{\beta}(t) \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}_d^{\beta}(t))}{\partial x_m}. \quad (5)$$

Видно, что поле завихренности представлено в виде суммы по точечным сингулярностям – вихрям и точечным вихревым диполям. Греческие индексы $\alpha = 1, \dots, N$ и $\beta = 1, \dots, M$ в правой части нумеруют соответствующие объекты. Первая сумма соответствует точечным вихрям; Γ_{α} – интенсивность, а $\vec{x}_v^{\alpha}(t)$ – координата α -го вихря. Вторая сумма соответствует точечным дипольным вихрям; $D_m^{\beta}(t)$ – дипольный момент, $\vec{x}_d^{\beta}(t)$ – координаты β -го точечного диполя. Мультиполи более высоких порядков в работе не рассматриваются. Главная причина этого в том, что, как можно доказать, такие мультипольные вихри не реализуются в двумерной гидродинамике [22].

Из уравнения (5) легко получить явный вид функции тока:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} \ln |\vec{x} - \vec{x}_v^{\alpha}(t)| - \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^M D_l^{\beta}(t) \frac{(x_l - x_{ld}^{\beta}(t))}{|\vec{x} - \vec{x}_d^{\beta}(t)|^2}. \quad (6)$$

Разумеется, это решение выписано с точностью до гармонических функций. Эти функции играют важную роль при изучении движения сингулярностей при наличии границ, но не в безграничной среде. Поэтому далее они не используются. Кроме того, зависимость от времени положений и характеристик этих локализованных вихрей, естественно, не определяется уравнением (5) и соответственно пока произвольна. Теперь следует убедиться, что функция тока φ (6) при определенных условиях является точным решением уравнений двумерной гидродинамики. Для этого подставим функцию тока (6) в уравнение (3). После подстановки получим

уравнение

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} \left(\frac{dx_{vi}^{\alpha}(t)}{dt} - V_i \right) \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}_v^{\alpha}(t))}{\partial x_i} - \sum_{\beta=1}^M \frac{dD_i^{\beta}(t)}{dt} \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}_d^{\beta}(t))}{\partial x_i} - \\ - \sum_{\beta=1}^M D_m^{\beta}(t) \left(\frac{dx_{di}^{\beta}(t)}{dt} - V_i \right) \frac{\partial^2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_d^{\beta}(t))}{\partial x_m \partial x_i} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь V_i – компоненты поля скорости, вычисленные с использованием функции тока (6) согласно уравнению (2). Обратим внимание, что коэффициенты при производных от δ -функций Дирака, входящих в уравнение, являются функциями как t , так и $\vec{x}$. Это означает, что лобовое обращение в нуль этих коэффициентов невозможно. Однако обращение в нуль приобретает смысл после преобразования коэффициентов с учетом свойств обобщенных функций. В качестве таких известных свойств (см., например, книги [24], [25]) используем

$$\alpha(\vec{x}) \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{A})}{\partial x_i} = \alpha(\vec{x})|_{\vec{x}=\vec{A}} \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{A})}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha(\vec{x})}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}=\vec{A}} \delta(\vec{x} - \vec{A}) \quad (8)$$

и

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{x}) \frac{\partial^2 \delta(\vec{x} - \vec{A})}{\partial x_i \partial x_j} = \alpha(\vec{x})|_{\vec{x}=\vec{A}} \frac{\partial^2 \delta(\vec{x} - \vec{A})}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \alpha(\vec{x})}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}=\vec{A}} \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{A})}{\partial x_j} - \\ - \frac{\partial \alpha(\vec{x})}{\partial x_j} \Big|_{\vec{x}=\vec{A}} \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{A})}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \alpha(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\vec{x}=\vec{A}} \delta(\vec{x} - \vec{A}). \end{aligned} \quad (9)$$

После простых преобразований уравнения (7) с учетом этих соотношений получим коэффициенты при производных δ -функций, которые зависят только от положений сингулярностей. Таким образом, уравнение (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} \left(\frac{dx_{vi}^{\alpha}(t)}{dt} - V_i|_{\vec{x}=\vec{x}_v^{\alpha}(t)} \right) \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}_v^{\alpha}(t))}{\partial x_i} - \\ - \sum_{\beta=1}^M \left(\frac{dD_i^{\beta}(t)}{dt} - D_m^{\beta}(t) \frac{\partial V_i}{\partial x_m} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_d^{\beta}(t)} \right) \frac{\partial \delta(\vec{x} - \vec{x}_d^{\beta}(t))}{\partial x_i} + \\ + \sum_{\beta=1}^M D_m^{\beta}(t) \left(\frac{dx_{di}^{\beta}(t)}{dt} - V_i|_{\vec{x}=\vec{x}_d^{\beta}(t)} \right) \frac{\partial^2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_d^{\beta}(t))}{\partial x_m \partial x_i} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь обращение в нуль коэффициентов при соответствующих производных δ -функций дает уравнения движения взаимодействующих сингулярностей. При этом, если координаты и дипольные моменты эволюционируют согласно этим уравнениям, то поле скорости, порождаемое функцией тока (6), является точным обобщенным решением уравнений несжимаемой идеальной двумерной гидродинамики. Обратим внимание, что уравнения движения сингулярностей являются естественным следствием вмороженности завихренности в движения среды. Действительно, из соотношений (10) следует, что скорость движения выбранной сингулярности совпадает

со скоростью среды в точке ее расположения, индуцированной всеми остальными сингулярностями:

$$\frac{dx_{vi}^{\alpha}(t)}{dt} = -\varepsilon_{ik} \left\{ \sum_{\gamma \neq \alpha}^N \frac{\Gamma_{\gamma}}{2\pi} \frac{(x_{vk}^{\alpha} - x_{vk}^{\gamma})}{|\vec{x}_v^{\alpha} - \vec{x}_v^{\gamma}|^2} + \sum_{\beta}^M \frac{D_l^{\beta}(t)}{2\pi} \left(\frac{\delta_{lk}}{|\vec{x}_v^{\alpha} - \vec{x}_d^{\beta}|^2} - \frac{2(x_{vl}^{\alpha} - x_{dl}^{\beta})(x_{vk}^{\alpha} - x_{dk}^{\beta})}{|\vec{x}_v^{\alpha} - \vec{x}_d^{\beta}|^4} \right) \right\} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{dx_{di}^{\beta}(t)}{dt} = -\varepsilon_{ik} \left\{ -\sum_{\alpha}^N \frac{\Gamma_{\alpha}}{2\pi} \frac{(x_{dk}^{\beta} - x_{vk}^{\alpha})}{|\vec{x}_v^{\alpha} - \vec{x}_d^{\beta}|^2} + \sum_{\gamma \neq \beta}^M \frac{D_l^{\gamma}(t)}{2\pi} \left(\frac{\delta_{lk}}{|\vec{x}_d^{\beta} - \vec{x}_d^{\gamma}|^2} - \frac{2(x_{dl}^{\beta} - x_{dl}^{\gamma})(x_{dk}^{\beta} - x_{dk}^{\gamma})}{|\vec{x}_d^{\beta} - \vec{x}_d^{\gamma}|^4} \right) \right\} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{dD_i^{\beta}(t)}{dt} = -\frac{1}{2\pi} D_m^{\beta}(t) \varepsilon_{ik} \left\{ \sum_{\alpha}^N \Gamma_{\alpha} \left(\frac{\delta_{km}}{|\vec{x}_d^{\beta} - \vec{x}_v^{\alpha}|^2} - \frac{2(x_{dk}^{\beta} - x_{vk}^{\alpha})(x_{dm}^{\beta} - x_{vm}^{\alpha})}{|\vec{x}_d^{\beta} - \vec{x}_v^{\alpha}|^4} \right) + \sum_{\gamma \neq \beta}^M D_l^{\gamma}(t) \left(-\frac{\delta_{lk} 2(x_{dm}^{\beta} - x_{dm}^{\gamma})}{|\vec{x}_d^{\beta} - \vec{x}_d^{\gamma}|^4} - \frac{\delta_{ml} 2(x_{dk}^{\beta} - x_{dk}^{\gamma})}{|\vec{x}_d^{\beta} - \vec{x}_d^{\gamma}|^4} - \frac{\delta_{mk} 2(x_{dl}^{\beta} - x_{dl}^{\gamma})}{|\vec{x}_d^{\beta} - \vec{x}_d^{\gamma}|^4} + \frac{8(x_{dl}^{\beta} - x_{dl}^{\gamma})(x_{dk}^{\beta} - x_{dk}^{\gamma})(x_{dm}^{\beta} - x_{dm}^{\gamma})}{|\vec{x}_d^{\beta} - \vec{x}_d^{\gamma}|^6} \right) \right\} = 0. \quad (13)$$

Система уравнений (11) при нулевых значениях дипольных моментов в точности совпадает с системой уравнений, полученной для точечных вихрей (см., например, монографию [1]). Полная система уравнений (11)–(13) определяет эволюцию взаимодействующих N точечных вихрей и M точечных диполей. Частная система уравнений (12), (13) при $\Gamma_{\alpha} \equiv 0$ описывает эволюцию M взаимодействующих точечных дипольных вихрей.

Обсудим некоторые общие свойства системы взаимодействующих точечных вихрей и точечных диполей. Прежде всего, система уравнений (11)–(13) является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha \neq \beta}^N \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \ln |\vec{x}_v^{\alpha} - \vec{x}_v^{\beta}| - \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta}^{N, M} \frac{\Gamma_{\alpha} D_{\beta l} (x_{vl}^{\alpha} - x_{dl}^{\beta})}{|\vec{x}_v^{\alpha} - \vec{x}_d^{\beta}|^2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{\beta < \gamma = 1 \\ \beta \neq \gamma}}^M \frac{2D_{\beta m} (x_{dm}^{\beta} - x_{dm}^{\gamma}) D_{\gamma l} (x_{dl}^{\beta} - x_{dl}^{\gamma}) - D_{\beta m} D_{\gamma m} (\vec{x}_d^{\beta} - \vec{x}_d^{\gamma})^2}{|\vec{x}_v^{\beta} - \vec{x}_d^{\gamma}|^4}, \quad (14)$$

где первая группа слагаемых соответствует энергии взаимодействия точечных вихрей, вторая – взаимодействию вихрей и диполей, а третья – взаимодействию диполей. Уравнения (11)–(13) принимают следующий гамильтонов вид:

$$\Gamma_{\alpha} \dot{x}_{vi}^{\alpha} = \varepsilon_{ik} \frac{\partial H}{\partial x_{vk}^{\alpha}}, \quad (15)$$

$$\dot{x}_{di}^\beta = -\varepsilon_{ik} \frac{\partial H}{\partial D_k^\beta}, \quad (16)$$

$$\dot{D}_i^\beta = -\varepsilon_{ik} \frac{\partial H}{\partial x_{dk}^\alpha}. \quad (17)$$

Уравнение (15) является очевидным обобщением гамильтоновой структуры точечных вихрей. Канонически сопряженными переменными для точечных вихрей являются их координаты. Для точечных дипольных вихрей канонически сопряженными переменными являются дипольные моменты и координаты диполя. Система уравнений (15)–(17) обладает законами сохранения, которые легко проверяются непосредственной подстановкой:

$$I_1 = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha x_{v1}^\alpha - \sum_{\beta=1}^M D_1^\beta = \text{const}, \quad (18)$$

$$I_2 = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha x_{v2}^\alpha - \sum_{\beta=1}^M D_2^\beta = \text{const}, \quad (19)$$

$$J = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha (\vec{x}_v^\alpha)^2 - 2 \sum_{\beta=1}^M (\vec{D}^\beta \cdot \vec{x}_d^\beta) = \text{const}. \quad (20)$$

Эти законы сохранения в определенном смысле вполне аналогичны известным законам сохранения в системе только точечных вихрей. Естественно, еще одним законом сохранения является закон сохранения энергии системы: $H = \text{const}$.

Систему уравнений (15)–(17) можно записать и в более симметричном виде, вводя скобку Пуассона

$$\{A, B\} = \sum_{\alpha} \frac{1}{\Gamma_\alpha} \varepsilon_{ik} \frac{\partial A}{\partial x_i^\alpha} \frac{\partial B}{\partial x_k^\alpha} - \sum_{\beta} \varepsilon_{ik} \frac{\partial A}{\partial D_i^\beta} \frac{\partial B}{\partial x_{dk}^\beta} - \sum_{\beta} \varepsilon_{ik} \frac{\partial A}{\partial x_{di}^\beta} \frac{\partial B}{\partial D_k^\beta}. \quad (21)$$

Тогда гамильтоновы уравнения принимают обычный вид:

$$\dot{x}_{vi}^\alpha = \{x_{vi}^\alpha, H\}, \quad (22)$$

$$\dot{x}_{di}^\beta = \{x_{di}^\beta, H\}, \quad (23)$$

$$\dot{D}_i^\beta = \{D_i^\beta, H\}. \quad (24)$$

Используя скобку Пуассона (21), легко проверить, что в инволюции находятся только три из четырех приведенных выше инвариантов.

Действительно, непосредственное вычисление скобок Пуассона от первых интегралов движения позволяет получить, что

$$\{I_1, H\} = \{I_2, H\} = \{J, H\} = 0. \quad (25)$$

Кроме этого,

$$\{I_1, I_2\} = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha, \quad (26)$$

$$\{I_1, J\} = 2I_2, \quad (27)$$

$$\{I_2, J\} = -2I_1. \quad (28)$$

Другими словами, интегралы I_1 , I_2 и J не находятся в инволюции. Однако, используя свойства скобки Пуассона, легко установить, что

$$\begin{aligned} \{I_1^2 + I_2^2, J\} &= \{I_1^2, J\} + \{I_2^2, J\} = \\ &= 2I_1\{I_1, J\} + 2I_2\{I_2, J\} = 2I_12I_2 - 2I_22I_1 = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, три первых интеграла движения H , J , $I_1^2 + I_2^2$ находятся в инволюции. Частный случай этих законов сохранения для системы вихрей хорошо известен [1], [23], [26]. Поэтому, учитывая теорему Лиувилля, легко понять, что система взаимодействующего точечного вихря с одним точечным диполем является точно интегрируемой. Напомним, что по аналогичной причине система трех точечных вихрей является точно интегрируемой в квадратурах [3], [26], [27].

3. ЭВОЛЮЦИЯ ТОЧЕЧНОГО ВИХРЯ И ДИПОЛЯ

Рассмотрим более детально взаимодействие точечного вихря и точечного вихревого диполя. В этом случае уравнения (11)–(13) упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_{di}}{dt} &= -\frac{\varepsilon_{ik}}{2\pi} \frac{\Gamma l_k}{l^2}, \\ \frac{dx_{vi}}{dt} &= -\frac{\varepsilon_{ik}}{2\pi} \left(\frac{D_k}{l^2} - 2 \frac{\vec{D} \cdot \vec{l}}{l^4} l_k \right), \\ \frac{dD_i}{dt} &= -\frac{\Gamma \varepsilon_{ik}}{2\pi} \left(\frac{D_k}{l^2} - 2 \frac{\vec{D} \cdot \vec{l}}{l^4} l_k \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь векторы $\vec{x}_d$ и $\vec{x}_v$ определяют положения точечного вихревого диполя и вихря соответственно, а вектор $\vec{l} = \vec{x}_d - \vec{x}_v$ – расстояние между ними. Естественно, как было показано выше, эта система уравнений обладает законами сохранения:

$$\frac{d(\Gamma \vec{x}_v - \vec{D})}{dt} = 0 \implies \Gamma \vec{x}_v - \vec{D} = \text{const} \equiv \vec{A}, \quad (31)$$

$$\frac{d(\Gamma(\vec{x}_v)^2 - 2\vec{x}_d \cdot \vec{D})}{dt} = 0 \implies \Gamma(\vec{x}_v)^2 - 2\vec{x}_d \cdot \vec{D} = \text{const} \equiv B. \quad (32)$$

Интересно отметить важное следствие закона сохранения (31). Положение точечного вихря в любой момент времени однозначно определяется начальными условиями и вектором дипольного момента точечного вихревого диполя.

Значения постоянного вектора $\vec{A}$ и постоянной B определяются начальными условиями. Далее удобно мощность вихря и дипольный момент нормировать на 2π без изменения обозначений ($\Gamma/2\pi \rightarrow \Gamma$ и $\vec{D}/2\pi \rightarrow \vec{D}$). Кроме того, удобно перейти от системы уравнений в терминах координат к системе уравнений в терминах расстояния между диполем и вихрем $\vec{l} = \vec{x}_d - \vec{x}_v$. Число уравнений, описывающих взаимодействие вихря и диполя, после такого перехода сокращается до четырех.

С физической точки зрения основную роль играют не абсолютные положения вихря и вихревого диполя, а их расположение относительно друг друга. После перехода к этим переменным получим

$$\begin{aligned}\frac{dD_i}{dt} &= -\varepsilon_{ik}\Gamma\left(\frac{D_k}{l^2} - 2\frac{\vec{D}\cdot\vec{l}}{l^4}l_k\right), \\ \frac{dl_i}{dt} &= -\varepsilon_{ik}\left(\frac{\Gamma l_k}{l^2} - \frac{D_k}{l^2} + 2\frac{\vec{D}\cdot\vec{l}}{l^4}l_k\right).\end{aligned}\quad (33)$$

Для этой системы уравнений закон сохранения (32) с учетом (31) трансформируется в

$$\vec{D}\cdot(\vec{D} + 2\Gamma\vec{l}) = \text{const} \equiv \vec{A}^2 - \Gamma B = b. \quad (34)$$

Начнем анализ поведения вихря и диполя с изучения изменений величины расстояния между ними $|\vec{l}|$ и величины дипольного момента $|\vec{D}|$. Для этого получим уравнения для $|\vec{l}|^2$ и $|\vec{D}|^2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d|\vec{l}|^2}{dt} &= \frac{\varepsilon_{ik}l_iD_k}{l^2}, \\ \frac{1}{2}\frac{d|\vec{D}|^2}{dt} &= 2\Gamma\frac{\vec{D}\cdot\vec{l}}{l^2}\frac{\varepsilon_{ik}D_i l_k}{l^2}.\end{aligned}\quad (35)$$

Из закона сохранения (34) следует, что

$$2\Gamma\vec{D}\cdot\vec{l} = b - \vec{D}^2, \quad (36)$$

где $b = \vec{D}_0^2 + 2\Gamma\vec{D}_0\cdot\vec{l}_0$. Уже из записи уравнений в такой форме легко увидеть простое частное решение этой системы уравнений. Этот случай соответствует начальному условию $\vec{D}\cdot\vec{l}|_{t=0} = 0$. Другими словами, в начальный момент времени $\vec{l}$ ортогонально дипольному моменту $\vec{D}$. Тогда из уравнения (35) следует сохранение величины дипольного момента $|\vec{D}|$ во времени. Кроме этого, из закона сохранения (34) следует сохранение ортогональности между $\vec{D}$ и $\vec{l}$. Следовательно, уравнение для расстояния $|\vec{l}|^2 \equiv l^2$ можно записать в виде

$$l\frac{dl}{dt} = \frac{D_0}{l},$$

где D_0 – начальная величина дипольного момента. Интегрируя это уравнение, легко получить частное решение

$$\begin{aligned}\vec{D}\cdot\vec{l} &= 0, \\ D &= D_0, \\ l^3 &= 3D_0t + l_0^3.\end{aligned}\quad (37)$$

Это решение соответствует специальному случаю, когда дипольный момент при $t = 0$ направлен ортогонально к направлению между вихрем и диполем. Угол между ними сохраняется в процессе эволюции. Тогда величина дипольного момента

сохраняется, а расстояние между ними увеличивается пропорционально $t^{1/3}$. Таким образом, при начальной ортогональности $\vec{l}$ и $\vec{D}$ вихрь и точечный вихревой диполь удаляются друг от друга, или взаимно отталкиваются.

В случае общего положения ($\vec{D} \cdot \vec{l}|_{t=0} \neq 0$), используя систему уравнений (35), легко убедиться в наличии еще одного инварианта:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{D} \cdot \vec{l}}{l^2} \right) = 0 \implies \vec{D} \cdot \vec{l} = al^2, \quad (38)$$

где $a = \vec{D}_0 \cdot \vec{l}_0 / l_0^2$ определяется начальными условиями. Это означает, что величины $\vec{D} \cdot \vec{l}$, $\vec{D}^2$ и l^2 связаны друг с другом. Знания начальных условий и одной из этих величин достаточно для нахождения двух других величин (см. уравнения (34) и (38)). Теперь выясним, как эволюционирует величина $p = \varepsilon_{ik} l_i D_k$, используя снова систему уравнений (35):

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\vec{D}^2}{l^2} - 2 \frac{(\vec{D} \cdot \vec{l})^2}{l^4} - 2\Gamma \frac{(\vec{D} \cdot \vec{l})}{l^2}. \quad (39)$$

Учитывая инварианты (38) и (34), запишем это уравнение в виде

$$\frac{dp}{dt} = \frac{b}{l^2} - 2a^2 - 4\Gamma a. \quad (40)$$

Таким образом, для описания эволюции точечного вихря и диполя достаточно рассмотреть это уравнение, дополненное уравнением для l^2 :

$$\frac{1}{2} \frac{dl^2}{dt} = \frac{p}{l^2}. \quad (41)$$

Совершив для удобства замену переменных $q = l^4/4$, запишем систему уравнений в виде

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= p, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{b}{2\sqrt{q}} - C_2, \end{aligned} \quad (42)$$

где постоянная $C_2 = 2a^2 + 4\Gamma a$. Таким образом, систему уравнений (33), используя инварианты, удастся свести к системе двух уравнений (42). Нетрудно заметить, что эта система полностью аналогична уравнениям движения частицы с одной степенью свободы в заданном внешнем поле. Это означает, что данная система позволяет не только выполнить качественный анализ, но и найти точное решение в квадратурах. Эффективный гамильтониан

$$H_f = \frac{p^2}{2} - b\sqrt{q} + qC_2$$

достаточно прост. Единственная необычная черта такой гамильтоновой системы в том, что он определен в полуплоскости $q \geq 0$. Кроме того, следует учитывать, что постоянные, входящие в эффективный гамильтониан, сами зависят от начальных

условий. В принципе это означает, что для разных классов траекторий гамильтонианы отличаются значениями этих постоянных. Другими словами, им соответствуют разные гамильтонианы. Поэтому построение фазового портрета по H_f не так просто, как для обычных гамильтоновых систем.

4. СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ

Разумеется, траектории движения при заданных начальных условиях в фазовом пространстве (p, q) легко установить как линии уровня эффективного гамильтониана H_f . Однако при этом требуется довольно громоздкий анализ как постоянных, входящих в гамильтониан, так и интерпретации траекторий в исходных терминах. Поэтому удобно начать с более естественных геометрических и физических координат. В качестве таких выберем расстояние l между точечным вихрем и диполем, величину дипольного момента D и угол θ между векторами $\vec{l}$ и $\vec{D}$. Система уравнений (33) в этих координатах принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{dl}{dt} &= \frac{D}{l^2} \sin \theta, \\ \frac{dD}{dt} &= -2\Gamma \frac{D}{l^2} \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{dDl \cos \theta}{dt} &= 2 \frac{D^2}{l^2} \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}\tag{43}$$

Последнее уравнение после использования предыдущих определяет эволюцию угла θ . Законы сохранения (38) и (36) в этих переменных запишем как

$$\frac{D \cos \theta}{l} = a,\tag{44}$$

$$D^2 + 2\Gamma D l \cos \theta = b.\tag{45}$$

Постоянные a и b определяются начальными условиями. Используя эти законы, запишем закон сохранения (45) в более удобном виде:

$$D^2 + 2a\Gamma l^2 = b.\tag{46}$$

Наличие двух законов сохранения (44), (46) позволяет найти траектории системы уравнений (43), не прибегая к интегрированию уравнений движения. Действительно, каждый закон сохранения определяет двумерную поверхность в трехмерном пространстве (l, D, θ) . Пересечение этих поверхностей в свою очередь определяет кривые в пространстве (l, D, θ) , которые и являются траекториями системы уравнений (43). Ясно, что качественный вид траекторий зависит от вида поверхностей, определяемых уравнениями (44), (46). Поэтому начнем с обсуждения поверхности (46). Ее вид зависит от значений и знаков постоянных $a\Gamma$ и b (см., например, монографию [28]). Априори допустимы следующие соотношения между ними.

1. $b > 0$, $a\Gamma > 0$. Поверхность, соответствующая этому случаю, совпадает с цилиндром, ось которого направлена вдоль оси θ . Сечение $\theta = \text{const}$ представляет

собой эллипс. Разумеется, из-за положительной определенности l и D физический смысл имеет только та часть этой поверхности, где $l \geq 0$ и $D \geq 0$. Запишем уравнения, определяющие эту поверхность в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{b} \cos s, \\ l &= \sqrt{\frac{b}{2a\Gamma}} \sin s. \end{aligned}$$

Физически обоснованные значения параметра — $0 \leq s \leq \pi/2$. Определим теперь линию пересечения этой поверхности с поверхностью инварианта (44) и получим точный параметрический вид траектории в этой области параметров:

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{b} \cos s, \\ l &= \sqrt{\frac{b}{2a\Gamma}} \sin s, \\ \cos \theta &= \sqrt{\frac{a}{2\Gamma}} \operatorname{tg} s. \end{aligned}$$

Разумеется, параметр s меняется в области, которая определяется неравенствами $0 \leq \sqrt{a/(2\Gamma)} \operatorname{tg} s \leq 1$. Из параметрического вида траектории ясно, что возможные значения l и D вдоль траектории ограничены сверху: $l < \sqrt{b/(2\Gamma a)}$ и $D < \sqrt{b}$. Так же просто решается вопрос о законе движения вдоль траектории. Это эквивалентно выяснению характера изменения параметра s со временем. Для этого подставим параметрический вид траектории в уравнение движения и получим уравнение, определяющее зависимость параметра s от времени:

$$\frac{d \sin s}{dt} = \frac{(2a\Gamma)^{3/2}}{b} \frac{1}{\sin^2 s} \left(1 - \left(1 + \frac{a}{2\Gamma} \right) \sin^2 s \right)^{1/2}. \quad (47)$$

2. $b > 0$, $a\Gamma < 0$. Сечение $\theta = \text{const}$ двумерной поверхности (46) совпадает с гиперболой. Аналитическое описание этой поверхности осуществляется уравнениями

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{b} \operatorname{ch} s, \\ l &= \sqrt{\frac{b}{2|a\Gamma|}} \operatorname{sh} s, \end{aligned}$$

а параметрический вид траектории — уравнениями

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{b} \operatorname{ch} s, \\ l &= \sqrt{\frac{b}{2|a\Gamma|}} \operatorname{sh} s, \\ \cos \theta &= \sqrt{\frac{|a|}{2|\Gamma|}} \operatorname{th} s; \end{aligned}$$

область изменения параметра s в этом случае определяется условиями

$$0 \leq \sqrt{\frac{a}{2|\Gamma|}} \operatorname{th} s \leq 1.$$

Значения l и D на траектории ограничены снизу: $l > 0$ и $D > \sqrt{b/(2|a\Gamma|)}$ и, следовательно, возможен режим разбегания точечного вихря и вихревого диполя. В этой области параметров уравнение, определяющее зависимость s от времени, имеет вид

$$\frac{d \operatorname{sh} s}{dt} = \frac{(2|a\Gamma|)^{3/2}}{b} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 s} \left(1 + \left(1 - \frac{|a|}{2|\Gamma|} \right) \operatorname{sh}^2 s \right)^{1/2}. \quad (48)$$

Следующая область $b < 0$, $a\Gamma > 0$ не определяет никакой поверхности.

3. $b < 0$, $a\Gamma < 0$. Эта область эквивалентна области $b > 0$ и $a\Gamma < 0$ с точностью до переобозначений $D \rightarrow \sqrt{2|a\Gamma|}l$ и $l \rightarrow D/\sqrt{2|a\Gamma|}$. Параметрический вид поверхности определяется уравнениями

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{|b|} \operatorname{sh} s, \\ l &= \sqrt{\frac{|b|}{2|a\Gamma|}} \operatorname{ch} s, \end{aligned}$$

а для описания траектории следует добавить уравнение

$$\cos \theta = \operatorname{sign} a \sqrt{\frac{|a|}{2|\Gamma|}} \operatorname{cth} s.$$

Область изменения параметра s снова ограничена неравенством

$$0 < \operatorname{sign} a \sqrt{\frac{|a|}{2|\Gamma|}} \operatorname{cth} s < 1.$$

В этом случае невозможно сближение точечного вихря и точечного дипольного вихря, минимальное расстояние между ними ограничено неравенством $l > \sqrt{|b|/(2|a\Gamma|)}$. Естественно, подставляя такие зависимости в систему уравнений (43), мы получим уравнение для зависимости s от времени вида

$$\operatorname{ch}^2 s \frac{d \operatorname{ch} s}{dt} = \frac{(2|a\Gamma|)^{3/2}}{|b|} \left(\left(1 - \frac{|a|}{2|\Gamma|} \right) \operatorname{cth}^2 s - 1 \right). \quad (49)$$

4. $b = 0$, $a\Gamma < 0$. Это вырожденный случай, соответствующий двум пересекающимся плоскостям, из которых реализуется плоскость

$$D = \sqrt{2a\Gamma|}l,$$

и траектория соответственно определяется уравнениями

$$\begin{aligned} l &= s, \\ D &= \sqrt{2a\Gamma|} s, \\ \cos \theta &= \frac{a}{\sqrt{2a\Gamma|}}. \end{aligned}$$

Рис. 1. На плоскости (l, θ) показаны области знакопостоянства параметров b и a ; а – при $\Gamma > 0$, б – для $\Gamma < 0$. Область параметров $b > 0$ и $a\Gamma > 0$ обозначена I. В области IIа $b > 0$, $a\Gamma < 0$ и $|a|/2|\Gamma| < 1$; в области IIб – $b > 0$, $a\Gamma < 0$ и $|a|/2|\Gamma| > 1$. Параметры в области III удовлетворяют неравенствам $b < 0$, $a\Gamma < 0$ и $|a|/2|\Gamma| < 1$. Граница между областями IIа и IIб соответствует $|a|/2|\Gamma| = 1$. Сплошная кривая, разделяющая области IIа и III, удовлетворяет условию $b = 0$.

Это означает сохранение угла θ в процессе эволюции. На рис. 1 показаны все области начальных условий, соответствующие различным типам поверхностей и соответственно траекторий. Нелинейные уравнения, определяющие зависимость s от времени, можно легко проинтегрировать в элементарных функциях. Ниже мы обсудим все эти режимы движения более детально.

5. РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ В ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРОВ $A\Gamma > 0$ И $B > 0$

В этой области параметров уравнение (47) удобно привести к простой форме, выполнив замену

$$y = \sqrt{\varepsilon} \sin s.$$

Здесь введено обозначение $\varepsilon = 1 + a/(2\Gamma) > 1$. Обратим внимание, что величина y с точностью до постоянного множителя совпадает с величиной l . Другими словами, $y = \sqrt{\varepsilon 2a\Gamma/b}l$. Теперь, выполняя приведенную выше замену в уравнении (47), получим

$$y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{(2\varepsilon a\Gamma)^{3/2}}{b} \sqrt{1 - y^2}. \quad (50)$$

Область допустимых значений величины y , как следует из этого уравнения, определяется неравенствами $-1 \leq y \leq 1$. Прежде чем интегрировать уравнение (50), обсудим качественную зависимость y от времени. Легко заметить, что граничные значения $y = \pm 1$ соответствуют неподвижным точкам. Для анализа их типов изучим поведение решений в их окрестности. Начнем с точки $y_* = 1$. Будем искать

Рис. 2. На отрезке $[-1, 1]$ оси y показано векторное поле, соответствующее уравнению (50). Вне этого отрезка векторное поле не определено. На концах отрезка расположены неподвижные точки: устойчивая справа и неустойчивая слева.

решение в виде $y = 1 - \Delta y$, предполагая отклонение от неподвижной точки малым: $\Delta y \ll 1$. Тогда, сохраняя главный порядок по отклонению Δy , получим уравнение для Δy :

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta y}} \frac{d\Delta y}{dt} = -2 \frac{(2a\Gamma)^{3/2}}{b}.$$

Решение этого уравнения

$$\frac{1}{2} \sqrt{\Delta y} = -2 \frac{(2a\Gamma)^{3/2}}{b} t + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta y_0}$$

показывает, что эта неподвижная точка вырождена и ее можно назвать устойчивым полуузлом (см. рис. 2). Слово полуузел означает, что векторное поле (или правая часть уравнения (50)) не определено при $y > 1$. Аналогично можно изучить поведение $y = -1 + \Delta y$ в окрестности неподвижной точки $y_* = -1$. Уравнение для малых отклонений от нее имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta y}} \frac{d\Delta y}{dt} = 2 \frac{(2a\Gamma)^{3/2}}{b},$$

и решение

$$\frac{1}{2} \sqrt{\Delta y} = 2 \frac{(2a\Gamma)^{3/2}}{b} t + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta y_0}$$

указывает, что эта точка также вырождена и ее можно отнести к неустойчивому полуузлу (см. рис. 2). Таким образом, из общих соображений можно сказать, что в этом режиме со временем любое решение попадает в неподвижную точку $y_* = 1$ и эволюция прекращается. Другими словами, в результате взаимодействия возникает универсальное стационарное состояние.

Возвращаясь к уравнению (50), отметим, что оно интегрируется в элементарных функциях (см., например, книгу [29]). Так, легко получить его решение в неявном виде:

$$\arcsin y - y\sqrt{1-y^2} = \frac{2(2\varepsilon a\Gamma)^{3/2}}{b} t + C_0. \quad (51)$$

Его вид приведен на рис. 3. Нетрудно видеть, что поведение точного решения полностью соответствует качественным соображениям, приведенным выше. Интересной особенностью этого решения является конечность времени релаксации T в неподвижную точку. Из решения (51) это время легко получить:

$$T = \frac{b}{2(2\varepsilon a\Gamma)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y_0 + y_0 \sqrt{1-y_0^2} \right). \quad (52)$$

Рис. 3. Изменение решения y со временем. После конечного времени релаксации T устанавливается постоянный режим $y = 1$. Физический смысл имеет только область $y > 0$.

Начальное условие y_0 определяется начальными значениями l_0 , D_0 и θ_0 . Напомним, что хотя уравнение (50) определено в области $-1 \leq y \leq 1$, но физически допустима более узкая область $0 < y \leq 1$ из-за положительной определенности $l > 0$ и $D > 0$. Поэтому, если начальное условие $y_0 \approx +0$, то время релаксации максимально и равно

$$T = \frac{\pi b}{4(2\varepsilon a\Gamma)^{3/2}}. \quad (53)$$

Таким образом, в этом режиме (область параметров $a\Gamma > 0$ и $b > 0$) в результате взаимодействия точечного вихря и диполя через конечное время релаксации устанавливается стационарное состояние, при котором

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{b} \cos s_*, \\ l &= \sqrt{\frac{b}{2a\Gamma}} \sin s_*, \\ \cos \theta &= \sqrt{\frac{a}{2\Gamma}} \operatorname{tg} s_*, \end{aligned}$$

где s_* определяется уравнением

$$\sin s_* = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (54)$$

Другими словами, через конечное время (52) величина дипольного момента, расстояние между вихрем и диполем и угол между направлением дипольного момента и вектором, соединяющим вихрь с диполем, строго определены и зависят только от значения инварианта a и мощности вихря Γ . Значение второго инварианта b определяет только величину времени релаксации в это состояние. Область исходных параметров, при которых реализуется этот режим, показана на рис. 1.

6. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ПРИ $a\Gamma < 0$ И $B > 0$

Перейдем к изучению второго режима. Этот режим более разнообразный. Так, в рамках общих неравенств $a\Gamma < 0$ и $b > 0$ следует различать три подобласти с качественно различным поведением решений (см. рис.1). Первая подобласть Па ограничена условием

$$1 - \frac{|a|}{2|\Gamma|} > 0, \quad (55)$$

вторая Пб – наоборот:

$$1 - \frac{|a|}{2|\Gamma|} < 0. \quad (56)$$

Есть еще, наконец, граница раздела между ними, соответствующая наиболее простому случаю

$$1 - \frac{|a|}{2|\Gamma|} = 0. \quad (57)$$

Начнем со значений параметров, соответствующих неравенству (55). В этом случае также удобно выполнить замену переменных

$$y = \sqrt{\frac{2\lambda|a\Gamma|}{b}} l = \sqrt{\lambda} \operatorname{sh} s,$$

где $\lambda = 1 - |a|/(2|\Gamma|)$. В этих переменных уравнение (48) принимает вид

$$y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{(2\lambda|a\Gamma|)^{3/2}}{b} \sqrt{1 + y^2}. \quad (58)$$

Легко заметить, что допустимые значения переменной y ограничены только положительностью значений $D > 0$ и $l > 0$. Это приводит к условию $y > 0$. Также у этого уравнения отсутствуют неподвижные точки. Легко получить точное решение в элементарных функциях (см., например, книгу [29]):

$$y\sqrt{1 + y^2} - \operatorname{arcsch} y = 2 \frac{(2\lambda|a\Gamma|)^{3/2}}{b} t + C_0. \quad (59)$$

Характерное поведение этого решения приведено на рис. 4. Используя полученное решение, легко доказать, что при таких значениях параметров на больших временах величина s монотонно растет:

$$s(t) \simeq \ln \left(2\lambda \sqrt{\frac{(2|a\Gamma|)^{3/2}}{b}} t \right).$$

Естественно, это означает монотонное увеличение расстояния между вихрем и диполем, а также дипольного момента. При этом угол между направлением дипольного момента и вектором, соединяющим вихрь и диполь, стремится к универсальному значению $\theta = \sqrt{|a|/(2|\Gamma|)}$.

Рис. 4. График решения (59).

Перейдем теперь к анализу поведения системы в области параметров, соответствующих условию (56). Выполняя в уравнении (48) замену

$$y = \sqrt{\frac{2\mu|a\Gamma|}{b}} l = \sqrt{\mu} \operatorname{sh} s,$$

где $\mu = |a|/(2|\Gamma|) - 1$, получим уравнение

$$y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{(2\mu|a\Gamma|)^{3/2}}{b} \sqrt{1-y^2}. \quad (60)$$

Вид этого уравнения совпадает с ранее проинтегрированным уравнением (50), поэтому решение легко привести:

$$\arcsin y - y\sqrt{1-y^2} = 2 \frac{(2\mu|a\Gamma|)^{3/2}}{b} t + C_0. \quad (61)$$

Здесь C_0 – постоянная интегрирования, определяемая начальным условием. Различие между этими двумя случаями состоит в виде замены переменных. Естественно, область допустимых значений $y > 0$. Правая часть уравнения (60) обращается в нуль в неподвижной точке $y = 1$, которая согласно проведенному ранее анализу является устойчивым полуузлом (см. рис. 2). Поведение решения показано на рис. 3.

Естественно, оценка конечного времени релаксации T в состояние $y = 1$ получается совершенно аналогично:

$$T = \frac{b}{(2\mu|a\Gamma|)^{2(3/2)}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y_0 + y_0 \sqrt{1-y_0^2} \right),$$

где $y_0 = y(t)|_{t=0}$ – начальное условие. Таким образом, при этих условиях после конечного времени релаксации устанавливается универсальное состояние

$$D = \sqrt{b} \operatorname{ch} s_*,$$

$$l = \sqrt{\frac{b}{2\mu|a\Gamma|}},$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{|a|}{2|\Gamma|}} \operatorname{th} s_*.$$

Здесь значение s_* определяется из уравнения

$$\operatorname{sh} s_* = \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

После достижения этого состояния эволюция прекращается.

Осталось изучить простой случай $1 - |a|/(2|\Gamma|) = 0$. При таких значениях параметров уравнение (48) существенно упрощается и принимает вид

$$\frac{d \operatorname{sh} s}{dt} = \frac{(2|\Gamma a|)^{3/2}}{b} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 s}. \quad (62)$$

Решение этого уравнения легко найти:

$$\operatorname{sh}^3 s = 3 \frac{(2|\Gamma a|)^{3/2}}{b} t + \operatorname{sh}^3 s_0.$$

Таким образом, в этом случае реализуется частное решение (37), рассмотренное ранее. Тем самым исчерпаны все режимы поведения взаимодействующих точечного вихря и точечного диполя в области параметров, обозначенной как Па и Пб на рис. 1.

7. РЕЖИМ $A\Gamma < 0$ И $B = 0$

Рассмотрим теперь более редкий режим эволюции системы точечный вихрь–диполь. Параметры, при которых он реализуется, лежат на двумерном многообразии и не занимают трехмерную область в пространстве (l, D, θ) . При этих значениях параметров инвариант (34) приводит к связи между расстоянием и величиной дипольного момента вида

$$D = \pm \sqrt{2|a\Gamma|} l.$$

Знак “–” физически запрещен положительности l и D . Подстановка этой связи в систему уравнений (43) приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{2|a\Gamma|} \frac{\sin \theta}{l},$$

$$\frac{dl}{dt} = -2\Gamma \frac{\sin \theta}{l} \cos \theta,$$

$$\frac{d \cos \theta}{dt} = 0.$$

Рис. 5. Характерная эволюция l во времени.

Последнее уравнение означает сохранение угла θ со временем. Условие совместности первых двух уравнений легко записать:

$$\sqrt{2|a\Gamma|} = -2\Gamma \cos \theta;$$

вторая возможность — $\theta = 0, \pi$. В этом случае отсутствует эволюция во времени, и величины l , D и угол $\theta = 0, \pi$ сохраняются. Таким образом, при таком расположении точечного вихря и точечного диполя их положение сохраняется во времени. Вернемся теперь к первому случаю условий совместности. Это условие выполняется в определенной области параметров, а именно при

$$\sqrt{\frac{|a|}{2|\Gamma|}} \leq 1,$$

и величина сохраняющегося угла θ находится из уравнения

$$\cos \theta = -\operatorname{sign} \Gamma \sqrt{\frac{|a|}{2|\Gamma|}}.$$

После этого остается решить уравнение, определяющее изменение расстояния между вихрем и диполем:

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{2|a\Gamma|} \frac{1}{l} \sqrt{1 - \frac{|a|}{2|\Gamma|}}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$l^2 = t\sqrt{2|a\Gamma|} \sqrt{1 - \frac{|a|}{2|\Gamma|}} + l_0^2,$$

и соответственно величина дипольного момента $D = \sqrt{2|a\Gamma|}l$ (см. рис. 5).

Рис. 6. Начальное условие для $y(t)$ в этом режиме должно удовлетворять неравенству $y_0 > 1$. После непродолжительной стадии переходного режима видно монотонное нарастание $y(t)$.

Таким образом, в области параметров $a\Gamma < 0$ и $b = 0$ и $\sqrt{|a|/(2|\Gamma|)} \leq 1$ при определенном значении угла θ расстояние между точечным диполем и вихрем, а также величина дипольного момента возрастают со временем корневым образом.

8. РЕЖИМ $A\Gamma < 0$ И $B < 0$

Для изучения этого режима в уравнении (48) удобно перейти к новой переменной:

$$y = \sqrt{1 - \frac{|a|}{2|\Gamma|}} \operatorname{ch} s \equiv \sqrt{\chi} \operatorname{ch} s,$$

которая, как и в предыдущих случаях, пропорциональна расстоянию между точечным вихрем и точечным диполем. Разумеется, уже из вида уравнения (48) следует, что физически допустимая область параметров ограничивается неравенством

$$1 - \frac{|a|}{2|\Gamma|} > 0.$$

После перехода к переменной y уравнение (48) принимает вид

$$y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{(2\chi|\Gamma a|)^{3/2}}{b} \sqrt{y^2 - 1}, \quad (63)$$

и решение этого уравнения находится в элементарных функциях:

$$y\sqrt{y^2 - 1} + \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = 2 \frac{(2\chi|\Gamma a|)^{3/2}}{b} t + C_0. \quad (64)$$

Здесь C_0 – постоянная интегрирования – определяется начальным условием. Поведение $y(t)$ показано на рис. 6. Допустимая область начальных условий y_0 и текущих

значений $y(t) - y_0 > 1$ и $y > 1$. Асимптотический рост $y(t)$ на больших временах легко оценить:

$$y^2 \approx 2 \frac{(2\chi|\Gamma a|)^{3/2}}{b} t,$$

т.е. увеличение расстояния между вихрем и диполем будет происходить по корневому закону.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, задача об эволюции взаимодействующих точечного и дипольного вихрей интегрируется в элементарных функциях, а не только в квадратурах. В результате взаимодействия возникают только три типа асимптотических движений. Это состояние покоя при специальном относительном положении точечного вихря и вихревого диполя ($a\Gamma < 0$, $b < 0$ и $\theta = 0, \pi$). Фактически это означает отсутствие взаимодействия при таком расположении. Более общим является режим отталкивания с неограниченным ростом относительного расстояния между вихрями. Он реализуется в областях ($a\Gamma < 0$, $b > 0$, $|a|/(2|\Gamma|) \leq 1$), ($a\Gamma < 0$, $b = 0$) и ($a\Gamma < 0$, $b < 0$, $|a|/(2|\Gamma|) \leq 1$). Третий режим соответствует выходу за конечное время релаксации в универсальный стационарный режим, в котором сохраняются расстояние, величина дипольного момента и угол θ . Такие режимы возникают в областях начальных условий ($a\Gamma > 0$, $b > 0$) и ($a\Gamma < 0$, $b > 0$, $|a|/(2|\Gamma|) > 1$). Найденные решения определяют новый класс нестационарных течений двумерной идеальной гидродинамики. Функция тока этих течений восстанавливается согласно уравнению (6) по известным решениям, приведенным выше.

Список литературы

- [1] Г. Ламб, *Гидродинамика*, Гостехиздат, М.–Л., 1947.
- [2] H. M. Glaz, "Two attempts at modeling two-dimensional turbulence", *Turbulence Seminar, Lecture Notes in Math.*, **615**, eds. P. Bernard, T. Ratiu, Springer, Berlin, 1977, 135–155.
- [3] W. Gröbli, *Z. Naturforsch. A*, **22** (1877), 37–82, 129–168.
- [4] Е. А. Новиков, *ЖЭТФ*, **68**:5 (1975), 1868–1882.
- [5] Г. Кирхгоф, *Механика*, Лекции по математической физике, АН СССР, М., 1962.
- [6] P. G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge Monogr. Mech. Appl. Math., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [7] Е. А. Новиков, Ю. Б. Седов, *ЖЭТФ*, **75**:3 (1978), 868–876.
- [8] С. Л. Зиглин, *ДАН СССР*, **250**:6 (1979), 1296–1300.
- [9] H. Aref, *J. Fluid Mech.*, **143** (1984), 1–21.
- [10] P. K. Newton, *The N-Vortex Problem. Analytical Techniques*, Appl. Math. Sci., **145**, Springer, New York, 2001.
- [11] Y. Kimura, *J. Phys. Soc. Japan*, **57**:5 (1988), 1641–1649.
- [12] W. D. McComb, *The Physics of Fluid Turbulence*, Oxford Eng. Sci. Ser., **5**, Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [13] H. Aref, "Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows", *Annual Review of Fluid Mechanics*, V. 15, eds. Milton Van Dyke, J. V. Wehausen, John L. Lumley, Annual Rev., Palo Alto, Calif., 1983, 345–389.
- [14] R. H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.*, **67** (1975), 155–175.
- [15] Y. B. Pointin, T. S. Lundgren, *Phys. Fluids*, **19**:10 (1976), 1459–1470.

- [16] K. S. Fine, A. C. Cass, W. G. Flynn, C. F. Dryscoll, *Phys. Rev. Lett.*, **75**:18 (1995), 3277–3280.
- [17] L. Onsager, *Nuovo Cimento* (9), **6**, Suppl. no. 2 (1949), 279–287.
- [18] Е. А. Новиков, *ЖЭТФ*, **68**:5 (1975), 1868–1882.
- [19] V. V. Yanovsky, A. V. Tur, P. Louarn, D. Le Queau, *Physics Plasmas*, **8**:9 (2001), 4255–4258.
- [20] D. Crowdy, *Phys. Fluid*, **11**:9 (1999), 2556–2564.
- [21] A. V. Tur, V. V. Yanovsky, *Phys. Fluids*, **16**:8 (2004), 2877–2885.
- [22] V. V. Yanovsky, A. V. Tur, K. N. Kulik, *Phys. Lett. A*, **373**:29 (2009), 2484–2487.
- [23] V. V. Meleshko, M. Yu. Konstantinov, *Vortex Dynamics and Chaotic Phenomena*, World Sci., Singapore, 1999.
- [24] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматгиз, М., 1959.
- [25] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979.
- [26] Ф. Дж. Сэффмэн, *Динамика вихрей*, Научный мир, М., 2000.
- [27] J. Tavantzis and Lu Ting, *Phys. Fluids*, **31**:6 (1988), 1392–1409.
- [28] М. И. Постников, *Аналитическая геометрия*, Наука, М., 1979.
- [29] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, Наука, М., 1981.

Поступила в редакцию 13.07.2009