Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Р. Акчурин, О спектральных свойствах обобщенной модели Фридрихса, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 1, 17–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 11:36:22

© 2010 г.

Э. Р. Акчурин*

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА

Рассматривается самосопряженная обобщенная модель Фридрихса при малых значениях “параметра взаимодействия”. Для этого случая полностью исследован спектр модели и структура ее собственных векторов (как обычных, так и обобщенных). Построения опираются на анализ резольвенты оператора Фридрихса и соответствующей ему теории рассеяния.

Ключевые слова: обобщенная модель Фридрихса, резольвента, спектр, обобщенный собственный вектор, волновой оператор.

1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде задач анализа, математической физики и теории вероятностей возникают операторы, носящие название операторов Фридрихса [1] и обобщенных операторов Фридрихса [2]. Последние действуют в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus L_2(M, d\mu), \quad (1.1)$$

где $(M, d\mu)$ – некоторое многообразие с мерой, по правилу

$$\begin{aligned} (AF)_0 &= e_0 f_0 + \alpha \int_M \bar{v}(q) f_1(q) d\mu(q), \\ (AF)_1(q) &= \alpha v(q) f_0 + a(q) f_1(q) + \alpha \int_M D(q, q') f_1(q') d\mu(q'). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $F = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}$, e_0 – константа, a и v – некоторые функции на многообразии M , а D – функция от двух переменных на этом многообразии; $\alpha \in \mathbb{R}_+$ – “параметр взаимодействия”. В настоящей работе мы рассматриваем самосопряженный случай с $M = \mathbb{R}^d$, где $d = 3$, евклидовой мерой $d\mu(q) = dq$ в $\mathbb{R}^d$ и достаточно малым параметром α . Свойства функций, входящих в (1.2) для этого случая, подробно описаны ниже.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: eakchurin@gmail.com

Цель нашей работы – провести полный спектральный анализ оператора A (исследовать характер спектра, структуру резольвенты, вид собственных векторов дискретного и непрерывного спектров, проблему существования и полноты естественно связанных с оператором A волновых операторов). Заметим, что эта задача полностью или частично изучалась в литературе применительно к обычной модели Фридрихса, т.е. к самосопряженному оператору вида

$$(A_0 f)(q) = a(q)f(q) + \alpha \int_M D(q, q')f(q') dq', \quad f \in L_2(M, dq), \quad M \subset \mathbb{R}^d, \quad (1.3)$$

(см., например, пионерскую работу [1], а также [3], [4]). В работе [1] для случая $M = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, $a(q) = q$ и малого $\alpha > 0$ было установлено, что с точностью до конечного числа собственных значений оператор A_0 имеет абсолютно непрерывный спектр, и что в своем абсолютно непрерывном подпространстве этот оператор унитарно эквивалентен оператору B_0 такому, что

$$(B_0 f)(q) = a(q)f(q), \quad f \in L_2(M, dq). \quad (1.4)$$

Позже в работе [4] была предложена более общая модель (в которой M – любой промежуток в $\mathbb{R}$, а функции f принимают значения в некотором гильбертовом пространстве H ; ядро D при этом заменяется на ограниченный оператор в H) и перенесены на нее результаты работы [1]. Это обобщение существенно расширило область применения теории. В статье [5], развивающей работу [4], и – уже со всей полнотой – в работе [6] было показано, что при определенных ограничениях на ядро D (а именно, при его компактности и гёльдеровости с показателем $\mu > 1/2$) можно исключить требование малости параметра α . При этом спектр оператора A_0 будет состоять из абсолютно непрерывной части, заполняющей промежуток $M \subset \mathbb{R}$, и, быть может, конечного числа собственных значений конечной кратности. В работах [4], [6] было также доказано существование волновых операторов, связанных с A_0 . По поводу модели Фридрихса см. также монографии [7], [8].

Как таковая, обобщенная модель Фридрихса (1.2) введена в работе [2], где были изучены ее собственные значения и “резонансы” (особенности аналитического продолжения резольвенты). Эта модель рассмотрена также в ряде других работ, из которых мы упомянем статью [9] (именно она как по постановке задачи, так и по результатам ближе всего к нашей работе), статью [10] – в ней результаты, полученные для обобщенной модели Фридрихса, применяются к проблемам случайного блуждания частицы в случайной среде, а также работу [11], в которой исследованы так называемые связанные состояния для определенного семейства обобщенных моделей Фридрихса.

Основные результаты настоящей работы состоят в следующем. Показано, что при достаточно малых значениях параметра α спектр оператора A состоит из абсолютно непрерывной части, совпадающей с множеством I значений функции a , и, быть может, одного собственного значения, лежащего левее точки $\varkappa = \min_q a(q)$. Построена резольвента оператора A , доказано существование (и полнота) естественно связанных с A волновых операторов и с их помощью найдены обобщенные собственные

векторы непрерывного спектра (вторые компоненты которых являются элементами некоторого явно описанного пространства обобщенных функций). Эти результаты получены нами при следующих ограничениях на функции, входящие в (1.2).

1. Вещественнозначная функция $a = a(q)$ является достаточно гладкой, и существуют константы c_1, c_2, c_3 такие, что

$$\begin{aligned} c_1 &\leq a(q) \leq c_2|q|^2 + c_3, \\ c_1|q| &\leq |\nabla a(q)| \leq c_2(|q| + 1), \\ |\partial_q^\alpha a(q)| &\leq c_2, \quad |\alpha| \geq 2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь и далее

$$\partial_q^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial q_1^{\alpha_1} \partial q_2^{\alpha_2} \partial q_3^{\alpha_3}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_+, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^3 \alpha_i.$$

Кроме того, мы предполагаем, что функция a имеет невырожденный минимум $\varkappa$ в нуле, $\varkappa = a(0)$. Через $I = [\varkappa, \infty) \subset \mathbb{R}$ будем обозначать множество значений функции a .

2. Функция $v = v(q)$ является достаточно гладкой и $|v(q)| \asymp h(q)$ для некоторой ограниченной, быстроубывающей при $|q| \rightarrow \infty$, положительной функции h , удовлетворяющей условию

$$\int_{\Gamma_y} h^2(q) d\nu_y(q) \asymp (y - \varkappa)^{1/2}, \quad y \in [\varkappa, \varkappa + 1). \quad (1.6)$$

Здесь $\Gamma_y = \{q : a(q) = y\}$, $\nu_y(\cdot)$ – мера Гельфанда–Лере на Γ_y (см., например, [12]), а запись $f(x) \asymp g(x)$, $x \in M$ означает, как обычно, что найдутся константы d_1, d_2 такие, что $d_1 f(x) \leq g(x) \leq d_2 f(x)$ при всех $x \in M$. Кроме того, мы предполагаем, что ограничения функции v на множества вида $\{q : a(q) = \text{const}\}$ не равны тождественно нулю.

3. Ядро $D = D(q, q')$ является самосопряженным (т.е. $\overline{D}(q, q') = D(q', q)$), достаточно гладким, и существует константа N такая, что для любых мультииндексов α_1, α_2 , где $|\alpha_1|, |\alpha_2| \leq 2$,

$$|\partial_q^{\alpha_1} \partial_{q'}^{\alpha_2} D(q, q')| \leq N h(q) h(q'). \quad (1.7)$$

4. Параметр $e_0 \in \mathbb{R}$, параметр $\alpha > 0$ достаточно мал.

Следует отметить, что большая часть результатов, изложенных в нашей работе, имеется в статье [9], причем условия, налагаемые в указанной статье на функции, входящие в (1.2), в основном те же, что и у нас. Однако в работе [9] эти результаты (за исключением одного) лишь сформулированы. В настоящей работе мы приводим их с достаточно полными доказательствами и, кроме того, формулируем и доказываем несколько новых утверждений (вспомогательных и касающихся свойств обобщенных собственных векторов). Результат, который приведен в [9] вместе с его обоснованием (получена явная формула для резольвенты), мы доказываем заново

с целью проиллюстрировать несколько иную технику (переход к сингулярному интегралу вместо применения метода стационарной фазы, как это делается в [9]). Эта техника используется нами очень часто. Она полезна при оценивании интегралов, сводимых к сингулярным, и основана на следующем обобщении известной леммы Племеля–Привалова [13], [14] на случай функций, принимающих значения из некоторого банахова пространства.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{B}$ – банахово пространство, $\mathcal{D}_0 = \mathbb{C} \setminus I$, $\overline{\mathcal{D}}_0$ – замыкание $\mathcal{D}_0$ (с двумя берегами вдоль разреза I). Пусть задана $\mathcal{B}$ -значная функция $f = f(z, y): \overline{\mathcal{D}}_0 \times (\varkappa, \infty) \rightarrow \mathcal{B}$ такая, что:

- 1) при любом фиксированном $y > \varkappa$ функция $f = f(z, y)$ является $\mathcal{B}$ -аналитической¹⁾ по z в $\mathcal{D}_0$ и $\mathcal{B}$ -непрерывной по z в $\overline{\mathcal{D}}_0$;
- 2) при каждом $y > \varkappa$ граничные значения f (как функции от z) на верхнем (f^+) и нижнем (f^-) берегах разреза удовлетворяют условию

$$\|f^\pm(x_1, y) - f^\pm(x_2, y)\|_{\mathcal{B}} \leq C_1(y)|x_1 - x_2|^{1/2}, \quad x_1, x_2 \in I, \quad |x_1 - x_2| < 1,$$

где $C_1(y)$ – абсолютно интегрируемая (на I) функция, не зависящая от x_1, x_2 ;

- 3) при любом $z \in \overline{\mathcal{D}}_0$ справедлива оценка $\|f(z, y_1) - f(z, y_2)\|_{\mathcal{B}} \leq C_2|y_1 - y_2|^{1/2}$ для любых $y_1, y_2 > \varkappa$ таких, что $|y_1 - y_2| < 1$, где C_2 – не зависящая от z, y_1, y_2 константа;

- 4) при любом $z \in \overline{\mathcal{D}}_0$ имеет место оценка интеграла $\int_{\varkappa}^{\infty} \|f(z, y)\|_{\mathcal{B}} dy \leq R$, где R не зависит от z ;

- 5) справедливо неравенство $\sup_{z \in \overline{\mathcal{D}}_0, y > \varkappa} \|f(z, y)\|_{\mathcal{B}} \leq M < \infty$;

- 6) при любом $z \in \overline{\mathcal{D}}_0$ функция $f(z, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \varkappa + 0$.

Тогда функция

$$F(z_1, z_2) = \int_{\varkappa}^{\infty} \frac{f(z_1, y)}{y - z_2} dy, \quad z_1, z_2 \in \mathcal{D}_0,$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера [15], [16], обладает следующими свойствами:

- 1) она $\mathcal{B}$ -аналитична в $\mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_0$;
- 2) она $\mathcal{B}$ -непрерывна и ограничена на $\overline{\mathcal{D}}_0 \times \overline{\mathcal{D}}_0$, причем $\|F(z_1, z_2)\|_{\mathcal{B}} \leq A_1 M + A_2 C_2 + R$, где A_1, A_2 – абсолютные константы, а M, C_2 и R – константы из условий 3–5; при этом продолжение на разрез I осуществляется равномерно относительно его точек;

¹⁾Функция f , определенная на некотором (открытом) подмножестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ и принимающая значения в банаховом пространстве $\mathcal{B}$ называется $\mathcal{B}$ -аналитической на $\mathcal{O}$, если для каждого $z \in \mathcal{O}$ существует предел

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

(по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ пространства $\mathcal{B}$). Аналогичным образом (через предел по норме пространства $\mathcal{B}$) определяется и $\mathcal{B}$ -непрерывность.

3) для значений функции F на верхних и нижних берегах разреза имеет место оценка

$$\|F^{\pm,\pm}(x_1 + \delta_1, x_2 + \delta_2) - F^{\pm,\pm}(x_1, x_2)\|_{\mathcal{B}} \leq C(|\delta_1|^{1/2} + |\delta_2|^{1/2}),$$

где $C = A_3(\int_{\mathcal{K}}^{\infty} C_1(y) dy + C_2)$ и A_3 – абсолютная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы следует общему плану доказательства леммы Племяля–Привалова для обычных функций [13], [14]. Оно довольно громоздко, поэтому мы его опускаем.

Отметим, что изложенные здесь результаты не предполагают аналитичности (как в работе [2]) входящих в (1.2) функций – требуется лишь их (сравнительно небольшая) гладкость. Условие малости параметра α существенно, по-видимому, только для утверждения об отсутствии собственных значений на непрерывном спектре, в остальном его можно опустить, избрав другой метод доказательства (скажем, при получении формул для резольвенты оператора A можно применить метод детерминанта Фредгольма, как это делается в работе [2]). В некоторых наших доказательствах малость α не используется (например, при обосновании существования и полноты волновых операторов) или используется опосредованно (как в доказательстве отсутствия сингулярного спектра).

2. РЕЗОЛЬВЕНТА ОПЕРАТОРА A

Найдем действие резольвенты $R_A(z)$ оператора A на вектор $G = (g_0, g_1(\cdot)) \in \mathcal{H}$, для чего рассмотрим следующую систему уравнений, где $F = (f_0, f_1(\cdot)) \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} (e_0 - z)f_0 + \alpha \int \bar{v}(q)f_1(q) dq &= g_0, \\ \alpha v(q)f_0 + (a(q) - z)f_1(q) + \alpha \int D(q, q')f_1(q') dq' &= g_1(q). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Чтобы выразить $f_1(\cdot)$ через f_0 (во втором уравнении), рассмотрим оператор B , заданный на своей максимальной области определения в $L_2(\mathbb{R}^d, dq)$ равенством

$$(Bf)(q) = a(q)f(q) + \alpha \int_{\mathbb{R}^3} D(q, q')f(q') dq'. \quad (2.2)$$

Вычислим резольвенту $R_B(z) = (B - zI)^{-1}$ этого оператора. Через $\mathcal{B}$ обозначим банахово пространство всех ядер $D = D(q, q')$, дважды дифференцируемых и удовлетворяющих условию (1.7) для некоторого N , с нормой $\|D\| = \inf N$, где нижняя грань берется по всем N , для которых выполняется (1.7). Через $\mathcal{D}_0$, как и выше, будем обозначать $\mathbb{C} \setminus I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При достаточно малых $\alpha > 0$ и при $z \in \mathcal{D}_0$ резольвента $R_B(z)$ действует как

$$(R_B(z)g)(q) = \frac{1}{a(q) - z} \left[g(q) + \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(\alpha, z; q, q')g(q')}{a(q') - z} dq' \right], \quad (2.3)$$

где $g \in L_2(\mathbb{R}^3, dq)$. Ядро $K(\alpha, z; \cdot, \cdot) \in \mathcal{B}$ для всех $z \in \overline{\mathcal{D}}_0$, оно является $\mathcal{B}$ -аналитическим в $\mathcal{D}_0$ и $\mathcal{B}$ -непрерывным в $\overline{\mathcal{D}}_0$. Кроме того, его граничные значения $K^\pm$ на верхнем и нижнем берегах разреза I удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $1/2$:

$$\|K^\pm(\alpha, x_1; \cdot, \cdot) - K^\pm(\alpha, x_2; \cdot, \cdot)\| \leq C|x_1 - x_2|^{1/2}, \quad x_1, x_2 \in I, \quad |x_1 - x_2| < 1,$$

где C – некоторая абсолютная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B_0 – оператор умножения на функцию $a = a(q)$, D – интегральный оператор с ядром $D = D(q, q')$, $M = \alpha D(B_0 - zI)^{-1}$. Тогда при $z \in \mathcal{D}_0$ мы можем (пока формально) записать

$$R_B(z) = (B_0 - zI)^{-1}(I + M)^{-1} = (B_0 - zI)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n M^n,$$

откуда путем простых вычислений получаем, что

$$(R_B(z)g)(q) = \frac{1}{a(q) - z} \left[g(q) + \alpha \int \sum_{n=0}^{\infty} K_z^{(n)}(q, q') \frac{g(q')}{a(q') - z} dq' \right], \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} K_z^{(0)}(q, q') &= -D(q, q'), \\ K_z^{(n+1)}(q, q') &= -\alpha \int K_z^{(n)}(q, k) D(k, q') \frac{1}{a(k) - z} dk. \end{aligned}$$

Докажем, что ряд в (2.4) сходится (по указанной чуть ниже норме). Будем действовать по индукции. Пусть относительно семейства функций $\{K_z^{(n)}(\cdot, \cdot)\}_{z \in \mathcal{D}_0}$ (число n фиксировано) известно, что:

- 1) $K_z^{(n)}(\cdot, \cdot) \in \mathcal{B}$ для всех $z \in \overline{\mathcal{D}}_0$;
- 2) $\sup_{z \in \mathcal{D}_0} \|K_z^{(n)}(\cdot, \cdot)\| = L_n < \infty$;
- 3) функции семейства $\{K_z^{(n)}(\cdot, \cdot)\}_{z \in \mathcal{D}_0}$ являются $\mathcal{B}$ -аналитическими относительно переменной z в $\mathcal{D}_0$ (т.е. функция $z \mapsto K_z^{(n)}(\cdot, \cdot) \in \mathcal{B}$ является $\mathcal{B}$ -аналитической в $\mathcal{D}_0$);
- 4) граничные значения $K_x^{(n)\pm}$ на верхнем и нижнем берегах разреза I удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $1/2$:

$$H_n := \sup_{\substack{x_{1,2} \in I, \\ |x_1 - x_2| < 1}} \frac{\|K_{x_1}^{(n)\pm} - K_{x_2}^{(n)\pm}\|}{|x_1 - x_2|^{1/2}} < \infty. \quad (2.5)$$

Покажем, что семейство $\{K_z^{(n+1)}(\cdot, \cdot)\}_{z \in \mathcal{D}_0}$ в этом случае тоже удовлетворяет этим условиям, причем существует число $\delta \in (0, 1)$, не зависящее от n , такое, что $H_{n+1} + L_{n+1} \leq \delta(H_n + L_n)$. Отсюда будет следовать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} K_z^{(n)}(q, q')$ сходится по норме

$$|||K||| := \sup_{\substack{x_{1,2} \in I, \\ |x_1 - x_2| < 1}} \frac{\|K_{x_1}^\pm - K_{x_2}^\pm\|}{|x_1 - x_2|^{1/2}} + \sup_{z \in \mathcal{D}_0} \|K_z\|, \quad (2.6)$$

и сумма этого ряда удовлетворяет условиям 1–4, приведенным выше. Отметим, что функция $K_z^{(0)}(q, q') = -D(q, q')$ условиям 1–4 удовлетворяет (база индукции), поэтому, сделав описанный выше шаг индукции $n \mapsto n + 1$, мы докажем предложение 1.

Запишем $K_z^{(n+1)}$ в виде сингулярного интеграла:

$$K_z^{(n+1)}(q, q') = -\alpha \int_{\varkappa}^{\infty} \frac{B^{(n)}(z, q, q', y)}{y - z} dy, \quad (2.7)$$

где

$$B^{(n)}(z, q, q', y) = \int_{\Gamma_y} K_z^{(n)}(q, k) D(k, q') d\nu_y(k), \quad \varkappa = a(q_0) = \inf_{\mathbb{R}^3} a(q). \quad (2.8)$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуются две леммы.

ЛЕММА 2. *При всех $z \in \overline{\mathcal{D}}_0$ и $y \geq \varkappa$ имеет место включение $B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, y) \in \mathcal{B}$, и для функции $(z, y) \mapsto B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, y) \in \mathcal{B}$ выполнены условия 1–6 леммы 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опуская очевидные выкладки, для любых мультииндексов $|\alpha_1|, |\alpha_2| \leq 2$ можем записать

$$|\partial_q^{\alpha_1} \partial_{q'}^{\alpha_2} B^{(n)}(z, q, q', y)| \leq \|K_z^{(n)}\| \cdot \|D\| \int_{\Gamma_y} h^2(k) d\nu_y(k) \cdot h(q)h(q').$$

По предположению индукции $K_z^{(n)}(\cdot, \cdot) \in \mathcal{B}$ для всех $z \in \overline{\mathcal{D}}_0$ и $\sup_{z \in \mathcal{D}_0} \|K_z^{(n)}\| < \infty$. Значит, функция $B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, y)$ при любом $z \in \overline{\mathcal{D}}_0$ и любом $y \geq \varkappa$ принадлежит пространству $\mathcal{B}$. При этом для любого $y \geq \varkappa$

$$\|B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, y)\| \leq \|K_z^{(n)}\| \cdot \|D\| \int_{\Gamma_y} h^2(k) d\nu_y(k), \quad (2.9)$$

откуда следует, что выполнено условие 4 леммы 1:

$$\int_{\varkappa}^{\infty} \|B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, y)\| dy \leq L_n \|D\| \int_{\mathbb{R}^3} h^2(k) dk =: R_n < \infty, \quad (2.10)$$

а также условие 5:

$$\sup_{\substack{z \in \overline{\mathcal{D}}_0, \\ y > \varkappa}} \|B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, y)\| \leq L_n \|D\| \int_{\mathbb{R}^3} h^2(k) dk =: M_n < \infty. \quad (2.11)$$

Условие 1 выполнено в силу того, что по предположению индукции ему удовлетворяет функция $K_z^{(n)}$ (см. условия 3, 4 на семейство функций $\{K_z^{(n)}(\cdot, \cdot)\}_{z \in \mathcal{D}_0}$ и определение (2.8)). Ясно также, что $B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, y) \rightarrow B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, \varkappa) = 0$ при $y \downarrow \varkappa$, т.е. условие 6 леммы 1 тоже выполнено. Чтобы доказать гёльдеровость (т.е. выполнение условий 2 и 3) покажем сначала, что

$$\left\| \frac{d}{dy} B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, y) \right\| \leq C(y) \|K_z^{(n)}\| \cdot \|D\|,$$

где функция $C(y)$ ограничена константой вне малой окрестности точки $\varkappa$ и $C(y) \asymp (y - \varkappa)^{-1/2}$ при $y \downarrow \varkappa$. Это неравенство будет вытекать из следующей оценки.

ЛЕММА 3. Пусть f – гладкая функция в $\mathbb{R}^d$ и $I(y) = \int_{\Gamma_y} f(q) d\nu_y(q)$. Тогда для всех $y > \varkappa$

$$\left| \frac{d}{dy} I(y) \right| \leq d^2 \int_{\Gamma_y} \left(\frac{|\nabla f(q)|}{|\nabla a(q)|} + |f(q)| \frac{\sum_{i=1}^d |\partial^2 a / \partial q_i^2|}{|\nabla a(q)|^2} \right) d\nu_y(q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На языке дифференциальных форм интеграл $I(y)$ может быть записан в виде [12] $I(y) = \int_{\Gamma_y} \Omega_0(f)$, где форма $\Omega_0(f) = f\bar{\Omega}$, а $\bar{\Omega}$ – так называемая форма Гельфанда–Лере. Последняя инвариантно связана с Γ_y и в локальных координатах $q_1, q_2, \dots, q_d$ может быть представлена следующим образом:

$$\bar{\Omega} = \left(\frac{\partial a}{\partial q_1} \right)^{-1} dq_2 \dots dq_d.$$

Без ограничения общности можно считать [12], что

$$\frac{\partial a}{\partial q_1} \neq 0, \quad \left| \frac{\partial a}{\partial q_1} \right| \geq \left| \frac{\partial a}{\partial q_i} \right|, \quad i = 2, 3, \dots, d.$$

При этом производная равна

$$\frac{dI}{dy}(y) = \int_{\Gamma_y} \Omega_1(f),$$

где форма $\Omega_1(f)$ в локальных координатах $q_1, q_2, \dots, q_d$ имеет вид (подробнее см. в книге [12])

$$\Omega_1(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \left(\frac{\partial a}{\partial q_1} \right)^{-1} + f \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial a}{\partial q_1} \right)^{-1} \right) \bar{\Omega}.$$

Учитывая, что $d \cdot |\partial a / \partial q_1| \geq |\nabla a|$, приходим к нужной оценке. Лемма 3 доказана.

Применяя лемму 3 к функции $B^{(n)}$ и опуская очевидные выкладки, можем записать

$$\left\| \frac{d}{dy} B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, y) \right\| \leq C(y) \|K_z^{(n)}\| \cdot \|D\|, \quad (2.12)$$

где

$$C(y) = 3^2 \int_{\Gamma_y} \left(\frac{2\sqrt{2}h^2(q)}{|\nabla a(q)|} + h^2(q) \frac{\sum_{i=1}^3 |\partial^2 a / \partial q_i^2|}{|\nabla a(q)|^2} \right) d\nu_y(q).$$

Исследуем поведение функции $C(y)$ в малой окрестности точки $\varkappa$. Разложим функцию a в ряд Тейлора:

$$a(q) = \varkappa + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 a}{\partial q_i \partial q_j}(0) q_i q_j + o(|q|^2), \quad |q| \rightarrow 0.$$

Следовательно, для любого $q \in \Gamma_y$ (где y близко к $\varkappa$)

$$y - \varkappa = a(q) - \varkappa = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 a}{\partial q_i \partial q_j}(0) q_i q_j + o(|q|^2) \asymp q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = |q|^2,$$

другими словами, $y - \varkappa \asymp |q|^2$ для любого $q \in \Gamma_y$ (при $y \downarrow \varkappa$). Учитывая последнюю эквивалентность, а также свойства функций a и h , мы получаем, что

$$\begin{aligned} C(y) &\asymp \left(\frac{1}{(y - \varkappa)^{1/2}} + \frac{1}{y - \varkappa} \right) \int_{\Gamma_y} h^2(q) d\nu_y(q) \asymp \\ &\asymp \left(\frac{1}{(y - \varkappa)^{1/2}} + \frac{1}{y - \varkappa} \right) (y - \varkappa)^{1/2} \asymp (y - \varkappa)^{-1/2}, \quad y \downarrow \varkappa. \end{aligned}$$

Итак, $C(y) \asymp (y - \varkappa)^{-1/2}$ при $y \downarrow \varkappa$. При y , лежащем вне малой окрестности точки $\varkappa$, функция $C(y)$ ограничена константой в силу свойств функций a и h .

Из оценки (2.11) следует гёльдеровость (с показателем $1/2$) по y функции $y \mapsto B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, y)$ (на всем разрезе I и при любом z):

$$\|B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, y_1) - B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, y_2)\| \leq C_2^{(n)} |y_1 - y_2|^{1/2}, \quad |y_1 - y_2| < 1,$$

где $C_2^{(n)} = \bar{C} L_n \|D\|$ и $\bar{C}$ – абсолютная константа.

Далее, по предположению индукции у $K_z^{(n)}$ существуют граничные значения $K_x^{(n)\pm}$. Отсюда следует, что существуют и пределы (по норме пространства $\mathcal{B}$)

$$B^{(n)\pm}(x, q, q', y) = \int_{\Gamma_y} K_x^{(n)\pm}(q, k) D(k, q') d\nu_y(k).$$

При этом для них выполняются оценки (2.9) и (2.10) с соответствующей заменой z на x .

Покажем, что граничные значения $B^{(n)\pm}$ гёльдеровы по x на I . Действительно, мы можем выписать следующую оценку (опустив очевидные выкладки, которые к ней приводят):

$$\|B^{(n)\pm}(x_1, \cdot, \cdot, y) - B^{(n)\pm}(x_2, \cdot, \cdot, y)\| \leq \|K_{x_1}^{(n)\pm} - K_{x_2}^{(n)\pm}\| \cdot \|D\| \int_{\Gamma_y} h^2(k) d\nu_y(k).$$

Так как функции $K_x^{(n)\pm}$ гёльдеровы по x (с показателем $1/2$), то и $B^{(n)\pm}(x, \cdot, \cdot, y)$ гёльдеровы по x с показателем $1/2$ (при любых $y > \varkappa$) и (суммируемым) коэффициентом $C_1^{(n)}(y) = H_n \|D\| \int_{\Gamma_y} h^2(k) d\nu_y(k)$. Лемма 2 доказана.

Теперь уже можно сделать шаг индукции. Действительно, мы имеем формулу (2.7). Рассмотрев более общий интеграл

$$K_{z_1, z_2}^{(n+1)}(q, q') = \int_{\varkappa}^{\infty} \frac{B^{(n)}(z_1, q, q', y)}{y - z_2} dy$$

и применив к нему лемму 1, получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|K_{z_1, z_2}^{(n+1)}\| &\leq A_1 M_n + A_2 C_2^{(n)} + R_n, \\ \|K_{x_1 + \delta_1, x_2 + \delta_2}^{(n+1)\pm} - K_{x_1, x_2}^{(n+1)\pm}\| &\leq C^{(n)} (|\delta_1|^{1/2} + |\delta_2|^{1/2}), \end{aligned}$$

где $C^{(n)} = A_3 (\int C_1^{(n)}(y) dy + C_2^{(n)})$ и A_1, A_2, A_3 – абсолютные константы.

Положим $z_1 = z_2 = z$ и учтем коэффициент α в (2.7), получим

$$\|K_z^{(n+1)}\| \leq \alpha A_1 \|D\| L_n, \quad \|K_{x_1}^{(n+1)\pm} - K_{x_2}^{(n+1)\pm}\| \leq C|x_1 - x_2|^{1/2},$$

где $C = \alpha A_2 \|D\| (H_n + L_n)$ и A_1, A_2 – абсолютные константы. Наконец,

$$\| \|K^{(n+1)}\| \| \leq \alpha C \|D\| (H_n + L_n) = \alpha C \|D\| \cdot \| \|K^{(n)}\| \|,$$

где C – абсолютная константа. Найдется $\alpha > 0$ такое, что $\delta := \alpha C \|D\| < 1$. Учитывая сказанное в самом начале доказательства, можно утверждать, что предложение 1 полностью доказано.

Теперь, зная $R_B(z)$, мы можем выписать решение системы (2.1):

$$f_0 = \frac{1}{\Delta(z)} [g_0 - \alpha(v, R_B(z)g_1)], \quad f_1 = R_B(z)[g_1 - \alpha f_0 v] \quad (2.13)$$

при $z \in \mathcal{D}_0$ и $\Delta(z) := e^0 - z - \alpha^2(v, R_B(z)v) \neq 0$.

Очевидно, что $\Delta(z)$ – аналитическая функция в $\mathcal{D}_0$. Кроме того, $\Delta(z)$ имеет пределы $\Delta^\pm(x) = \Delta(x \pm i0)$ на разрезе I . Существование этих пределов (и их ограниченность) можно доказать по аналогии с доказательством существования непрерывного продолжения на разрез I функции $(R_B(z)g_1, v)$, где $g_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ (см. доказательство предложения 3 ниже).

3. ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР

Из соотношений (2.3) и (2.13) видно, что непрерывный спектр оператора A совпадает с I (в связи с этим можно посмотреть монографии [3] или [17]). Вещественные нули функции $\Delta(z)$, лежащие ниже $\varkappa$, являются собственными значениями A . Используя представление (см., например, [7])

$$(R_B(z)f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - z)^{-1} d(E_B(\lambda)f, g),$$

где $E_B(\cdot)$ – соответствующее оператору B спектральное семейство проекторов, мы видим, что $\alpha^2(v, R_B(x)v)$ возрастает на $(-\infty, \varkappa)$, поэтому $\Delta(x)$ строго убывает от $+\infty$ до $\Delta(\varkappa)$ на этом промежутке. Следовательно, A имеет простое собственное значение $e < \varkappa$ тогда и только тогда, когда $\Delta(\varkappa) < 0$. Собственный вектор в этом случае выглядит так: $\psi_0 = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}$, $f_1 = -\alpha f_0 R_B(e)v$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Оператор A при достаточно малом $\alpha > 0$ не имеет собственных значений, принадлежащих лучу $[\varkappa, \infty)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\Delta^\pm(x) \neq 0$ при $x \in I$. Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (R_B(x \pm i\varepsilon)v, v) &= \int \frac{|v(q)|^2}{a(q) - x \mp i0} dq + \\ &+ \alpha \int \frac{\bar{v}(q)}{a(q) - x \mp i0} \left[\int \frac{K^\pm(\alpha, x, q, q')v(q')}{a(q') - x \mp i0} dq' \right] dq = \\ &= \Phi_1^\pm(x) + \alpha \Phi_2^\pm(\alpha, x). \end{aligned}$$

В силу гладкости $K^\pm$ и v оба интеграла существуют. Применяя формулу Сохоцкого–Племеля, получаем

$$\begin{aligned}\Phi_1^\pm(x) &= \int \frac{|v(q)|^2}{a(q) - x \mp i0} dq = \int_{\mathcal{K}} \frac{\int_{\Gamma_y} |v(q)|^2 d\nu_y(q)}{y - x \mp i0} dy = \\ &= \pm \pi i \int_{\Gamma_x} |v(q)|^2 d\nu_x(q) + (\text{p.v.}) \int_{\mathcal{K}} \frac{\int_{\Gamma_y} |v(q)|^2 d\nu_y(q)}{y - x} dy.\end{aligned}$$

Отсюда $\text{Im } \Phi_1^\pm(x) = \pm \pi \int_{\Gamma_x} |v(q)|^2 d\nu_x(q)$. Далее, можно показать (для случая аналитических функций v и D см. работу [18]; случай гладких функций требует некоторой модификации), что

$$\text{Im } \Phi_2^\pm(\alpha, x) = w^\pm(x) \sqrt{x - \mathcal{K}} + W^\pm(x),$$

где w и W суть аналитические в $\mathcal{D}_0 \cap \{|z - \mathcal{K}| < r\}$ (для некоторого r) функции, имеющие пределы на разрезе I и ограниченные всюду некоторой константой M . При этом можно считать (не умаляя общности), что $W^\pm(\mathcal{K}) = \text{Im } \Phi_2^\pm(\alpha, \mathcal{K}) \neq 0$ (равенство нулю – исключительный случай, которого можно избежать слегка “пошевелив” α).

Итак, для всех $x \in I$ при достаточно малом $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}|\text{Im } \Delta^\pm(x)| &= \alpha^2 |\text{Im}(R_B^\pm(x)v, v)| = \alpha^2 |\text{Im } \Phi_1^\pm(x) + \alpha \text{Im } \Phi_2^\pm(\alpha, x)| = \\ &= \alpha^2 \left| \pm \pi \int_{\Gamma_x} |v(q)|^2 d\nu_x(q) + \alpha w^\pm(x) \sqrt{x - \mathcal{K}} + \alpha W^\pm(x) \right| > 0.\end{aligned}$$

Это следует из того, что $\int_{\Gamma_x} |v(q)|^2 d\nu_x(q) \asymp \sqrt{x - \mathcal{K}}$ (см. (1.6)), из ограниченности функций $w^\pm$, $W^\pm$, а также из того, что $W^\pm(\mathcal{K}) \neq 0$. Таким образом, $\Delta^\pm(x) \neq 0$ при $x \in I$, а значит, на непрерывном спектре нет собственных значений. Предложение 2 доказано.

4. НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР

Выше мы уже отметили, что непрерывный спектр оператора A совпадает с I . Покажем теперь, что он является абсолютно непрерывным, т. е. что сингулярный непрерывный спектр отсутствует.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При достаточно малых $\alpha > 0$ непрерывный спектр I оператора A является абсолютно непрерывным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу известного критерия отсутствия сингулярного спектра (см. монографию [19], теорема XIII.20) достаточно доказать ограниченность $|(\varphi, R_A(z)\varphi)|$ на каждом прямоугольнике $M_{(a,b)} = \{z = x + iy : x \in (a, b), y \in (0, 1)\}$, $(a, b) \subset I$, для всюду плотного множества $\mathcal{D}$ элементов φ . В нашем случае $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1(\cdot)) \in \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{R}^3, dq)$, поэтому в соответствии с (2.12)

$$\begin{aligned}|(\varphi, R_A(z)\varphi)| &= \left| \overline{\varphi}_0 f_0 + \int \overline{\varphi}_1(q) f_1(q) dq \right| = \\ &= \left| \frac{\overline{\varphi}_0 [\varphi_0 - \alpha(v, R_B(z)\varphi_1)]}{\Delta(z)} + (\varphi_1, R_B(z)\varphi_1) - \alpha f_0(\varphi_1, R_B(z)v) \right|. \quad (4.1)\end{aligned}$$

Зафиксируем интервал $(a, b) \subset I$. Так как $|\Delta^\pm(x)| > 0$ на I , функция $|\Delta(z)|^{-1}$ ограничена сверху в комплексной окрестности интервала (a, b) . Поэтому достаточно показать, что функции $|(v, R_B(z)\varphi_1)|$, $|(\varphi_1, R_B(z)\varphi_1)|$, а также функция $|(\varphi_1, R_B(z)v)|$ ограничены на $M_{(a,b)}$; при этом φ_1 будем считать принадлежащей плотному в $L_2(\mathbb{R}^3, dq)$ подмножеству $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Если мы это покажем, то, взяв в качестве плотного множества $\mathcal{D} = \{(c, 0) : c \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, \varphi_1(\cdot)) : \varphi_1(\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)\}$, мы сможем воспользоваться упомянутым выше критерием.

Рассмотрим $|(v, R_B(z)\varphi_1)|$, для оставшихся двух слагаемых в (4.1) рассуждения аналогичны. Имеем

$$(v, R_B(z)\varphi_1) = \int \frac{\bar{v}(q)\varphi_1(q)}{a(q) - z} dq + \alpha \int \frac{\bar{v}(q)}{a(q) - z} \left[\int \frac{K(\alpha, z, q, q')\varphi_1(q')}{a(q') - z} dq' \right] dq. \quad (4.2)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части равенства. Пусть

$$\Psi(z) = \int_{\mathcal{K}} \frac{\psi(y)}{y - z} dy, \quad \psi(y) = \int_{\Gamma_y} \bar{v}(q)\varphi_1(q) d\nu_y(q).$$

Функция $\psi(\cdot)$ удовлетворяет условию Гёльдера на I с показателем $1/2$. Это доказывается точно так же, как и соответствующее утверждение для функции $y \mapsto B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, y)$ в предложении 1.

Применяя лемму 1, мы получаем, что существует функция $\Psi^+(x) = \Psi(x + i0)$, удовлетворяющая условию Гёльдера на I с показателем $1/2$. Аналитическая функция $\Psi = \Psi(z)$ на I продолжается по непрерывности и равномерно, и функция $\Psi^+ = \Psi^+(x)$ непрерывна на I , поэтому $|\Psi|$ ограничена на $M_{(a,b)}$. Следовательно, первое слагаемое в (4.2) ограничено.

Рассмотрим теперь интеграл в (4.2), заключенный в квадратные скобки. Обозначим его через $F(\alpha, z, q)$ и представим в виде сингулярного интеграла:

$$F(\alpha, z, q) = \int_{\mathcal{K}} \frac{f(\alpha, z, q, y)}{y - z} dy, \quad f(\alpha, z, q, y) = \int_{\Gamma_y} K(\alpha, z, q, q')\varphi_1(q') d\nu_y(q').$$

Введем в рассмотрение банахово пространство

$$\mathcal{B}' = \{g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}, |\partial_q^k g(q)| \leq Nh(q), |k| \leq 2\} \quad (4.3)$$

с нормой $\|g\|' = \inf N$, где нижняя грань берется по всем N из (4.3). Будем смотреть на f как на $\mathcal{B}'$ -значную функцию переменных z и y . Учитывая сказанное о ядре K в предложении 1, мы можем продолжить функцию $z \mapsto f(\alpha, z, \cdot, y)$ на I по непрерывности (при каждом $y > \mathcal{K}$). Продолженная функция f будет удовлетворять на разрезе I условию Гёльдера (с тем же показателем $1/2$, что и функция K).

Можно показать, что по переменной y функция f гёльдерова (с показателем $1/2$). Для этого достаточно повторить выкладки, которые были проделаны выше для функции $y \mapsto B^{(n)}(z, \cdot, \cdot, y)$, с очевидными изменениями. Применяя к функции F лемму 1, мы можем утверждать, что существует непрерывное продолжение F^+ функции F на разрез I . При этом

$$\|F^+(\alpha, x_1, \cdot) - F^+(\alpha, x_2, \cdot)\|' \leq C|x_1 - x_2|^{1/2}, \quad |x_1 - x_2| < 1.$$

Таким образом, функция $x \mapsto F^+(\alpha, x, \cdot)$ является гёльдеровой с показателем $1/2$.

Рассматривая второе слагаемое в (4.2) целиком и применяя лемму 1 (с учетом выясненных выше свойств F и повторения рассуждений, аналогичных предыдущим), мы видим, что оно ограничено на прямоугольнике $M_{(a,b)}$. Предложение 3 доказано.

Поскольку непрерывный спектр является абсолютно непрерывным, мы можем записать

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \mathcal{H}^{\text{ac}}, & \Delta(\varkappa) \geq 0, \\ \{c\psi_0\} \oplus \mathcal{H}^{\text{ac}}, & \Delta(\varkappa) < 0. \end{cases}$$

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПОЛНОТА

Перейдем теперь к теории рассеяния для пары самосопряженных операторов (A, B_0) , где B_0 – оператор умножения на функцию $a = a(q)$, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$. Через J мы обозначим вложение $\varphi \mapsto J\varphi = (0, \varphi) \in \mathcal{H}$, $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^3)$, а через P_0 – проектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора B_0 . Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Существуют (сильные) волновые операторы*

$$W_{\pm} = W_{\pm}(A, B_0; J) = \text{s.} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itA} J e^{-itB_0} P_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем, применяя теорему Пирсона [20] для пары пространств. Согласно этой теореме достаточно доказать существование оператора $C: L_2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{H}$ такого, что

$$(\varphi, C\psi) = (A\varphi, J\psi) - (\varphi, JB_0\psi) \quad (5.1)$$

для всех φ, ψ , причем $(C^*C)^{1/2}$ должен быть оператором со следом. Найдя вид искомого оператора непосредственно из (5.1), после несложных преобразований получаем, что

$$(C^*C\psi)(q) = \alpha^2 \int \left[v(q)\bar{v}(\tilde{q}) + \int D(q, q')D(q', \tilde{q}) dq' \right] \psi(\tilde{q}) d\tilde{q}.$$

Представим положительный оператор C^*C в виде суммы двух операторов: $C^*C = R + S^2$, где

$$(R\psi)(q) = \alpha^2 \int v(q)\bar{v}(\tilde{q})\psi(\tilde{q}) d\tilde{q}, \quad (S\psi)(q) = \alpha \int D(q, \tilde{q})\psi(\tilde{q}) d\tilde{q}.$$

Операторы R и S компактны, причем единственным сингулярным (и собственным) числом оператора R является $s_1(R) = \alpha^2 \int |v(q)|^2 dq$. Используя известные неравенства для сингулярных чисел [21], легко показать (выкладки мы ради краткости опускаем), что

$$\sum_j s_j((C^*C)^{1/2}) \leq (s_1(R) + s_1(S^2))^{1/2} + \sum_{j>1} s_j(S).$$

Сингулярные числа здесь упорядочены по убыванию. Сходимость ряда $\sum_{j>1} s_j(S)$ из сингулярных чисел оператора S следует из теоремы 3 работы [22]: применительно к нашему случаю (с учетом одной оговорки, касающейся области интегрирования) она утверждает, что $s_j(S) = o(j^{-7/6})$, $j > 1$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Волновые операторы $W_{\pm}(A, B_0; J)$ полны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $J_1: \mathcal{H} \rightarrow L_2(\mathbb{R}^3)$ – оператор, сопоставляющий каждому элементу $(f_0, f_1(\cdot)) \in \mathcal{H}$ его вторую компоненту $f_1(\cdot)$. Этот оператор ограничен. Согласно известному критерию [7] для доказательства полноты достаточно показать, что выполнены следующие условия: во-первых, существуют волновые операторы $W_{\pm}(B_0, A; J_1)$; во-вторых, $\text{s.}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J_1 J - I)U_0(t)P_0 = 0$; в-третьих, $\text{s.}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J J_1 - I)U(t)P = 0$. Здесь $U_0(t) = e^{-iB_0 t}$, $U(t) = e^{-iA t}$ – унитарные группы операторов B_0 и A соответственно, P_0, P – проекторы на абсолютно непрерывные подпространства операторов B_0, A .

Второе условие, очевидно, выполнено, так как оператор, стоящий в скобках, нулевой. Заметим далее, что оператор $J J_1 - I$ является одномерным, а значит, компактным. Поэтому, учитывая известное свойство абсолютно непрерывных элементов [7], можно утверждать, что третье условие тоже выполнено. Для доказательства существования волновых операторов $W_{\pm}(B_0, A; J_1)$ опять воспользуемся теоремой Пирсона. Найдя явное выражение для оператора C , фигурирующего в условии этой теоремы, мы можем выписать формулы для оператора $C^*C: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Пусть $\psi = (\psi_0, \psi_1(\cdot)) \in \mathcal{H}$. Простое вычисление показывает, что

$$(C^*C\psi)_0 = \alpha^2 \left(\int |v(q)|^2 dq + \int \bar{\Phi}(q')\psi_1(q') dq' \right),$$

$$(C^*C\psi)_1(q) = \alpha^2 \left(\Phi(q)\psi_0 + \int \left[\int D(q, q')D(q', q'') dq' \right] \psi_1(q'') dq'' \right),$$

где $\Phi(q) = \int D(q, q')v(q') dq'$. В соответствии с теоремой Пирсона нам нужно доказать, что $(C^*C)^{1/2}$ – оператор со следом. С этой целью представим C^*C в виде суммы $C^*C = L + K^2$, где оператор K действует по правилу

$$(K\psi)_0 = 0, \quad (K\psi)_1(q) = \int D(q, q')\psi_1(q') dq',$$

а $L = C^*C - K^2$. Легко проверяется, что L имеет лишь конечное число собственных значений (не более двух). Используя неравенства для сингулярных чисел, мы можем свести доказательство сходимости ряда $\sum s_j((C^*C)^{1/2})$ из (упорядоченных по убыванию) сингулярных чисел оператора $(C^*C)^{1/2}$ к доказательству сходимости ряда $\sum s_j(K)$. Сходимость последнего ряда устанавливается применением теоремы 3 из работы [22], как это было сделано выше при доказательстве предложения 4. Предложение 5 доказано.

Из существования и полноты волновых операторов $W_{\pm}$ вытекает унитарная эквивалентность абсолютно непрерывных частей операторов A и B_0 .

6. ОБОБЩЕННЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ОПЕРАТОРА A

Обратимся теперь к поиску обобщенных собственных векторов ψ^q оператора A , соответствующих собственным значениям $a(q)$. Отметим сначала, что оператор A , переводящий своей второй компонентой пространство B' (см. (4.3)) в себя, может быть продолжен на пространство $(B')^*$ линейных непрерывных функционалов (на B'). Это продолжение задается формулой

$$(AF)\varphi = F(J_1 A J \varphi), \quad F \in (B')^*, \quad \varphi \in B', \quad (6.1)$$

где, напомним, $J\varphi = (0, \varphi)$, $\varphi \in B'$, $J_1(g_0, g_1) = g_1$, $(g_0, g_1) \in \mathcal{H}$.

Обобщенные собственные функции оператора B_0 — это $\delta_q(\cdot) = \delta(q - \cdot)$, известно также, что

$$\psi^q = W_+ \delta_q = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon R_A(a(q) + i\varepsilon) J \delta_q. \quad (6.2)$$

Отметим, что выражение, стоящее под знаком предела, осмысленно, так как мы продолжили A на $(B')^*$, следовательно, продолжилась и резольвента. Второе равенство в (6.2) следует из того, что существует нестационарный волновой оператор, действующий как

$$W_+ \psi = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itA} J e^{-itB_0} \psi = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{K}} e^{itA} J e^{-ity} dP_{B_0}(y) \psi, \quad \psi \in B', \quad (6.3)$$

где $P_{B_0}(y)$ — спектральное семейство для B_0 , $P_{B_0}(y)\psi = \chi_{\{a(q) \leq y\}}\psi$, поэтому существует стационарный волновой оператор. Следовательно, определен предел

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon \int_{\mathcal{K}} \left(\int_0^\infty e^{-\varepsilon t - ity} e^{itA} dt \right) J dP_{B_0}(y) \psi = \\ = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon \int_{\mathcal{K}} R_A(y + i\varepsilon) J dP_{B_0}(y) \psi, \end{aligned} \quad (6.4)$$

совпадающий с (6.3). Остается воспользоваться формулой (6.1) и получить (6.2).

С использованием формул (6.2), (2.13) и (2.3) можно получить для обобщенных собственных векторов ψ^q выражения, удобные для вычислений: $\psi^q = (f_0^q, f_1^q(\cdot))$, где

$$\begin{aligned} f_0^q &= -\frac{\alpha}{\Delta^-(a(q))} \left[v(q) + \alpha \int \frac{K^-(\alpha, a(q); q', q) \bar{v}(q')}{a(q') - a(q) + i0} dq' \right], \\ f_1^q(q') &= \delta(q - q') + \frac{\alpha K^-(\alpha, a(q); q', q)}{a(q') - a(q) + i0} - \alpha f_0^q \frac{1}{a(q') - a(q) + i0} \times \\ &\times \left[v(q') + \alpha \int \frac{K^-(\alpha, a(q); q', q'') \bar{v}(q'')}{a(q'') - a(q) + i0} dq'' \right]. \end{aligned}$$

Переходя к сингулярному интегралу, можно убедиться, что f_0^q является ограниченной непрерывной функцией переменной q , откуда следует существование интеграла $\int f_0^q \varphi(q) dq$ для любой функции $\varphi \in B'$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. 1. При каждом фиксированном q имеет место включение $f_1^q(\cdot) \in (\mathcal{B}')^*$. Более точно, функционал L , определяемый выражением

$$Lg = \int f_1^q(q')g(q') dq', \quad g \in \mathcal{B}',$$

является линейным непрерывным функционалом на $\mathcal{B}'$.

2. Отображение B , определяемое формулой

$$(Bg)(q') = \int f_1^q(q')g(q) dq,$$

является линейным непрерывным оператором на пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$, совпадающим с оператором J_1W_+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Достаточно доказать, что $|Lg| \leq C\|g\|'$ для любого $g \in \mathcal{B}'$, где C – некоторая абсолютная константа. Приводить это доказательство мы здесь не будем. Оно несложное, но громоздкое – нужно убедиться в том, что для сингулярных интегралов, соответствующих каждому из слагаемых в формуле для $f_1^q(q')$, начиная со второго, лемма 1 дает оценку сверху вида $\|\cdot\| \leq C\|g\|'$. Для первого слагаемого $\delta(q - q')$ это очевидно.

2. Из соотношений (6.3) и (6.4) следует, что

$$\begin{aligned} (J_1W_+)\psi &= J_1 \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon \int R_A(y + i\varepsilon) J dP_{B_0}(y) \psi = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon \int_0^\infty \int_{\Gamma_y} T(y + i\varepsilon, q, q') \psi(q') d\nu_y(q') dy, \end{aligned}$$

где T – ядро второй компоненты резольвенты R_A (см. (2.13)). Последнее соотношение мы можем записать в виде

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon \int T(a(q') + i\varepsilon, q, q') \psi(q') dq' = \int \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon T(a(q') + i\varepsilon, q, q') \psi(q') dq'.$$

Предел под интегралом существует (стремящийся к нулю множитель $i\varepsilon$ компенсирует одну из особенностей в каждом слагаемом ядра T , а переход к сингулярному интегралу и свойство гёльдеровости показывают существование предела) и равен в точности $f_1^q(q')$. Предложение доказано.

Из полноты волновых операторов, установленной выше, следует, что $W_+L_2(\mathbb{R}^3) = \mathcal{H}^{\text{ac}} \subset \mathcal{H}$. С учетом утверждения 6 это означает, что для каждого $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{H}^{\text{ac}}$ существует функция $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ такая, что $\int f_1^q(q')\psi(q) dq = \varphi_1(q')$.

Благодарности. Автор благодарен Р.А. Минлосу за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

- [1] К. О. Friedrichs, *Math. Ann.*, **115**:1 (1938), 249–272.
- [2] С. Н. Лакаев, “Some special properties of the generalized Friedrichs model”, Труды семинара им. И. Г. Петровского, **11**, 1986, 210–223.
- [3] К. Фридрихс, *Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве*, М., 1969.
- [4] К. О. Friedrichs, *Comm. Pure Appl. Math.*, **1**:4 (1948), 361–406.
- [5] Л. Д. Фаддеев, *Докл. АН СССР*, **145**:2 (1962), 301–304.
- [6] Л. Д. Фаддеев, “О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра”, *Краевые задачи математической физики. 2*, Сборник работ. Посвящается памяти Владимира Андреевича Стеклова в связи со столетием со дня его рождения, Труды МИАН СССР, **73**, Наука, М., 1964, 292–313.
- [7] Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния*, Изд-во СПбГУ, СПб., 1994.
- [8] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985.
- [9] N. Anghel, R. A. Minlos, V. A. Zagrebnov, *Rev. Math. Phys.*, **17**:10 (2005), 1111–1142.
- [10] К. Болдригини, Р. А. Минлос, А. Пеллегринотти, *УМН*, **62**:4(376) (2007), 27–76.
- [11] Е. Л. Лакштанов, Р. А. Минлос, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:3 (2004), 52–69.
- [12] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Вып. 1, Физматлит, М., 1959.
- [13] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, Гостехиздат, М.-Л., 1950.
- [14] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, М., 1968.
- [15] S. Bochner, *Fundam. Math.*, **20** (1933), 262–276.
- [16] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
- [17] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1966.
- [18] С. Boldrighini, R. A. Minlos, A. Pellegrinotti, *Probab. Theory Relat. Fields*, **129**:1 (2004), 133–156.
- [19] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [20] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния*, Мир, М., 1982.
- [21] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965.
- [22] В. И. Параска, *Матем. сб.*, **68(110)**:4 (1965), 623–631.

Поступила в редакцию 3.09.2009