Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Х. Расулов, Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 1, 34–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 03:32:27

© 2010 г.

Т. Х. Расулов*

АСИМПТОТИКА ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, АССОЦИИРОВАННОГО С СИСТЕМОЙ ТРЕХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

Рассматривается модельный оператор Шредингера H_μ , ассоциированный с системой трех частиц на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$, с параметром-функцией специального вида. Доказано, что если соответствующая модель Фридрихса имеет резонанс с нулевой энергией, то у оператора H_μ существует бесконечное число отрицательных собственных значений, накапливающихся в нуле (эффект Ефимова). Получена асимптотика числа собственных значений оператора H_μ , лежащих ниже z , при $z \rightarrow -0$.

Ключевые слова: модельный оператор, модель Фридрихса, принцип Бирмана–Швингера, эффект Ефимова, оператор Гильберта–Шмидта, резонанс с нулевой энергией, дискретный спектр.

1. ВВЕДЕНИЕ

В спектральной теории непрерывного и решетчатого трехчастичных операторов Шредингера имеется следующий замечательный результат: если в системе трех частиц, взаимодействие которых описывается парными короткодействующими потенциалами, ни одна из трех двухчастичных подсистем не имеет связанных состояний с отрицательной энергией, но по меньшей мере две из этих систем имеют резонанс с нулевой энергией, то у этой трехчастичной системы существует бесконечное число связанных состояний с отрицательными энергиями, накапливающимися в нуле. Этот эффект впервые был обнаружен Ефимовым [1] и в случае непрерывного оператора Шредингера подробно обсуждался во многих работах (см., например, статьи [2]–[4]). Основным результатом работы [3] является асимптотика вида $\mathcal{U}_0 |\ln |\lambda||$ для числа собственных значений трехчастичного непрерывного оператора Шредингера, лежащих левее $\lambda < 0$, где коэффициент $\mathcal{U}_0 > 0$ зависит только от частных масс трех частиц (см. также работу [4]). Недавно в работе [5] было доказано наличие эффекта Ефимова в N -частичной квантовой системе, $N \geq 4$, и получена оценка снизу числа собственных значений полного гамильтониана. Для системы трех частиц на решетке существование эффекта Ефимова обнаружено в работах [6], [7],

*Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан. E-mail: rth@mail.ru

а строгое доказательство изложено в работах [8], [9], а затем в работах [10]–[12], причем в статьях [11], [12] получена аналогичная непрерывному случаю асимптотика дискретного спектра системы трех частиц на решетке.

В настоящей работе рассматривается модельный оператор $H_\mu = H_0 - \mu V_1 - \mu V_2$, $\mu > 0$, ассоциированный с системой трех частиц на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$, в случае специального вида функции w , являющейся параметром оператора H_0 (см. ниже формулы (1), (2)). Эта функция имеет невырожденный минимум в $n > 1$ различных точках шестимерного тора. Доказано, что если модель Фридрихса имеет резонанс с нулевой энергией, то число отрицательных собственных значений оператора H_μ бесконечно, и эти собственные значения накапливаются в нуле; кроме того, получена асимптотика для числа $N_\mu(z)$ собственных значений оператора H_μ , лежащих ниже $z < 0$. Следует отметить, что спектр и асимптотика дискретного спектра несимметричного модельного оператора H_μ изучен в [13] в случае произвольной функции w с $n = 1$ невырожденным минимумом. Асимптотика, полученная в настоящей работе, является обобщением асимптотик из работ [3], [4], [11]–[13].

Структура статьи такова. В разделе 2 вводится модельный оператор Шредингера H_μ , который рассматривается как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, и формулируется основной результат работы. В разделе 3 изучаются некоторые спектральные свойства модели Фридрихса, которые играют важную роль при анализе дискретного спектра оператора H_μ . В разделе 4 для оператора H_μ получено утверждение, отражающее известный принцип Бирмана–Швингера. Раздел 5 посвящен доказательству основного результата.

2. МОДЕЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $\mathbf{T}^3 = (-\pi; \pi]^3$ – трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Мы рассматриваем $\mathbf{T}^3$ как абелеву группу, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^3$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^3$. Пусть $(\mathbf{T}^3)^2 = \mathbf{T}^3 \times \mathbf{T}^3$ – декартово произведение, $L_2(\mathbf{T}^3)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbf{T}^3$, и $L_2^s((\mathbf{T}^3)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых симметричных (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbf{T}^3)^2$.

Рассмотрим следующий модельный оператор H_μ в пространстве $L_2^s((\mathbf{T}^3)^2)$:

$$H_\mu = H_0 - \mu V_1 - \mu V_2,$$

где действие операторов H_0 и V_i , $i = 1, 2$, определяется по формулам

$$\begin{aligned} (H_0 f)(p, q) &= w(p, q) f(p, q), \\ (V_1 f)(p, q) &= \varphi(p) \int_{\mathbf{T}^3} \varphi(s) f(s, q) ds, \\ (V_2 f)(p, q) &= \varphi(q) \int_{\mathbf{T}^3} \varphi(s) f(p, s) ds. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь μ – положительное действительное число, $\varphi(\cdot)$ – вещественно-аналитическая, четная функция на $\mathbf{T}^3$, а функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет вид

$$w(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(p + q) + \varepsilon(q),$$

$$\varepsilon(p) = \sum_{j=1}^3 (1 - \cos(mp^{(j)})), \quad p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in \mathbf{T}^3, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

При этих предположениях оператор H_μ является ограниченным и самосопряженным в $L_2^s((\mathbf{T}^3)^2)$.

Для формулировки основного результата введем оператор $h_\mu(p)$ модели Фридрихса, действующий в $L_2(\mathbf{T}^3)$, как $h_\mu(p) = h_0(p) - \mu v$, где операторы $h_0(p)$ и v определяются по правилам

$$(h_0(p)f_1)(q) = w(p, q)f(q), \quad (vf)(q) = \varphi(q) \int_{\mathbf{T}^3} \varphi(s)f(s) ds, \quad p \in \mathbf{T}^3.$$

Возмущение μv оператора $h_0(p)$ является самосопряженным одномерным оператором. Из известной теоремы Вейля [14] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(p))$ оператора $h_\mu(p)$ совпадает с существенным спектром оператора $h_0(p)$. Известно, что $\sigma_{\text{ess}}(h_0(p)) = [m(p); M(p)]$, где числа $m(p)$ и $M(p)$ определяются равенствами

$$m(p) = \varepsilon(p) + 2 \sum_{j=1}^3 \left(1 - \cos \frac{mp^{(j)}}{2}\right), \quad M(p) = \varepsilon(p) + 2 \sum_{j=1}^3 \left(1 + \cos \frac{mp^{(j)}}{2}\right).$$

Следовательно, $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(p)) = [m(p); M(p)]$.

Следующая теорема описывает положение существенного спектра оператора H_μ .

ТЕОРЕМА 1 [13]. *Существенный спектр оператора H_μ имеет вид*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\mu) = \bigcup_{p \in \mathbf{T}^3} \left\{ \sigma_{\text{disc}}(h_\mu(p)) \cup \left[0; \frac{27}{2}\right] \right\},$$

где через $\sigma_{\text{disc}}(h_\mu(p))$ обозначен дискретный спектр оператора $h_\mu(p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множества $\bigcup_{p \in \mathbf{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h_\mu(p))$ и $[0; 27/2]$ называются соответственно *двухчастичной* и *трехчастичной ветвями* существенного спектра оператора H_μ .

Обозначим через $n \equiv n(m)$ число точек $(p_i, q_j) \in (\mathbf{T}^3)^2$, $p_i = (p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, p_i^{(3)})$, $q_j = (q_j^{(1)}, q_j^{(2)}, q_j^{(3)})$, для которых

$$p_i^{(k)}, q_j^{(k)} \in \left\{ 0, \pm \frac{2}{m} \pi, \pm \frac{4}{m} \pi, \dots, \pm \frac{m'}{m} \pi \right\}, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$p_s \neq p_l, \quad q_s \neq q_l \quad \text{при} \quad s \neq l;$$
(3)

здесь

$$m' = \begin{cases} m - 2, & \text{если } m - \text{четное число,} \\ m - 1, & \text{если } m - \text{нечетное число.} \end{cases}$$

Можно легко проверить, что $n = (m' + 1)^6$ и функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках $(p_i, q_j) \in (\mathbf{T}^3)^2$. Дополнительно будем предполагать, что $m \geq 3$ (если $m = 1, 2$, то $n = 1$, а в настоящей работе нам интересен случай $n > 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При изучении дискретного спектра оператора H_μ основную роль играют нули функции $\varphi(\cdot)$ в точках $q_j \in \mathbf{T}^3$, $j = \overline{1, \sqrt{n}}$ (см., например, [13]). Предположим, что только в n_0 точках ($1 < n_0 \leq \sqrt{n}$) множества $\{q_j\}_{j=1}^{\sqrt{n}}$ функция $\varphi(\cdot)$ отлична от нуля. Пусть

$$\mathbf{n} = n_0 \sqrt{n}. \quad (4)$$

Рассмотрим множество $\{(p_{s_i}, q_{s_i}) \in (\mathbf{T}^3)^2 : i = \overline{1, n}\}$, где $s_i = \overline{1, n}$, такое, что $\varphi(q_{s_i}) \neq 0$ при $i = \overline{1, \mathbf{n}}$ и $\varphi(q_{s_i}) = 0$ при $i = \overline{\mathbf{n} + 1, n}$. Здесь (p_{s_i}, q_{s_i}) , $i = \overline{1, n}$, – точки множества, заданного в (3), перенумерованные в соответствии с правилом

$$p_{s_{k-1}\sqrt{n}+j} = p_k, \quad k, j = \overline{1, n}; \quad q_{s_{k-1}\sqrt{n_0}+j} = q_j, \quad k, j = \overline{1, n_0}.$$

Другими словами, если расположить точки $(p_i, q_j)_{i,j=1}^{\sqrt{n}}$ в виде квадратной таблицы

$$\begin{array}{cccccc} (p_1, q_1) & (p_1, q_2) & \dots & (p_1, q_{n_0}) & \dots & (p_1, q_{\sqrt{n}}) \\ (p_2, q_1) & (p_2, q_2) & \dots & (p_2, q_{n_0}) & \dots & (p_2, q_{\sqrt{n}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (p_{\sqrt{n}}, q_1) & (p_{\sqrt{n}}, q_2) & \dots & (p_{\sqrt{n}}, q_{n_0}) & \dots & (p_{\sqrt{n}}, q_{\sqrt{n}}) \end{array},$$

то элементы левой части этой таблицы с номерами столбцов $j = \overline{1, n_0}$, $n_0 \leq \sqrt{n}$, перечисляются слева направо вдоль строки и от верхней строки к нижней, а остальные – в произвольном порядке.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Имеет место равенство $h_\mu(p_{s_1}) \equiv h_\mu(p_{s_i})$, $i = \overline{2, n}$.

Пусть $C(\mathbf{T}^3)$ ($L_1(\mathbf{T}^3)$) – банахово пространство непрерывных (соответственно, интегрируемых) функций на $\mathbf{T}^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что оператор $h_\mu(p_{s_1})$ имеет *резонанс с нулевой энергией*, если число 1 является собственным значением интегрального оператора G_μ ,

$$(G_\mu \psi)(q) = \frac{\mu \varphi(q)}{2} \int_{\mathbf{T}^3} \frac{\varphi(s) \psi(s) ds}{\varepsilon(s)}, \quad \psi \in C(\mathbf{T}^3),$$

и по крайней мере одна (с точностью до постоянного множителя) соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию $\psi(q_{s_i}) \neq 0$, $i = \overline{1, \mathbf{n}}$.

Если оператор $h_\mu(p_{s_1})$ имеет резонанс с нулевой энергией, то функция

$$f(q) = \frac{\mu \varphi(q)}{2\varepsilon(q)} \in L_1(\mathbf{T}^3) \setminus L_2(\mathbf{T}^3) \quad (5)$$

удовлетворяет уравнению $h_\mu(p_{s_1})f = 0$ (см. лемму 7 настоящей работы).

Положим

$$\mu_0 = 2 \left(\int_{\mathbf{T}^3} \frac{\varphi^2(s) ds}{\varepsilon(s)} \right)^{-1}. \quad (6)$$

Оператор $h_\mu(p_{s_1})$ имеет резонанс с нулевой энергией тогда и только тогда, когда $\mu = \mu_0$ (см. лемму 2).

Обозначим через $\tau_{\text{ess}}(H_\mu)$ нижнюю грань существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu)$ оператора H_μ и через $N_\mu(z)$ – число собственных значений (с учетом кратности) оператора H_μ , лежащих левее точки $z < \tau_{\text{ess}}(H_\mu)$. Величина $\tau_{\text{ess}}(H_{\mu_0}) = 0$, т.е. оператор $h_{\mu_0}(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, не имеет отрицательных собственных значений (см. лемму 6).

Теперь сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 2. *Оператор H_{μ_0} имеет бесконечное число отрицательных собственных значений, накапливающихся в нуле, и для функции $N_{\mu_0}(\cdot)$ справедливо равенство*

$$\lim_{z \rightarrow -0} \frac{N_{\mu_0}(z)}{|\ln |z||} = \frac{\mathbf{n}\gamma_0}{4\pi}, \quad (7)$$

где число $\mathbf{n}$ определено в замечании 1 (см. формулу (4)) и число γ_0 есть единственный положительный корень уравнения

$$\gamma\sqrt{3} \cos h \frac{\pi\gamma}{2} = 8 \sin h \frac{\pi\gamma}{6}. \quad (8)$$

Видно, что в силу равенства (7) из положительности числа γ_0 вытекает, что число точек дискретного спектра оператора H_{μ_0} бесконечно. Отметим также, что асимптотика (7) является новым результатом и что аналогичная асимптотика не была получена для трехчастичного оператора Шредингера на $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{Z}^3$.

3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА $h_\mu(p)$

В этом разделе мы рассмотрим некоторые спектральные свойства оператора модели Фридрихса $h_\mu(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, которые играют важную роль при изучении дискретного спектра оператора H_μ .

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость. Для любого $p \in \mathbf{T}^3$ определим аналитическую функцию $\Delta_\mu(p, \cdot)$ (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $h_\mu(p)$):

$$\Delta_\mu(p, z) = 1 - \mu \int_{\mathbf{T}^3} \frac{\varphi^2(q) dq}{w(p, q) - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_\mu(p)).$$

Теперь установим связь между собственными значениями оператора $h_\mu(p)$ и нулями функции $\Delta_\mu(p, \cdot)$.

ЛЕММА 1 [13]. *При каждом фиксированном $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h_\mu(p)$ имеет собственное значение $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_\mu(p))$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(p, z) = 0$.*

Функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет невырожденный минимум, равный нулю, в точках $(p_{s_i}, q_{s_i}) \in (\mathbf{T}^3)^2$, $i = 1, n$, и функция $\varphi(\cdot)$ является аналитической на $\mathbf{T}^3$, поэтому существует конечный интеграл

$$\int_{\mathbf{T}^3} \frac{\varphi^2(q) dq}{w(p, q)}, \quad p \in \mathbf{T}^3.$$

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега и равенства $\Delta_\mu(p_{s_i}, 0) = \Delta_\mu(p_{s_1}, 0)$, $i = \overline{2, n}$, следует, что

$$\Delta_\mu(p_{s_1}, 0) = \lim_{p \rightarrow p_{s_i}} \Delta_\mu(p, 0), \quad i = \overline{1, n}.$$

Следующие три леммы играют важную роль при доказательстве основного результата, т.е. теоремы 2. Мы не приводим доказательство этих лемм, поскольку оно аналогично доказательству соответствующих лемм из работ [11], [13].

ЛЕММА 2. *Оператор $h_\mu(p_{s_1})$ имеет резонанс с нулевой энергией тогда и только тогда, когда $\mu = \mu_0$.*

ЛЕММА 3. *Имеет место разложение*

$$\Delta_{\mu_0}(p, z) = \frac{\pi^2 \mu_0}{m^2} \sum_{j=1}^n \varphi^2(q_{s_j}) \sqrt{\frac{3}{4} |p - p_{s_i}|^2 - z} + O(|p - p_{s_i}|^2) + O(|z|)$$

при $|p - p_{s_i}| \rightarrow 0$, $i = \overline{1, n}$, и $z \rightarrow -0$.

Положим

$$U_\delta(p_0) = \{p \in \mathbf{T}^3 : |p - p_0| < \delta\}, \quad p_0 \in \mathbf{T}^3, \quad \delta > 0.$$

ЛЕММА 4. *Существуют числа $C_1, C_2, C_3 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что выполняются следующие неравенства:*

$$C_1 |p - p_{s_i}|^2 \leq |\Delta_{\mu_0}(p, 0)| \leq C_2 |p - p_{s_i}|^2, \quad p \in U_\delta(p_{s_i}), \quad i = \overline{n+1, n},$$

и $|\Delta_{\mu_0}(p, 0)| \geq C_3$ для $p \in \mathbf{T}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^n U_\delta(p_{s_i})$.

Из разложения

$$w(p, q) = m^2 (|p - p_{s_i}|^2 + (p - p_{s_i}, q - q_{s_i}) + |q - q_{s_i}|^2) + O(|p - p_{s_i}|^4) + O(|q - q_{s_i}|^4)$$

при $|p - p_{s_i}|, |q - q_{s_i}| \rightarrow 0$, $i = \overline{1, n}$, вытекает следующая

ЛЕММА 5. *Существуют числа $C_1, C_2, C_3 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что выполняются следующие неравенства:*

$$C_1 (|p - p_{s_i}|^2 + |q - q_{s_i}|^2) \leq w(p, q) \leq C_2 (|p - p_{s_i}|^2 + |q - q_{s_i}|^2), \\ (p, q) \in U_\delta(p_{s_i}) \times U_\delta(q_{s_i}), \quad i = \overline{1, n},$$

и $w(p, q) \geq C_3$ для любых p, q , удовлетворяющих по крайней мере одному из условий $p \notin \bigcup_{i=1}^n U_\delta(p_{s_i})$ и $q \notin \bigcup_{i=1}^n U_\delta(q_{s_i})$.

ЛЕММА 6. *Оператор $h_{\mu_0}(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, не имеет отрицательных собственных значений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что для любого $p \in \mathbf{T}^3 \setminus \{p_{s_1}, p_{s_2}, \dots, p_{s_n}\}$ имеет место неравенство $\Delta_{\mu_0}(p, 0) > \Delta_{\mu_0}(p_{s_1}, 0)$. Пусть

$$\Lambda(p) = \int_{\mathbf{T}^3} \frac{\varphi^2(q) dq}{w(p, q)}.$$

Тогда, используя свойства функции $w(\cdot, \cdot)$, легко можно проверить, что имеет место равенство $\Lambda(p_{s_1}) = \Lambda(p_{s_i})$, $i = \overline{2, n}$. Так как функции $\varphi(\cdot)$ и $w(\cdot, \cdot)$ четные, функция $\Lambda(\cdot)$ также является четной и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Lambda(p) - \Lambda(p_{s_1}) &= \frac{1}{4} \int_{\mathbf{T}^3} \frac{2w(p_{s_1}, q) - (w(p, q) + w(-p, q))}{w(p, q)w(-p, q)w(p_{s_1}, q)} \times \\ &\quad \times (w(p, q) + w(-p, q))\varphi^2(q) dq - \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{\mathbf{T}^3} \frac{(w(p, q) + w(-p, q))^2}{w(p, q)w(-p, q)w(p_{s_1}, q)} \varphi^2(q) dq. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу равенства

$$w(p_{s_1}, q) - \frac{w(p, q) + w(-p, q)}{2} = \sum_{j=1}^3 (\cos(mp^{(j)}) - 1)(1 + \cos(mq^{(j)}))$$

и формулы (9) имеем, что для любого $p \in \mathbf{T}^3 \setminus \{p_{s_1}, p_{s_2}, \dots, p_{s_n}\}$ справедливо неравенство $\Lambda(p) - \Lambda(p_{s_1}) < 0$. Из определения числа μ_0 (6) следует, что $\Delta_{\mu_0}(p_{s_1}, 0) = 0$. Следовательно, $\Delta_{\mu_0}(p, z) > \Delta_{\mu_0}(p_{s_1}, 0) = 0$ для любых $p \in \mathbf{T}^3$ и $z < 0$. По лемме 1 это означает, что оператор $h_{\mu_0}(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, не имеет отрицательных собственных значений. Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Функция f , определенная соотношением (5), удовлетворяет уравнению $h_{\mu_0}(p_{s_1})f = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что $f \in L_1(\mathbf{T}^3) \setminus L_2(\mathbf{T}^3)$, т.е.

$$\int_{\mathbf{T}^3} |f(q)| dq < \infty, \quad \int_{\mathbf{T}^3} |f(q)|^2 dq = \infty.$$

Вспомним, что $\Delta_{\mu_0}(p_{s_1}, 0) = 0$. Множество $\{(p_{s_i}, q_{s_i}) \in (\mathbf{T}^3)^2: i = \overline{1, n}\}$ по построению таково, что $\varphi(q_{s_i}) \neq 0$ для всех $i = \overline{1, n}$ и $\varphi(q_{s_i}) = 0$ для $i = \overline{n+1, n}$ (см. замечание 1). Учитывая эти факты и определение (2) функции $\varepsilon(\cdot)$, получим, что существуют числа $C_1, C_2, C_3 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} C_1|q - q_{s_i}|^2 &\leq \varepsilon(q) \leq C_2|q - q_{s_i}|^2, & q \in U_\delta(q_{s_i}), \quad i = \overline{1, n}; \\ \varepsilon(q) &\geq C_3, & q \in \mathbf{T}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^n U_\delta(q_{s_i}); \\ |\varphi(q)| &\geq C_3, & q \in U_\delta(q_{s_i}), \quad i = \overline{1, n}; \end{aligned}$$

а также (в случае $n < n$)

$$C_1|q - q_{s_i}|^2 \leq |\varphi(q)| \leq C_2|q - q_{s_i}|^2, \quad q \in U_\delta(q_{s_i}), \quad i = \overline{n+1, n}.$$

Используя последнее неравенство, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}^3} |f(q)| dq &\leq C_1 \sum_{j=1}^{n_0} \int_{U_\delta(q_{n_j})} \frac{dq}{|q - q_{s_j}|^2} + C_2 < \infty, \\ \int_{\mathbf{T}^3} |f(q)|^2 dq &\geq C_1 \sum_{j=1}^{n_0} \int_{U_\delta(q_{n_j})} \frac{dq}{|q - q_{s_j}|^4} + C_2 = \infty. \end{aligned}$$

Легко можно проверить, что функция f удовлетворяет уравнению $h_{\mu_0}(p_{s_1})f = 0$. Лемма 7 доказана.

4. ПРИНЦИП БИРМАНА–ШВИНГЕРА

Для любого ограниченного самосопряженного оператора A , действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{R}$, определим число

$$d(\lambda, A) = \sup \{ \dim F : (Au, u) > \lambda, u \in F \subset \mathcal{R}, \|u\| = 1 \}.$$

Число $d(\lambda, A)$ равно бесконечности, если λ – внутренняя точка существенного спектра; если $d(\lambda, A)$ конечно, то оно равно числу собственных значений оператора A , больших λ . По определению числа $N_\mu(z)$ имеем, что $N_\mu(z) = d(-z, -H_\mu)$ при $-z > -\tau_{\text{ess}}(H_\mu)$. Отметим, что $\Delta_\mu(p, z) \geq 0$ для любых $p \in \mathbf{T}^3$ и $z < \tau_{\text{ess}}(H_\mu)$, следовательно, существует $\sqrt{\Delta_\mu(p, z)} \geq 0$.

В исследованиях дискретного спектра оператора H_μ основную роль играет компактный интегральный (симметризованный) оператор $T_\mu(z)$, $z < \tau_{\text{ess}}(H_\mu)$, действующий в $L_2(\mathbf{T}^3)$, с ядром

$$\frac{\mu \varphi(p) \varphi(q)}{\sqrt{\Delta_\mu(p, z)} \sqrt{\Delta_\mu(q, z)} (w(p, q) - z)}.$$

Следующая лемма отражает известный принцип Бирмана–Швингера для оператора H_μ (см. работы [3]–[5], [11]–[13]).

ЛЕММА 8. *При всех $z < \tau_{\text{ess}}(H_\mu)$ оператор $T_\mu(z)$ является компактным и непрерывным по z , и справедливо равенство $N_\mu(z) = d(1, T_\mu(z))$.*

Эта лемма доказана в работе [13] для несимметричного случая.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В этом разделе мы выводим асимптотику (7) для числа $N_{\mu_0}(z)$ собственных значений оператора H_{μ_0} , лежащих левее $z < 0$, и тем самым доказываем теорему 2. Доказательство теоремы основано на нескольких леммах и некоторых утверждениях из работ [3], [11].

Сначала найдем асимптотику $d(1, T_{\mu_0}(z))$ при $z \rightarrow -0$. Для этого сведем анализ спектральных свойств оператора $T_{\mu_0}(z)$ к анализу спектральных свойств оператора $\mathbf{T}(r)$, который исследован в работе [11].

Верна следующая

ЛЕММА 9. Пусть $A(z) = A_0(z) + A_1(z)$, где оператор $A_0(z)$ (оператор $A_1(z)$) является компактным и непрерывным при $z < 0$ (соответственно, при $z \leq 0$) в сильной операторной топологии. Предположим, что для функции $f(\cdot)$, $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$, имеет место равенство

$$\lim_{z \rightarrow -0} f(z) d(\gamma, A_0(z)) = l(\gamma),$$

где функция $l(\cdot)$ определена и непрерывна на полуоси $(0; +\infty)$. Тогда аналогичный предел существует для $A(z)$:

$$\lim_{z \rightarrow -0} f(z) d(\gamma, A(z)) = l(\gamma).$$

Для доказательства леммы 9 см. лемму 4.9 из работы [3].

Пусть $T(\delta; |z|)$ – интегральный оператор, действующий в $L_2(\mathbf{T}^3)$, с ядром

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=1}^n \frac{\chi_\delta(p - p_{s_i}) \chi_\delta(q - q_{s_i}) \left(\frac{3}{4}|p - p_{s_i}|^2 + |z|\right)^{-1/4} \left(\frac{3}{4}|q - q_{s_i}|^2 + |z|\right)^{-1/4}}{|p - p_{s_i}|^2 + (p - p_{s_i}, q - q_{s_i}) + |q - q_{s_i}|^2 + |z|}.$$

Здесь $\chi_\delta(\cdot)$ – характеристическая функция множества $U_\delta(0)$. Оператор $T(\delta; |z|)$ называется сингулярной частью оператора $T_{\mu_0}(z)$.

ЛЕММА 10. Для любых $z \leq 0$ при малых $\delta > 0$ разность $T_{\mu_0}(z) - T(\delta; |z|)$ является оператором Гильберта–Шмидта, непрерывным в сильной операторной топологии в точке $z = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании лемм 3–5 имеем, что существуют числа $C_1, C_2 > 0$ такие, что ядро оператора $T_{\mu_0}(z) - T(\delta; |z|)$ оценивается функцией

$$C_1 + C_2 \sum_{i=1}^n \frac{|p - p_{s_i}|^{-1/2} + |q - q_{s_i}|^{-1/2} + 1}{|p - p_{s_i}|^2 + (p - p_{s_i}, q - q_{s_i}) + |q - q_{s_i}|^2},$$

следовательно, оператор $T_{\mu_0}(z) - T(\delta; |z|)$ является оператором Гильберта–Шмидта при всех $z \leq 0$, непрерывным в сильной операторной топологии в точке $z = 0$. Лемма 10 доказана.

Пространство функций f , носители которых лежат в $\bigcup_{i=1}^n U_\delta(p_{s_i})$, является инвариантным подпространством оператора $T(\delta; |z|)$. Пусть $T_0(\delta; |z|)$ – сужение оператора $T(\delta; |z|)$ на это подпространство, т.е. интегральный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\bigcup_{i=1}^n U_\delta(p_{s_i}))$, с ядром

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=1}^n \frac{\chi_\delta(q - q_{s_i}) \left(\frac{3}{4}|p - p_{s_i}|^2 + |z|\right)^{-1/4} \left(\frac{3}{4}|q - q_{s_i}|^2 + |z|\right)^{-1/4}}{|p - p_{s_i}|^2 + (p - p_{s_i}, q - q_{s_i}) + |q - q_{s_i}|^2 + |z|}. \quad (10)$$

Обозначим через $\text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ диагональный матричный оператор размера $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ с диагональными элементами $A_1, A_2, \dots, A_n$.

В силу равенства $L_2(\bigcup_{i=1}^n U_\delta(p_{s_i})) = \bigoplus_{i=1}^n L_2(U_\delta(p_{s_i}))$ оператор $T_0(\delta; |z|)$ записывается как диагональная матрица:

$$T_0(\delta; |z|) = \text{diag}\{T_0^{(1)}(\delta; |z|), T_0^{(2)}(\delta; |z|), \dots, T_0^{(n)}(\delta; |z|)\},$$

где $T_0^{(i)}(\delta; |z|)$ есть интегральный оператор, действующий в $L_2(U_\delta(p_{s_i}))$, ядро которого совпадает с i -м слагаемым в (10), $i = \overline{1, \mathbf{n}}$.

Пусть

$$L_2^{(\mathbf{n})}(U_r(0)) = \{f = (f_1, f_2, \dots, f_{\mathbf{n}}) : f_i \in L_2(U_r(0)), i = \overline{1, \mathbf{n}}\}.$$

Легко можно показать, что оператор $T_0(\delta; |z|)$ унитарно эквивалентен оператору $T_1(r)$, $r = |z|^{-1/2}$, действующему в $L_2^{(\mathbf{n})}(U_r(0))$ по формуле

$$T_1(r) = \text{diag}\{T_1^{(1)}(r), T_1^{(2)}(r), \dots, T_1^{(\mathbf{n})}(r)\},$$

где $T_1^{(i)}(r)$ есть интегральный оператор в $L_2(U_r(0))$ с ядром

$$\frac{1}{2\pi^2} \frac{\chi_r(q)}{\left(\frac{3}{4}|p|^2 + 1\right)^{1/4} \left(\frac{3}{4}|q|^2 + 1\right)^{1/4} (|p|^2 + (p, q) + |q|^2 + 1)}.$$

Отметим, что унитарная эквивалентность этих операторов осуществляется при помощи унитарного оператора

$$B_r = \text{diag}\{B_r^{(1)}, B_r^{(2)}, \dots, B_r^{(\mathbf{n})}\} : \bigoplus_{i=1}^{\mathbf{n}} L_2(U_\delta(p_{s_i})) \rightarrow L_2^{(\mathbf{n})}(U_r(0)),$$

где действие оператора $B_r^{(i)} : L_2(U_\delta(p_{s_i})) \rightarrow L_2(U_r(0))$ задается формулой

$$(B_r^{(i)}f)(p) = \left(\frac{r}{\delta}\right)^{-3/2} f\left(\frac{\delta}{r}(p - p_{s_i})\right), \quad i = \overline{1, \mathbf{n}}.$$

Так как пространство $L_2^{(\mathbf{n})}(U_r(0))$ изоморфно $L_2(U_r(0))$, мы перепишем оператор $T_1(r)$ как интегральный оператор в $L_2(U_r(0))$ с ядром

$$\frac{\mathbf{n}}{2\pi^2} \frac{\chi_r(q)}{\left(\frac{3}{4}|p|^2 + 1\right)^{1/4} \left(\frac{3}{4}|q|^2 + 1\right)^{1/4} (|p|^2 + (p, q) + |q|^2 + 1)}.$$

Далее, заменяя

$$\left(\frac{3}{4}|p|^2 + 1\right)^{1/4}, \quad \left(\frac{3}{4}|q|^2 + 1\right)^{1/4}$$

на

$$\left(\frac{3}{4}|p|^2\right)^{1/4} (1 - \chi_1(p))^{-1}, \quad \left(\frac{3}{4}|q|^2\right)^{1/4} (1 - \chi_1(q))^{-1}$$

соответственно, мы получим оператор $T_2(r)$. Разность $T_1(r) - T_2(r)$ является оператором Гильберта–Шмидта, непрерывным в точке $z = 0$ в сильной операторной топологии.

Пространство функций f , носители которых лежат в $L_2(U_r(0) \setminus U_1(0))$, является инвариантным подпространством оператора $T_2(r)$. Ядро этого оператора имеет следующий вид:

$$K_{\mathbf{n}}(p, q) = \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{3}\pi^2} \frac{1 - \chi_1(q)}{|p|^{1/2}|q|^{1/2}(|p|^2 + (p, q) + |q|^2)}.$$

Пусть $\mathbf{T}(r)$ – интегральный оператор, действующий в $L_2(U_r(0) \setminus U_1(0))$, с ядром $K_2(p, q)$. Следующая лемма доказана в работе [11].

ЛЕММА 11. *Имеет место равенство*

$$\lim_{z \rightarrow -0} \frac{d(1, \mathbf{T}(z))}{|\ln |z||} = \frac{\gamma_0}{2\pi},$$

где γ_0 является единственным положительным корнем уравнения (8).

Доказательство теоремы 2 следует из лемм 8–11.

Благодарности. Автор выражает благодарность рецензенту за ценные и полезные замечания. Автор также благодарит Международный центр теоретической физики им. Абдуса Салама (Италия, Триест) за гостеприимство и поддержку и Международное математическое общество за дорожный грант.

Список литературы

- [1] В. Ефимов, *ЯФ*, **12** (1970), 1080–1091.
- [2] Д. Р. Яфаев, *Матем. сб.*, **94(136)**:4(8) (1974), 567–593.
- [3] A. V. Sobolev, *Comm. Math. Phys.*, **156**:1 (1993), 101–126.
- [4] Н. Tamura, *Nagoya Math. J.*, **130** (1993), 55–83.
- [5] X. P. Wang, *J. Func. Anal.*, **209**:1 (2004), 137–161.
- [6] D. C. Mattis, *Rev. Modern Phys.*, **58**:2 (1986), 361–379.
- [7] A. I. Mogilner, “The problem of a few quasi-particles in solid-state physics”, *Applications of Self-Adjoint Extensions in Quantum Physics*, Lecture Notes in Phys., **324**, eds. P. Exner, P. Šeba, 1989, 160–173.
- [8] С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **89**:1 (1991), 94–104.
- [9] С. Н. Лакаев, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:3 (1993), 15–28.
- [10] С. Н. Лакаев, М. Э. Муминов, *ТМФ*, **135**:3 (2003), 478–503.
- [11] Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **136**:2 (2003), 231–245.
- [12] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Ann. Henri Poincaré*, **5**:4 (2004), 743–772.
- [13] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:4 (2007), 377–387.
- [14] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.

Поступила в редакцию 2.06.2009,
после доработки 9.10.2009