Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Эволюционные системы со связями в виде условий нулевой дивергенции, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 1, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 14:46:54

© 2010 г.

В. В. Жаринов*

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СО СВЯЗЯМИ В ВИДЕ УСЛОВИЙ НУЛЕВОЙ ДИВЕРГЕНЦИИ

Изучаются эволюционные системы уравнений в частных производных при наличии согласованных связей в виде системы уравнений неразрывности. Показано, что всякая такая система наряду с возможными законами сохранения стандартной степени, равной числу пространственных переменных, обладает и законами сохранения низшей степени, на единицу меньшей числа пространственных переменных. Предварительно дано полное описание законов сохранения и симметрий системы уравнений неразрывности. В качестве примера вычислены законы сохранения второй степени классической системы уравнений Максвелла (здесь число пространственных переменных равно трем).

Ключевые слова: эволюционные системы, связи, уравнения неразрывности, законы сохранения, законы сохранения низшей степени.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что эволюционные системы вида

$$\partial_t u = F(t, x, u, u_x, u_{xx}, \dots), \quad (1.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^m$ – пространственные переменные, $u \in \mathbb{R}^N$ – зависимые переменные, u_x – все частные производные первого порядка по x , u_{xx} – все частные производные второго порядка по x и т. д., могут обладать законами сохранения лишь степени m (при их записи в виде дифференциальных форм, замкнутых на решениях). В предлагаемой работе изучаются эволюционные системы вида (1.1) при наличии согласованных связей в виде системы уравнений неразрывности

$$\sum_{1 \leq \mu \leq m} \partial_{x^\mu} u^{\sigma\mu} = 0, \quad 1 \leq \sigma \leq s. \quad (1.2)$$

Здесь $N = sm$; зависимые переменные $u \in \mathbb{R}^{sm}$ маркируются двойным индексом $\sigma\mu$. Показано, что в этом случае объединенная система (1.1), (1.2) всегда обладает законами сохранения низшей степени $m - 1$, причем базисные законы сохранения

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zharinov@mi.ras.ru

выписаны в явном виде. Предварительно проведен алгебро-геометрический анализ системы (1.2) и получено полное описание ее законов сохранения и симметрий. В качестве примера в явном виде вычислены законы сохранения низшей степени классической системы уравнений Максвелла.

2. АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ НЕРАЗРЫВНОСТИ

2.1. Обозначения. Будем использовать следующие обозначения:

- $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ – множество всех неотрицательных целых чисел;
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – множество всех натуральных чисел;
- $x = (x^\mu \mid 1 \leq \mu \leq m) \in \mathbb{R}^m$ – независимые переменные;
- $u = (u^{\sigma\mu} \mid 1 \leq \sigma \leq s, 1 \leq \mu \leq m) \in \mathbb{R}^{sm}$ – зависимые переменные;
- $i = (i^\mu \mid 1 \leq \mu \leq m) \in \mathbb{Z}_+^m$ – мультииндексы;
- $|i| = i^1 + \dots + i^m$, $i + j = (i^\mu + j^\mu)$, $(\nu) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ – единица стоит на ν -м месте, в частности, $i + (\nu) = (i^1, \dots, i^\nu + 1, \dots, i^m)$;
- $\mathbf{u} = (u_i^{\sigma\mu} \mid 1 \leq \sigma \leq s, 1 \leq \mu \leq m, i \in \mathbb{Z}_+^m) \in \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^m}^{sm}$ – дифференциальные переменные, $u^{\sigma\mu} = u_0^{\sigma\mu}$;
- $\mathfrak{A} = C_{\text{fin}}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^m}^{sm})$ – алгебра дифференциальных функций, т. е. всех вещественных гладких (класса C^∞) функций $f = f(x, \mathbf{u})$ конечного порядка, т. е. зависящих лишь от конечного числа аргументов;
- $\partial_{x^\mu}, \partial_{u^{\sigma\mu}}, \partial_{u_i^{\sigma\mu}}, \dots$ – частные производные по $x^\mu, u^{\sigma\mu}, u_i^{\sigma\mu}, \dots$;
- $D_\mu = \partial_{x^\mu} + \sum_{\sigma, \nu, i} u_{i+(\mu)}^{\sigma\nu} \partial_{u_i^{\sigma\nu}}$, $1 \leq \mu \leq m$, – полные частные производные.

2.2. Уравнения неразрывности. Первый этап изучения эволюции с нулевой дивергенцией есть алгебро-геометрический анализ уравнений связи, в нашем случае – уравнений неразрывности

$$\sum_{1 \leq \mu \leq m} \partial_{x^\mu} u^{\sigma\mu} = 0, \quad 1 \leq \sigma \leq s. \quad (2.1)$$

2.3. Уравнения неразрывности как эволюционная система. Положим $u_i^{\sigma\mu} = \partial_{x^i} u^{\sigma\mu}$, где $\partial_{x^i} = \partial_{x^1}^{i^1} \dots \partial_{x^m}^{i^m}$. Тогда система (2.1) плюс все ее дифференциальные продолжения запишутся в виде

$$\sum_{1 \leq \mu \leq m} u_{i+(\mu)}^{\sigma\mu} = 0, \quad 1 \leq \sigma \leq s, \quad i \in \mathbb{Z}_+^m. \quad (2.2)$$

Согласно стандартным правилам алгебро-геометрического анализа дифференциальных уравнений (см., например, работы [1]–[6]) бесконечная система уравнений (2.2) определяет гладкую поверхность

$$\mathcal{X} = \left\{ (x, \mathbf{u}) \mid \sum_{1 \leq \mu \leq m} u_{i+(\mu)}^{\sigma\mu} = 0, 1 \leq \sigma \leq s, i \in \mathbb{Z}_+^m \right\} \quad (2.3)$$

в пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^m}^{sm}$ с базисными картановыми дифференцированиями $\partial_\mu = D_\mu|_{\mathcal{X}}$, $1 \leq \mu \leq m$. Глобальные координаты на поверхности $\mathcal{X}$ суть независимые

переменные $x = (x^\mu \mid 1 \leq \mu \leq m) \in \mathbb{R}^m$ и свободные дифференциальные переменные $(u_l^\sigma, u_{\kappa l}^{\sigma\alpha}) \in \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^{m-1}}^s \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^{m-1}}^{s(m-1)}$, где $1 \leq \sigma \leq s$, $2 \leq \alpha \leq m$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, индексы $l = (l^\alpha \mid 2 \leq \alpha \leq m) \in \mathbb{Z}_+^{m-1}$, $i = \kappa l \in \mathbb{Z}_+^m$, $u_l^\sigma = u_{0l}^{\sigma 1}$. Остальные дифференциальные переменные находятся из системы уравнений (2.2):

$$u_{\kappa l}^{\sigma 1} = - \sum_{2 \leq \alpha \leq m} u_{\kappa-1, l+(\alpha)}^{\sigma\alpha}, \quad 1 \leq \sigma \leq s, \quad \kappa \in \mathbb{N}, \quad l \in \mathbb{Z}_+^{m-1}. \quad (2.4)$$

Алгебра дифференциальных функций на поверхности $\mathcal{X}$ есть алгебра $\mathcal{A} = C_{\text{fin}}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^{m-1}}^s \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^{m-1}}^{s(m-1)})$ всех вещественных гладких функций конечного порядка на пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^{m-1}}^s \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^{m-1}}^{s(m-1)}$, базисные картановы дифференцирования записываются в виде

$$\partial_1 = \partial_{x^1} + \sum_{\sigma, l} U_{1l}^{\sigma 1} \partial_{u_l^\sigma} + \sum_{\sigma, \beta, \kappa l} u_{\kappa+1, l}^{\sigma\beta} \partial_{u_{\kappa l}^{\sigma\beta}}, \quad U_{1l}^{\sigma 1} = - \sum_{2 \leq \beta \leq m} u_{0, l+(\beta)}^{\sigma\beta}, \quad (2.5)$$

$$\partial_\alpha = \partial_{x^\alpha} + \sum_{\sigma, l} u_{l+(\alpha)}^{\sigma 1} \partial_{u_l^\sigma} + \sum_{\sigma, \beta, \kappa l} u_{\kappa, l+(\alpha)}^{\sigma\beta} \partial_{u_{\kappa l}^{\sigma\beta}}, \quad 2 \leq \alpha \leq m. \quad (2.6)$$

Заметим, что $u_l^\sigma = \partial_l u^\sigma$, $u_{\kappa l}^{\sigma\alpha} = \partial_l u_{\kappa}^{\sigma\alpha}$, $1 \leq \sigma \leq s$, $2 \leq \alpha \leq m$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, где $l = (l^2, \dots, l^m) \in \mathbb{Z}_+^{m-1}$, $\partial_l = \partial_2^{l^2} \dots \partial_m^{l^m}$, $u^\sigma = u_{00}^{\sigma 1}$, $u_{\kappa}^{\sigma\alpha} = u_{\kappa 0}^{\sigma\alpha}$. Согласно правилам алгебро-геометрического анализа пара $\mathcal{X}$, $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_m)$ описывает эволюционную систему

$$\partial_{x^1} u^\sigma = f^\sigma = U_{10}^{\sigma 1} = - \sum_{2 \leq \beta \leq m} u_{0(\beta)}^{\sigma\beta}, \quad 1 \leq \sigma \leq s, \quad (2.7)$$

$$\partial_{x^1} u_{\kappa}^{\sigma\alpha} = f_{\kappa}^{\sigma\alpha} = u_{\kappa+1}^{\sigma\alpha}, \quad 2 \leq \alpha \leq m, \quad \kappa \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.8)$$

где $x^1 \in \mathbb{R}$ – эволюционная переменная (“время”), $(x^\alpha) \in \mathbb{R}^{m-1}$ – пространственные переменные, $(u^\sigma, u_{\kappa}^{\sigma\alpha}) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+}^{s(m-1)}$ – зависимые переменные, $(u_l^\sigma, u_{\kappa l}^{\sigma\alpha}) \in \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^{m-1}}^s \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^{m-1}}^{s(m-1)}$ – дифференциальные переменные и дифференцирования ∂_μ (см. (2.5), (2.6)) суть частные производные в силу системы (2.7), (2.8), $1 \leq \mu \leq m$.

Таким образом, система уравнений неразрывности (2.1) эквивалентна эволюционной системе (2.7), (2.8), и мы будем их отождествлять.

Удобство эволюционных систем в том, что для них имеется полное описание законов сохранения и симметрий (см., например, работы [2], [3], [6]). Ниже мы пользуемся техникой, развитой в работах [5], [7], [8].

2.4. Линейные операторы в полных производных. Введем $\mathcal{A}$ -модуль $\mathcal{E} = \mathcal{A}^s \times \mathcal{A}_{\mathbb{Z}_+}^{s(m-1)}$ с элементами $\phi = (\phi^\sigma, \phi_{\kappa}^{\sigma\alpha})$ и дуальный $\mathcal{A}$ -модуль $\mathcal{E}^* = \mathcal{A}_s \times (\mathcal{A}_{s(m-1)}^{\mathbb{Z}_+})_{\text{fin}}$ с элементами $\chi = (\chi_\sigma, \chi_{\sigma\alpha}^\kappa)$, где лишь конечное число компонент $\chi_{\sigma\alpha}^\kappa$ ненулевые. Элемент $f = (f^\sigma, f_{\kappa}^{\sigma\alpha}) \in \mathcal{E}$ с компонентами, задающими эволюционную систему (2.7), (2.8), порождает линейный оператор (универсальную линейаризацию)

$$f_* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \phi = (\phi^\sigma, \phi_{\kappa}^{\sigma\alpha}) \mapsto f_*(\phi) = (f_*(\phi)^\sigma, f_*(\phi)_{\kappa}^{\sigma\alpha}), \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} f_*(\phi)^\sigma &= \sum_{\sigma', l} \partial_{u_l^{\sigma'}}(f^\sigma) \partial_l \phi^{\sigma'} + \sum_{\sigma', \alpha', \kappa', l} \partial_{u_{\kappa' l}^{\sigma' \alpha'}}(f^\sigma) \partial_l \phi_{\kappa'}^{\sigma' \alpha'} = - \sum_{\alpha} \partial_{\alpha} \phi^{\sigma \alpha}, \\ f_*(\phi)_{\kappa}^{\sigma \alpha} &= \sum_{\sigma', l} \partial_{u_l^{\sigma'}}(f_{\kappa}^{\sigma \alpha}) \partial_l \phi^{\sigma'} + \sum_{\sigma', \alpha', \kappa', l} \partial_{u_{\kappa' l}^{\sigma' \alpha'}}(f_{\kappa}^{\sigma \alpha}) \partial_l \phi_{\kappa'}^{\sigma' \alpha'} = \phi_{\kappa+1}^{\sigma \alpha}; \end{aligned}$$

напомним, что $\phi^{\sigma \alpha} = \phi_0^{\sigma \alpha}$. Дуальный (*сопряженный по Лагранжу*) оператор имеет вид

$$f^*: \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E}^*, \quad \chi = (\chi_{\sigma}, \chi_{\sigma \alpha}^{\kappa}) \mapsto f^*(\chi) = (f^*(\chi)_{\sigma}, f^*(\chi)_{\sigma \alpha}^{\kappa}), \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} f^*(\chi)_{\sigma} &= \sum_{\sigma', l} (-1)^{|l|} \partial_l (\chi_{\sigma'} \partial_{u_l^{\sigma}} f^{\sigma'}) + \sum_{\sigma', \alpha', \kappa', l} (-1)^{|l|} \partial_l (\chi_{\sigma' \alpha'}^{\kappa'} \partial_{u_l^{\sigma}} f_{\kappa'}^{\sigma' \alpha'}) = 0, \\ f^*(\chi)_{\sigma \alpha}^{\kappa} &= \sum_{\sigma', l} (-1)^{|l|} \partial_l (\chi_{\sigma'} \partial_{u_{\kappa l}^{\sigma \alpha}} f^{\sigma'}) + \sum_{\sigma', \alpha', \kappa', l} (-1)^{|l|} \partial_l (\chi_{\sigma' \alpha'}^{\kappa'} \partial_{u_{\kappa l}^{\sigma \alpha}} f_{\kappa'}^{\sigma' \alpha'}) = \\ &= \begin{cases} \partial_{\alpha} \chi_{\sigma}, & \kappa = 0, \\ \chi_{\sigma \alpha}^{\kappa-1}, & \kappa \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $|l| = l^2 + \dots + l^m$.

2.5. Законы сохранения. Законы сохранения эволюционной системы полностью описываются своими *характеристиками* (см., например, работы [5], [7]). В нашем случае элемент $\chi \in \mathcal{E}^*$ является характеристикой закона сохранения системы (2.7), (2.8) тогда и только тогда, когда

$$\partial_1 \chi + f^*(\chi) = 0, \quad (2.11)$$

$$\chi_* - \chi^* = 0, \quad (2.12)$$

где оператор $\chi_*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^*$ — универсальная линейаризация элемента χ , а $\chi^*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^*$ — его дуальный. Операторное уравнение (2.12) по сути является системой уравнений для компонент χ_{σ} , $\chi_{\sigma \alpha}^{\kappa}$ элемента χ , называемой иногда *условиями Гельмгольца*. Уравнения (2.11) подробнее записываются как

$$\partial_1 \chi_{\sigma} = 0, \quad (2.13)$$

$$\partial_1 \chi_{\sigma \alpha}^0 + \partial_{\alpha} \chi_{\sigma} = 0, \quad (2.14)$$

$$\partial_1 \chi_{\sigma \alpha}^{\kappa} + \chi_{\sigma \alpha}^{\kappa-1} = 0, \quad (2.15)$$

где $1 \leq \sigma \leq s$, $2 \leq \alpha \leq m$, $\kappa \in \mathbb{N}$. По определению элемент χ содержит лишь конечное число ненулевых компонент. Отсюда легко выводится, что подсистема (2.15) имеет единственное тривиальное решение $\chi_{\sigma \alpha}^{\kappa} = 0$ для всех $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq \sigma \leq s$, $2 \leq \alpha \leq m$. Подсистема (2.14) тогда принимает вид

$$\partial_{\alpha} \chi_{\sigma} = 0, \quad 2 \leq \alpha \leq m, \quad 1 \leq \sigma \leq s,$$

откуда в силу конечности порядка функций из $\mathcal{A}$ следует, что компоненты $\chi_\sigma = \chi_\sigma(x^1)$ для всех $1 \leq \sigma \leq s$. Подсистема (2.13) теперь сводится к системе

$$\partial_{x^1} \chi_\sigma = 0, \quad 1 \leq \sigma \leq s,$$

с общим решением $\chi_\sigma = \text{const}$. В этом случае $\chi_* = \chi^* = 0$, так что условия Гельмгольца (2.12) тривиально выполняются. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Общее решение системы (2.11), (2.12) имеет вид*

$$\chi = \sum_{\sigma} a_{\sigma} \chi^{\sigma}, \quad a_{\sigma} \in \mathbb{R},$$

где базисные решения $\chi^{\sigma} = (e^{\sigma}, 0)$, $e^{\sigma} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (единица стоит на σ -м месте), $1 \leq \sigma \leq s$.

Напомним, что элемент $J = (j^{\mu} \mid 1 \leq \mu \leq m) \in \mathcal{A}^m$ называется *сохраняющимся током* системы (2.7), (2.8), если он удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\sum_{1 \leq \mu \leq m} \partial_{\mu} j^{\mu} = \text{Div } J = 0.$$

Уравнение неразрывности имеет очевидные решения (*тривиальные токи*) $J = \partial K = ((\partial K)^{\mu})$ с компонентами $(\partial K)^{\mu} = \sum_{\nu} \partial_{\nu} k^{\mu\nu}$ с произвольными $k^{\mu\nu} \in \mathcal{A}$, $k^{\nu\mu} + k^{\mu\nu} = 0$. Законы сохранения системы (2.7), (2.8) суть классы эквивалентности сохраняющихся токов по тривиальным токам. Согласно общей теории эволюционных систем (см., например, работы [5], [7]) линейное пространство законов сохранения системы (2.7), (2.8) изоморфно пространству их характеристик, т.е. решений системы (2.11), (2.12), где изоморфизм задается правилом

$$[J] = [(j^1, \dots, j^m)] \mapsto \chi = (\chi_{\sigma}, \chi_{\sigma\alpha}^{\kappa}), \quad \chi_{\sigma} = \frac{\delta j^1}{\delta u^{\sigma}}, \quad \chi_{\sigma\alpha}^{\kappa} = \frac{\delta j^1}{\delta u_{\kappa}^{\sigma\alpha}},$$

квадратные скобки означают класс эквивалентности. В частности, доказанная выше теорема имеет

СЛЕДСТВИЕ 1. *Общее решение уравнения неразрывности $\text{Div } J = 0$ для системы (2.7), (2.8) имеет вид*

$$J = \sum_{1 \leq \sigma \leq s} a_{\sigma} J^{\sigma} + \partial K,$$

где базисные токи $J^{\sigma} = (u^{\sigma\mu})$, а тривиальный ток $\partial K = (\sum_{\nu} \partial_{\nu} k^{\mu\nu})$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Линейное пространство $\text{CL}(\mathcal{X})$ законов сохранения системы (2.7), (2.8), а значит и исходных уравнений неразрывности (2.1), имеет представление*

$$\begin{aligned} \text{CL}(\mathcal{X}) &= \left\{ [J] = \sum_{1 \leq \sigma \leq s} a_{\sigma} [J^{\sigma}] \mid a_{\sigma} \in \mathbb{R} \right\} \simeq \\ &\simeq \left\{ J = \sum_{1 \leq \sigma \leq s} a_{\sigma} J^{\sigma} \mid a_{\sigma} \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}_s. \end{aligned}$$

2.6. Законы сохранения разных степеней. Для каждого $q \in \mathbb{Z}_+$ определен $\mathcal{A}$ -модуль

$$\Omega_{\mathbb{H}}^q(\mathcal{X}) = \left\{ \omega = \frac{1}{q!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_q \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_q} \cdot dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q} \right\}$$

горизонтальных q -форм на поверхности $\mathcal{X}$, где кососимметрические по индексам компоненты $\omega_{\mu_1 \dots \mu_q} \in \mathcal{A}$. Очевидно, что $\Omega_{\mathbb{H}}^q(\mathcal{X}) = 0$ при $q > m$. Будем также считать, что $\Omega_{\mathbb{H}}^q(\mathcal{X}) = 0$ при $q < 0$. Горизонтальные внешние дифференциалы запишем как

$$d_{\mathbb{H}} = d_{\mathbb{H}}^q: \Omega_{\mathbb{H}}^q(\mathcal{X}) \rightarrow \Omega_{\mathbb{H}}^{q+1}(\mathcal{X}), \quad \omega \rightarrow d_{\mathbb{H}}\omega,$$

где

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}\omega &= \frac{1}{(q+1)!} \sum_{1 \leq \mu_0, \dots, \mu_q \leq m} (d_{\mathbb{H}}\omega)_{\mu_0 \dots \mu_q} dx^{\mu_0} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q}, \\ (d_{\mathbb{H}}\omega)_{\mu_0 \dots \mu_q} &= \sum_{0 \leq r \leq q} (-1)^r \partial_{\mu_r} \omega_{\mu_0 \dots \widetilde{\mu_r} \dots \mu_q}, \end{aligned}$$

значок “ $\sim$ ” указывает, что эта переменная пропущена. Легко проверяется, что $d_{\mathbb{H}} \circ d_{\mathbb{H}} = 0$.

Линейное пространство *сохраняющихся токов q -й степени* системы (2.7), (2.8) –

$$\text{CC}^q(\mathcal{X}) = \text{Ker } d_{\mathbb{H}}^q = \{ \omega \in \Omega_{\mathbb{H}}^q(\mathcal{X}) \mid d_{\mathbb{H}}\omega = 0 \},$$

а линейное пространство *тривиальных токов q -й степени* системы (2.7), (2.8) есть

$$\text{TC}^q(\mathcal{X}) = \text{Im } d_{\mathbb{H}}^{q-1} = \{ \omega = d_{\mathbb{H}}\chi \mid \chi \in \Omega_{\mathbb{H}}^{q-1}(\mathcal{X}) \}.$$

Очевидно, что $\text{TC}^q(\mathcal{X}) \subset \text{CC}^q(\mathcal{X})$, так что определено фактор-пространство

$$\text{CL}^q(\mathcal{X}) = \text{CC}^q(\mathcal{X}) / \text{TC}^q(\mathcal{X}) = \text{Ker } d_{\mathbb{H}}^q / \text{Im } d_{\mathbb{H}}^{q-1} = H_{\mathbb{H}}^q(\mathcal{X})$$

– линейное пространство *законов сохранения q -й степени* системы (2.7), (2.8).

Как у всякой эволюционной системы (см., например, работы [5], [9], [10]), у системы (2.7), (2.8):

- $\text{CL}^0(\mathcal{X}) = \mathbb{R}$;
- $\text{CL}^q(\mathcal{X}) = 0$ при $0 < q < m - 1$;
- $\text{CL}^{m-1}(\mathcal{X}) = \text{CL}(\mathcal{X})$ – пространство обычных законов сохранения, вычисленное выше (см. следствие 2); соответствие между определениями этого и предыдущего пунктов дается правилами

$$J = (j^\mu) \mapsto \omega = \sum_{\mu} j^\mu d_{\mu}x, \quad d_{\mu}x = (-1)^{\mu-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widetilde{dx^{\mu}} \wedge \dots \wedge dx^m;$$

$$K = (k^{\mu\nu}) \mapsto \chi = \sum_{\mu < \nu} k^{\mu\nu} d_{\mu\nu}x, \quad d_{\mu\nu}x = (-1)^{\mu+\nu} dx^1 \wedge \dots \wedge \widetilde{dx^{\mu}} \dots \widetilde{dx^{\nu}} \wedge \dots \wedge dx^m;$$

- $\text{CL}^m(\mathcal{X}) = \Omega_{\mathbb{H}}^m(\mathcal{X}) / \text{Im } d_{\mathbb{H}}^{m-1}$ – пространство *функционалов* на поверхности $\mathcal{X}$.

2.7. Симметрии. *Симметрии (инфинитезимальные симметрии) системы (2.7), (2.8) суть вертикальные дифференцирования*

$$V = \sum_{\sigma, l} V_l^\sigma \partial_{u_l^\sigma} + \sum_{\sigma, \alpha, \kappa, l} V_{\kappa l}^{\sigma \alpha} \partial_{u_{\kappa l}^{\sigma \alpha}}, \quad (2.16)$$

для которых коммутаторы $[V, \partial_\mu] = 0$, $1 \leq \mu \leq m$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы компоненты дифференцирования V имели вид $V_l^\sigma = \partial_l \phi^\sigma$, $V_{\kappa l}^{\sigma \alpha} = \partial_l \phi_\kappa^{\sigma \alpha}$, где элемент $\phi = (\phi^\sigma, \phi_\kappa^{\sigma \alpha}) \in \mathcal{E}$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_1 \phi - f_*(\phi) = 0.$$

Подробнее,

$$\sum_{1 \leq \mu \leq m} \partial_\mu \phi^{\sigma \mu} = 0, \quad (2.17)$$

$$\partial_1 \phi_\kappa^{\sigma \alpha} - \phi_{\kappa+1}^{\sigma \alpha} = 0 \quad (2.18)$$

для всех $1 \leq \sigma \leq s$, $2 \leq \alpha \leq m$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, где $\phi^{\sigma 1} = \phi^\sigma$, $\phi^{\sigma \alpha} = \phi_0^{\sigma \alpha}$. В силу следствия 1 общее решение подсистемы (2.17) имеет вид

$$\phi^{\sigma \mu} = \sum_{\sigma'} a_{\sigma'}^\sigma u^{\sigma' \mu} + \sum_\nu \partial_\nu k^{\sigma \mu \nu}, \quad a_{\sigma'}^\sigma \in \mathbb{R}, \quad k^{\sigma \mu \nu} \in \mathcal{A}, \quad k^{\sigma \mu \nu} + k^{\sigma \nu \mu} = 0, \quad (2.19)$$

для всех $1 \leq \sigma \leq s$, $1 \leq \mu, \nu \leq m$. В свою очередь подсистема (2.18) дает

$$\phi_\kappa^{\sigma \alpha} = \partial_1^\kappa \phi^{\sigma \alpha}, \quad 1 \leq \sigma \leq s, \quad 2 \leq \alpha \leq m, \quad \kappa \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.20)$$

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Симметрии системы (2.7), (2.8), а значит и исходных уравнений неразрывности (2.1), суть дифференцирования вида (2.16), где компоненты $\phi^{\sigma \mu}$ имеют вид (2.19), $\phi^\sigma = \phi^{\sigma 1}$, а компоненты $\phi_\kappa^{\sigma \alpha}$ находятся по формулам (2.20).*

Другими словами, линейное пространство $\text{Sym}(\mathcal{X})$ симметрий системы (2.1) имеет представления

$$\begin{aligned} \text{Sym}(\mathcal{X}) &\simeq \left\{ \Phi^\sigma = \sum_{\sigma'} a_{\sigma'}^\sigma J^{\sigma'} + \partial K^\sigma \mid a_{\sigma'}^\sigma \in \mathbb{R}, 1 \leq \sigma, \sigma' \leq s \right\} \simeq \\ &\simeq \text{CC}^{m-1}(\mathcal{X})^s, \end{aligned}$$

где $\Phi^\sigma = (\phi^{\sigma \mu})$, $J^\sigma = (u^{\sigma \mu})$, $\partial K^\sigma = (\sum_\nu \partial_\nu k^{\sigma \mu \nu})$.

3. АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЭВОЛЮЦИЮ С НУЛЕВОЙ ДИВЕРГЕНЦИЕЙ

3.1. Обозначения. К введенным выше обозначениям добавим новые:

- $t \in \mathbb{R}$ – независимая переменная (время);
- ∂_t – частная производная по переменной t ;

• $\mathfrak{B} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{A}$ – алгебра дифференциальных функций конечного порядка на пространстве $\mathbb{R}^{1+m} \times \mathbb{R}_{+}^{sm}$;

• $\mathcal{B} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$ – алгебра дифференциальных функций конечного порядка на пространстве $\mathbb{R}^{1+m} \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^{m-1}}^s \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^m}^{s(m-1)}$.

Имеются естественные вложения $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ и $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, задаваемые правилом $f \mapsto 1(t) \otimes f$, где функция $1(t) \equiv 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, все построения предыдущего раздела сохраняют свою силу, если считать, что введенные там функции зависят от переменной t как от параметра.

3.2. Эволюция с нулевой дивергенцией. Здесь эволюция переменных $u = (u^{\sigma\mu}) \in \mathbb{R}^{sm}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ описывается системой

$$\partial_t u^{\sigma\mu} = F^{\sigma\mu}, \quad 1 \leq \sigma \leq s, \quad 1 \leq \mu \leq m, \quad (3.1)$$

при наличии связей

$$\sum_{1 \leq \mu \leq m} \partial_{x^\mu} u^{\sigma\mu} = 0, \quad 1 \leq \sigma \leq s, \quad (3.2)$$

где $F^{\sigma\mu} = F^{\sigma\mu}(t, x, \mathbf{u}) \in \mathfrak{B}$ – заданные функции.

Согласно упомянутым выше правилам алгебро-геометрического анализа (см., например, работы [1]–[6]) система уравнений (3.1), (3.2) определяет гладкую поверхность $\mathcal{TX} = \mathbb{R} \times \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{1+m} \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^m}^{sm}$. Глобальные координаты на поверхности $\mathcal{TX}$ суть переменные $t \in \mathbb{R}$, $x = (x^\mu) \in \mathbb{R}^m$ и $(u_l^\sigma, u_{\kappa l}^{\sigma\alpha}) \in \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^{m-1}}^s \times \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+^m}^{s(m-1)}$. К картановым дифференцированиям ∂_μ , $1 \leq \mu \leq m$ (см. (2.5), (2.6)), добавляется дифференцирование

$$\partial_0 = \partial_t + V, \quad V = \sum_{\sigma, l} V_l^\sigma \partial_{u_l^\sigma} + \sum_{\sigma, \alpha, \kappa, l} V_{\kappa l}^{\sigma\alpha} \partial_{u_{\kappa l}^{\sigma\alpha}}. \quad (3.3)$$

Эволюция (3.1) согласована со связями (3.2), если дифференцирование (3.3) эволюционное, т.е. если вертикальное дифференцирование V есть симметрия системы (3.2). Согласно теореме 2 для этого необходимо и достаточно, чтобы компоненты $V_l^\sigma = \partial_l \phi^{\sigma 1}$, $V_{\kappa l}^{\sigma\alpha} = \partial_l^\kappa \partial_l \phi^{\sigma\alpha}$, где

$$\phi^{\sigma\mu} = F^{\sigma\mu}|_{\mathcal{TX}} = \sum_{\sigma'} a_{\sigma'}^\sigma u^{\sigma'\mu} + \sum_\nu \partial_\nu k^{\sigma\mu\nu}, \quad (3.4)$$

$a_{\sigma'}^\sigma = a_{\sigma'}^\sigma(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $k^{\sigma\mu\nu} \in \mathcal{B}$, $k^{\sigma\mu\nu} + k^{\sigma\nu\mu} = 0$, $1 \leq \sigma, \sigma' \leq s$, $1 \leq \mu, \nu \leq m$.

Ниже мы будем считать, что эволюция согласована со связями.

3.3. Законы сохранения разных степеней. Для каждого $q \in \mathbb{Z}_+$ определен $\mathcal{B}$ -модуль

$$\Omega_X^q(\mathcal{TX}) = \left\{ \omega = \frac{1}{q!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_q \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_q} \cdot dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q} \right\}$$

пространственных q -форм на поверхности $\mathcal{TX}$, где кососимметрические по индексам компоненты $\omega_{\mu_1 \dots \mu_q} \in \mathcal{B}$. Очевидно, что $\Omega_X^q(\mathcal{TX}) = 0$ при $q > m$. Будем также считать, что $\Omega_X^q(\mathcal{TX}) = 0$ при $q < 0$. Пространственные внешние дифференциалы

$$d_X = d_X^q: \Omega_X^q(\mathcal{TX}) \rightarrow \Omega_X^{q+1}(\mathcal{TX}), \quad \omega \rightarrow d_X \omega,$$

где

$$d_X \omega = \frac{1}{(q+1)!} \sum_{1 \leq \mu_0, \dots, \mu_q \leq m} (d_X \omega)_{\mu_0 \dots \mu_q} \cdot dx^{\mu_0} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q},$$

$$(d_X \omega)_{\mu_0 \dots \mu_q} = \sum_{0 \leq r \leq q} (-1)^r \partial_{\mu_r} \omega_{\mu_0 \dots \check{\mu}_r \dots \mu_q}.$$

Легко проверяется, что $d_X \circ d_X = 0$. При вычислении пространственного дифференциала d_X переменная $t \in \mathbb{R}$ является параметром, так что вложение $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ приводит к вложениям $\Omega_H^q(\mathcal{X}) \subset \Omega_X^q(\mathcal{TX})$, причем $d_X^q|_{\Omega_H^q(\mathcal{X})} = d_H^q$. Отсюда легко выводится представление

$$H_X^q(\mathcal{TX}) = \text{Ker } d_X^q / \text{Im } d_X^{q-1} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \otimes \text{CL}^q(\mathcal{X}), \quad 0 \leq q \leq m, \quad (3.5)$$

так что

$$H_X^0(\mathcal{TX}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad (3.6)$$

$$H_X^q(\mathcal{TX}) = 0, \quad 1 \leq q \leq m-2, \quad (3.7)$$

$$H_X^{m-1}(\mathcal{TX}) = \left\{ J = \sum_{1 \leq \sigma \leq s} a_\sigma J^\sigma \mid a_\sigma = a_\sigma(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \right\}, \quad (3.8)$$

$$H_X^m(\mathcal{TX}) = \Omega_X^m(\mathcal{TX}) / \text{Im } d_X^{m-1}. \quad (3.9)$$

Для каждого $q \in \mathbb{Z}_+$ определен $\mathcal{B}$ -модуль

$$\begin{aligned} \Omega_H^q(\mathcal{TX}) &= \{ \omega = \phi + dt \wedge \psi \mid \phi \in \Omega_X^q(\mathcal{TX}), \psi \in \Omega_X^{q-1}(\mathcal{TX}) \} = \\ &= \Omega_X^q(\mathcal{TX}) \oplus dt \wedge \Omega_X^{q-1}(\mathcal{TX}) \end{aligned}$$

горизонтальных q -форм на поверхности $\mathcal{TX}$. Эволюционные внешние дифференциалы имеют вид

$$d_T = d_T^q: \Omega_H^q(\mathcal{TX}) \rightarrow \Omega_H^{q+1}(\mathcal{TX}), \quad \omega \mapsto d_T \omega = dt \wedge \partial_0 \omega,$$

где дифференцирование ∂_0 действует на форму ω как производная Ли, здесь переменная t – полноправный аргумент. Очевидно, $d_T \circ d_T = 0$. Горизонтальные внешние дифференциалы запишем как

$$\begin{aligned} d_H &= d_H^q = d_T^q + d_X^q: \Omega_H^q(\mathcal{TX}) \rightarrow \Omega_H^{q+1}(\mathcal{TX}), \\ \omega &= \phi + dt \wedge \psi \mapsto d_H \omega = d_X \phi + dt \wedge (\partial_0 \phi - d_X \psi). \end{aligned}$$

Легко проверяется, что $d_T \circ d_X + d_X \circ d_T = 0$, так что $d_H \circ d_H = 0$.

Линейное пространство *сохраняющихся токов q -й степени* системы (3.1), (3.2) есть $\text{CC}^q(\mathcal{TX}) = \text{Ker } d_H^q$. Линейное пространство *тривиальных токов q -й степени* системы (3.1), (3.2) есть $\text{TC}^q(\mathcal{TX}) = \text{Im } d_H^{q-1}$. Очевидно, что $\text{TC}^q(\mathcal{TX}) \subset \text{CC}^q(\mathcal{TX})$, так что определено фактор-пространство $\text{CL}^q(\mathcal{TX}) = \text{CC}^q(\mathcal{TX}) / \text{TC}^q(\mathcal{TX})$ – линейное пространство *законов сохранения q -й степени* системы (3.1), (3.2).

3.4. Переплетающая последовательность. Для изучения законов сохранения системы (3.1), (3.2) воспользуемся переплетающей последовательностью (точной последовательностью линейных пространств), построенной в работе [8]. В нашем случае она имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{CL}^0(\mathcal{TX}) & \xrightarrow{\pi^0} & H_X^0(\mathcal{TX}) & \xrightarrow{\partial_0^0} & \\
 \xrightarrow{\partial_0^0} & H_X^0(\mathcal{TX}) & \xrightarrow{\varepsilon^0} & \text{CL}^1(\mathcal{TX}) & \xrightarrow{\pi^1} & H_X^1(\mathcal{TX}) & \xrightarrow{\partial_0^1} \dots \\
 \dots & \xrightarrow{\partial_0^{q-1}} & H_X^{q-1}(\mathcal{TX}) & \xrightarrow{\varepsilon^{q-1}} & \text{CL}^q(\mathcal{TX}) & \xrightarrow{\pi^q} & H_X^q(\mathcal{TX}) \xrightarrow{\partial_0^q} \dots \\
 \dots & \xrightarrow{\partial_0^{m-1}} & H_X^{m-1}(\mathcal{TX}) & \xrightarrow{\varepsilon^{m-1}} & \text{CL}^m(\mathcal{TX}) & \xrightarrow{\pi^m} & H_X^m(\mathcal{TX}) \xrightarrow{\partial_0^m} \\
 \xrightarrow{\partial_0^m} & H_X^m(\mathcal{TX}) & \xrightarrow{\varepsilon^m} & \text{CL}^{m+1}(\mathcal{TX}) & \longrightarrow & 0,
 \end{array}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^q: H_X^q(\mathcal{TX}) &\rightarrow \text{CL}^{q+1}(\mathcal{TX}), & [\phi] &\mapsto (-1)^q [dt \wedge \phi], \\
 \pi^q: \text{CL}^q(\mathcal{TX}) &\rightarrow H_X^q(\mathcal{TX}), & [\phi + dt \wedge \psi] &\mapsto [\phi], \\
 \partial_0^q: H_X^q(\mathcal{TX}) &\rightarrow H_X^q(\mathcal{TX}), & [\phi] &\mapsto [\partial_0 \phi],
 \end{aligned}$$

– линейные отображения, квадратные скобки означают класс эквивалентности данной формы в соответствующем фактор-пространстве. В силу равенств (3.7) переплетающая последовательность распадается на точные подпоследовательности

$$0 \longrightarrow \text{CL}^0(\mathcal{TX}) \xrightarrow{\pi^0} H_X^0(\mathcal{TX}) \xrightarrow{\partial_0^0} H_X^0(\mathcal{TX}) \longrightarrow 0, \quad (3.10)$$

$$0 \longrightarrow \text{CL}^q(\mathcal{TX}) \longrightarrow 0, \quad 1 \leq q \leq m-2, \quad (3.11)$$

$$0 \longrightarrow \text{CL}^{m-1}(\mathcal{TX}) \xrightarrow{\pi^{m-1}} H_X^{m-1}(\mathcal{TX}) \xrightarrow{\partial_0^{m-1}} H_X^{m-1}(\mathcal{TX}), \quad (3.12)$$

$$H_X^{m-1}(\mathcal{TX}) \xrightarrow{\varepsilon^{m-1}} \text{CL}^m(\mathcal{TX}) \xrightarrow{\pi^m} H_X^m(\mathcal{TX}) \xrightarrow{\partial_0^m} H_X^m(\mathcal{TX}), \quad (3.13)$$

$$H_X^m(\mathcal{TX}) \xrightarrow{\partial_0^m} H_X^m(\mathcal{TX}) \xrightarrow{\varepsilon^m} \text{CL}^{m+1}(\mathcal{TX}) \longrightarrow 0. \quad (3.14)$$

Отсюда с помощью простых вычислений выводится

ТЕОРЕМА 3. *Законы сохранения системы (3.1), (3.2) имеют представления*

$$\text{CL}^0(\mathcal{TX}) = \text{Ker } \partial_0^0 = \mathbb{R}, \quad (3.15)$$

$$\text{CL}^q(\mathcal{TX}) = 0, \quad 1 \leq q \leq m-2, \quad (3.16)$$

$$\pi^{m-1}: \text{CL}^{m-1}(\mathcal{TX}) \simeq \text{Ker } \partial_0^{m-1}, \quad (3.17)$$

$$\Pi^m: \text{CL}^m(\mathcal{TX}) / \text{Im } \varepsilon^{m-1} \simeq \text{Ker } \partial_0^m, \quad (3.18)$$

$$E^m: \text{coKer } \partial_0^m = H_X^m(\mathcal{TX}) / \text{Im } \partial_0^m \simeq \text{CL}^{m+1}(\mathcal{TX}), \quad (3.19)$$

где изоморфизм Π^m действует по правилу

$$[\phi + dt \wedge \psi] = \phi + dt \wedge \psi + \text{Im } d_H^{m-1} + \text{Im } \varepsilon^{m-1} \mapsto [\phi] = \phi + \text{Im } d_X^{m-1}$$

(напомним, что здесь $d_X \phi = 0$, $\partial_0 \phi = d_X \psi$), а изоморфизм E^m – по правилу

$$[\phi] = \phi + \text{Im } d_X^{m-1} + \text{Im } \partial_0^m \mapsto [dt \wedge \phi] = dt \wedge \phi + \text{Im } d_H^m.$$

Здесь $\phi \in \Omega_X^m(\mathcal{TX})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. По данному классу эквивалентности $[\phi] \in \text{Ker } \partial_0^{m-1}$ класс эквивалентности $[\omega] \in \text{CL}^{m-1}(\mathcal{TX})$ находится следующим образом. По условию $d_X \phi = 0$, $\partial_0 \phi = d_X \psi$ для некоторой формы $\psi \in \Omega_X^{m-2}(\mathcal{TX})$. Положим $\omega = \phi + dt \wedge \psi$, тогда по построению $\pi^{m-1}[\omega] = [\phi]$, причем $d_H \omega = d_X \phi + dt \wedge (\partial_0 \phi - d_X \psi) = 0$, что и требуется.

3.5. Законы сохранения $(m-1)$ -й степени. Наибольший интерес в доказанной выше теореме представляет равенство (3.17), из которого следует, что связи (3.2) могут привести к появлению у эволюционной системы (3.1) законов сохранения $(m-1)$ -й степени (напомним, что у эволюционных систем без связей возможны законы сохранения лишь m -й степени, где m – число пространственных переменных). Для этого надо, чтобы ядро $\text{Ker } \partial_0^{m-1}$ отображения $\partial_0^{m-1}: H_X^{m-1}(\mathcal{TX}) \rightarrow H_X^{m-1}(\mathcal{TX})$ было нетривиальным. В нашем случае дифференцирование ∂_0 определено равенством (3.3), где компоненты $\phi^{\sigma\mu}$ имеют вид (3.4). Для базисного тока $J^\sigma = (j^{\sigma\mu})$, $1 \leq \sigma \leq s$, действие $\partial_0 J^\sigma = (\partial_0 j^{\sigma\mu})$, где (напомним, что $j^{\sigma\mu} = u^{\sigma\mu}$)

$$\partial_0 j^{\sigma\mu} = \partial_0 u^{\sigma\mu} = \phi^{\sigma\mu} = \sum_{\sigma'} a_{\sigma'}^\sigma j^{\sigma'\mu} + \sum_\nu \partial_\nu k^{\sigma\mu\nu} \simeq \sum_{\sigma'} a_{\sigma'}^\sigma j^{\sigma'\mu}$$

(тривиальную часть $\sum_\nu \partial_\nu k^{\sigma\mu\nu}$ без ограничения общности отбрасываем). В матричных обозначениях это представление переписывается в виде $\partial_0 \mathbb{J} = A \mathbb{J}$, где s -столбец $\mathbb{J} = (J^\sigma)$, $(s \times s)$ -матрица $A = \|a_{\sigma'}^\sigma\|$. Следовательно, для произвольного нетривиального тока $J = \sum_\sigma c_\sigma J^\sigma$ с компонентами $c_\sigma = c_\sigma(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ будем иметь

$$\partial_0 J = \sum_\sigma ((\partial_t c_\sigma) J^\sigma + c_\sigma (\partial_0 J^\sigma)) = (\partial_t c + cA) \mathbb{J},$$

где s -строка $c = (c_\sigma)$. Таким образом, справедлива

ЛЕММА 1. *Имеют место представления*

$$\begin{aligned} \text{Ker } \partial_0^{m-1} &= \{[\omega] \in H_X^{m-1}(\mathcal{TX}) \mid [\partial_0 \omega] = 0\} = \left\{ J = \sum_\sigma c_\sigma J^\sigma \mid \partial_0 J = 0 \right\} = \\ &= \{ J = c \mathbb{J} \mid \partial_t c + cA = 0 \} = \{ c \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})_s \mid \partial_t c + cA = 0 \} \simeq \mathbb{R}_s. \end{aligned}$$

Для доказательства следует лишь пояснить, что последний изоморфизм задается правилом $c(t) \mapsto c(0)$, и по сути данная лемма есть переформулировка теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если сужение $\phi^{\sigma\mu} = \sum_\nu \partial_\nu K^{\sigma\mu\nu}$ (см. представление (3.4)) содержит только тривиальную часть, то матрица $A = 0$, так что ядро $\text{Ker } \partial_0^{m-1} = \{ J = c \mathbb{J} \mid c \in \mathbb{R}_s \}$.

ТЕОРЕМА 4. *Имеют место представления*

$$\text{CL}^{m-1}(\mathcal{TX}) \simeq \{ J = c \mathbb{J} \mid \partial_t c + cA = 0 \} \simeq \{ c \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})_s \mid \partial_t c + cA = 0 \} \simeq \mathbb{R}_s.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться равенством (3.17) и предыдущей леммой.

Таким образом, наличие связей в виде уравнений неразрывности действительно приводит к появлению у эволюционной системы законов сохранения низшей степени $m - 1$.

3.6. Эволюция с заданной дивергенцией. Здесь эволюция переменных $v = (v^{\sigma\mu}) \in \mathbb{R}^{sm}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ описывается системой

$$\partial_t v^{\sigma\mu} = G^{\sigma\mu}, \quad 1 \leq \sigma \leq s, \quad 1 \leq \mu \leq m, \quad (3.20)$$

при наличии связей

$$\sum_{1 \leq \mu \leq m} \partial_{x^\mu} v^{\sigma\mu} = \varrho^\sigma, \quad 1 \leq \sigma \leq s, \quad (3.21)$$

где $G^{\sigma\mu} = G^{\sigma\mu}(t, x, \mathbf{v}) \in \mathfrak{B}$, $\varrho^\sigma = \varrho^\sigma(t, x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m})$ – заданные функции. Такая эволюция сводится к рассмотренной выше эволюции с нулевой дивергенцией элементарной заменой

$$\begin{aligned} v^{\sigma\mu} &\longleftrightarrow u^{\sigma\mu} = v^{\sigma\mu} - R^{\sigma\mu}, \\ G^{\sigma\mu}(t, x, \mathbf{v}) &\longleftrightarrow F^{\sigma\mu}(t, x, \mathbf{u}) = G^{\sigma\mu}(t, x, \mathbf{v} - \mathbf{R}) - \partial_t R^{\sigma\mu}, \\ \varrho^\sigma &\longleftrightarrow 0, \end{aligned}$$

где $R^{\sigma\mu} = R^{\sigma\mu}(t, x)$ – компоненты произвольного частного решения уравнений неразрывности (3.21), $\mathbf{R} = (R_i^{\sigma\mu})$, $R_i^{\sigma\mu} = R_i^{\sigma\mu}(t, x) = \partial_{x^i} R^{\sigma\mu}(t, x)$.

3.7. Пример: уравнения Максвелла. Как известно, классическое электромагнитное поле описывается уравнениями Максвелла

$$\partial_t \mathbf{H} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad (3.22)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (3.23)$$

и

$$\partial_t \mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{j}, \quad (3.24)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho, \quad (3.25)$$

где $\mathbf{j}(t, x)$, $\varrho(t, x)$ – заданные функции, удовлетворяющие уравнению неразрывности

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (3.26)$$

В силу уравнения (3.26) существуют функции $\mathbf{R}(t, x)$, $\mathbf{S}(t, x)$ такие, что

$$\varrho = \operatorname{div} \mathbf{R}, \quad \mathbf{j} = -\partial_t \mathbf{R} + \operatorname{rot} \mathbf{S}, \quad (3.27)$$

что позволяет переписать вторую пару уравнений Максвелла в более удобном для нас виде:

$$\partial_t (\mathbf{E} - \mathbf{R}) = \operatorname{rot} (\mathbf{H} - \mathbf{S}), \quad (3.28)$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{E} - \mathbf{R}) = 0. \quad (3.29)$$

С рассматриваемой здесь точки зрения уравнения (3.22), (3.28) описывают эволюцию переменных $\mathbf{H}$, $\mathbf{E} - \mathbf{R}$ с нулевой дивергенцией (3.23), (3.29). Таким образом, здесь $s = 2$, $\sigma = 1, 2$, $m = 3$, $1 \leq \lambda, \mu, \nu \leq 3$, $u^{1\lambda} = H^\lambda$, $u^{2\lambda} = E^\lambda - R^\lambda$ ($E^\lambda = u^{2\lambda} + R^\lambda$),

$$F^{1\lambda} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}^\lambda = -\sum_{\mu, \nu} e^{\lambda\mu\nu} \partial_\mu E_\nu,$$

$$F^{2\lambda} = \operatorname{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{S})^\lambda = \sum_{\mu, \nu} e^{\lambda\mu\nu} \partial_\mu (H_\nu - S_\nu),$$

где $e^{\lambda\mu\nu}$ – знак перестановки $\{\lambda, \mu, \nu\}$, индексы λ, μ, ν опускаются и поднимаются с помощью евклидовой метрики $\delta_{\mu\nu}$, $V_\mu = \sum_\nu \delta_{\mu\nu} V^\nu = V^\mu$. Далее, здесь сужение $\phi^{\sigma\lambda} = F^{\sigma\lambda}|_{T\mathcal{X}} = F^{\sigma\lambda}$ очевидно содержит только тривиальную часть (см. замечание 2), так что ядро имеет вид

$$\operatorname{Ker} \partial_0^{m-1} = \{J = c_1 J^1 + c_2 J^2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\},$$

где $J^1 = (u^{1\lambda} = H^\lambda) = \mathbf{H}$, $J^2 = (u^{2\lambda} = E^\lambda - R^\lambda) = \mathbf{E} - \mathbf{R}$.

В силу замечания 1 отсюда следует, что справедлива

ТЕОРЕМА 5. *Линейное пространство может быть представлено в виде*

$$\operatorname{CL}^2(T\mathcal{X}) = \{\omega = c_1 \omega^1 + c_2 \omega^2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}_2,$$

где базисные законы суть

$$\omega^1 = F = \sum_\lambda (H^\lambda d_\lambda x - E_\lambda \cdot dt \wedge dx^\lambda)$$

– тензор электромагнитного поля, записанный как 2-форма, и

$$\omega^2 = *F = \sum_\lambda (R^\lambda d_\lambda x + S_\lambda \cdot dt \wedge dx^\lambda),$$

где 2-форма

$$*F = \sum_\lambda (E^\lambda d_\lambda x + H_\lambda \cdot dt \wedge dx^\lambda)$$

есть сопряженная по Ходжсу к форме F (см., например, книгу [11]).

Поясним, что здесь использовано стандартное обозначение

$$d_\lambda x = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} e_{\lambda\mu\nu} \cdot dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

так что $dx^\lambda \wedge d_\mu x = \delta_\mu^\lambda d^3 x$, $d^3 x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. Напомним еще трехмерные равенства

$$d\left(\sum_\lambda V_\lambda dx^\lambda\right) = \sum_\lambda \operatorname{rot} \mathbf{V}^\lambda \cdot d_\lambda x, \quad d\left(\sum_\lambda V^\lambda d_\lambda x\right) = \operatorname{div} \mathbf{V} \cdot d^3 x.$$

Отметим также, что исходная система уравнений Максвелла (3.22)–(3.25) на языке дифференциальных форм записывается в виде (см., например, книгу [12])

$$dF = 0, \quad d(*F) + \sum_{\lambda} j^{\lambda} \cdot dt \wedge d_{\lambda}x - \varrho d^3x = 0.$$

Таким образом, связи (3.23), (3.25) привели к тому, что у эволюционной системы (3.22), (3.24) наряду с известным стандартным пространством законов сохранения $\text{CL}^3(\mathcal{TX})$ имеется и нетривиальное пространство законов сохранения низшей степени $\text{CL}^2(\mathcal{TX})$.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 07-01-00144_а, 09-01-12161-офи-м) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3224.2008.1).

Список литературы

- [1] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [2] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
- [3] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [4] I. S. Krasil'shchik, A. M. Vinogradov, *Acta Appl. Math.*, **15**:1–2 (1989), 161–209.
- [5] V. V. Zharinov, *Lecture Notes on Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, Ser. Sov. East Eur. Math., **9**, World Sci., Singapore, 1992.
- [6] А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (ред.), *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, Факториал, М., 1997.
- [7] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **68**:2 (1986), 163–171.
- [8] В. В. Жаринов, *Матем. сб.*, **184**:5 (1993), 39–54.
- [9] А. М. Виноградов, *ДАН СССР*, **238**:5 (1978), 1028–1031.
- [10] T. Tsujishita, *Osaka J. Math.*, **19**:2 (1982), 311–363.
- [11] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*. Т. 2. *Геометрия и топология многообразий*, Эдиториал УРСС, М., 2001.
- [12] Р. Ботт, Л. В. Ту, *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*, Наука, Физматлит, М., 1989.

Поступила в редакцию 22.10.2009