Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Власов, Компланарт систем полиномиальных уравнений, *ТМФ*, 2010, том 163, номер 1, 45–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6486>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 09:53:19

© 2010 г.

А. Д. Власов^{*†}

КОМПЛАНАРТ СИСТЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изучаются однородные полиномиальные отображения линейных пространств $z_i \rightarrow A_i^{i_1 i_2 \dots i_s} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_s}$, их собственные значения и собственные векторы. Вводится новое понятие – “компланарт”, контролирующий компланарность векторов – корней системы полиномиальных уравнений. Вычисление компланартов сводится к вычислению результатов. Как и в случае линейных систем, фазовый портрет соответствующего дифференциального уравнения определяется картиной собственных векторов/собственных значений. Дифференциальные уравнения такого типа естественно возникают при попытке расширить теорию устойчивости Ляпунова. Результаты могут быть использованы в ряде приложений – от решения нелинейных дифференциальных уравнений и вычисления нелинейных экспонент до вычисления негауссовых интегралов.

Ключевые слова: результат, компланарт, нелинейные собственные векторы, нелинейные дифференциальные уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Обзор. В настоящей статье рассматривается нелинейная алгебра [1], [2], изучающая нелинейные отображения $z_i \rightarrow A_i^{i_1 i_2 \dots i_s} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_s}$ и системы полиномиальных уравнений. Нелинейная алгебра является обобщением линейной алгебры [3]. Развитие нелинейной алгебры может помочь в вычислении негауссовых интегралов и, таким образом, превратить многие вычисления по теории возмущений в точные. Нелинейная алгебра также может быть применена к решению нелинейных дифференциальных уравнений. Дискриминант и результат [1], [2] являются главными специальными функциями нелинейной алгебры, играющими роль определителя в линейной алгебре. Обращение в нуль результата определяет условие существования нетривиального решения систем нелинейных уравнений, а обращение в нуль дискриминанта – условие вырожденности нелинейной формы. В настоящей работе мы рассмотрим другую, новую меру вырожденности систем полиномиальных уравнений, называемую компланартом. Условие обращения в нуль компланарта есть

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: vlasov.ad@gmail.com

[†]Московский физико-технический институт, Москва, Россия

условие существования n компланарных корней системы (см. пп. 1.2.1 и 2.3). В разделе 3 рассмотрена задача на собственные векторы/собственные значения нелинейного отображения. В разделе 4 обсуждается применение всех развитых методов к теории полиномиальных дифференциальных уравнений. В разделе 5 утверждения, сделанные в предыдущих главах, иллюстрируются на примере квадратичного отображения двумерного пространства.

1.2. Симметричные комбинации корней. Хорошо известно, что все симметричные многочлены корней системы $n - 1$ уравнений для n неизвестных могут быть выражены как многочлены от коэффициентов уравнений этой системы (см., например, монографию [4]). Однако выражения для самих корней можно найти далеко не всегда. Даже когда они существуют, на практике их применять не всегда удобно. Например, выражения для корней одного уравнения, содержащие только алгебраические действия и арифметические корни, существуют лишь в том случае, если его степень не выше четвертой. Часто желаемую информацию можно получить, изучая симметричные комбинации корней. Например, дискриминант формы определяет ее вырожденность, результат системы уравнений (см. п. 1.5 и книги [1], [2]) определяет условие ее разрешимости и т. д. Еще один успешный пример применения этого подхода описан в работе [5]. Известные трудности такого анализа заключаются в отсутствии общих методов выражения симметрических многочленов корней системы через ее коэффициенты. В настоящей статье определена новая симметричная комбинация корней – “компланарт”. Вычисление компланарта сводится к вычислению результатов. Вычисление элементарных симметричных комбинаций корней системы также сводится к вычислению результатов (см. п. 2.1).

1.2.1. Компланарт. Компланарт – это симметричная комбинация корней системы полиномиальных уравнений. Пусть $f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ – $n - 1$ однородных многочленов произвольных степеней r_i от n переменных $x_1, \dots, x_n$, и пусть $\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(N)}$ – корни системы

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_{n-1}(x) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Такая система уравнений в общем случае имеет $N = r_1 r_2 \dots r_{n-1}$ нетривиальных корней с точностью до общего ненулевого множителя (см., например, монографию [4]). Двойные корни повторяются два раза, тройные – три и т. д. Компланарт равен

$$C = \prod_{\substack{i_1, \dots, i_n=1, \\ i_1 < i_2 < \dots < i_n}}^N (\varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} \Lambda_{j_1}^{(i_1)} \Lambda_{j_2}^{(i_2)} \dots \Lambda_{j_n}^{(i_n)})^2.$$

Компланарт равен нулю тогда и только тогда, когда существуют n компланарных корней, т. е. существуют корни $\Lambda^{(i_1)}, \Lambda^{(i_2)}, \dots, \Lambda^{(i_n)}$ с неравными индексами $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n$, удовлетворяющие условию $\varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} \Lambda_{j_1}^{(i_1)} \Lambda_{j_2}^{(i_2)} \dots \Lambda_{j_n}^{(i_n)} = 0$. В частности, если есть хотя бы один кратный корень, компланарт равен нулю. В случае двух переменных, $n = 2$, компланарность векторов означает их коллинеарность,

и поэтому компланарт есть обычный дискриминант многочлена. Если количество корней меньше размерности пространства n , компланарт равен единице (например, когда все уравнения системы линейные). Метод вычисления компланарта описан в п. 2.2. Более детально компланарты обсуждаются в п. 2.3.

1.3. Собственные векторы и собственные значения. Собственные векторы и собственные значения линейных отображений известны из линейной алгебры и имеют буквальные аналоги в нелинейной. Ненулевой вектор z_i называется собственным вектором A , если при некотором λ он удовлетворяет уравнению

$$A_i^{i_1 i_2 \dots i_s} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_s} = \lambda(z) z_i. \quad (2)$$

Многочлен λ степени $s - 1$ называется собственным значением. В нелинейном случае можно сначала найти собственные векторы, а затем – собственные значения, решая линейные уравнения (см. п. 3.2). Так как для нахождения собственных значений нужно решать линейные по λ уравнения, множество собственных значений есть набор плоскостей в пространстве всех многочленов степени $s - 1$. Это можно переформулировать по-другому, используя понятие характеристического многочлена отображения, а именно

$$\text{Ch}_A(\lambda) \equiv R\{A_i(z) - \lambda(z) z_i\}.$$

Характеристический многочлен $\text{Ch}_A(\lambda)$ равен нулю тогда и только тогда, когда λ – собственное значение A . Он допускает разложение на линейные по λ множители как раз потому, что множество собственных значений есть набор плоскостей в пространстве всех многочленов степени $s - 1$. Эта разложимость впервые была описана в книге [2], но без доказательства. Мы приведем доказательство в п. 3.3. Нахождение собственных векторов сводится к решению системы из n уравнений для $n + 1$ неизвестных. У такой системы существует компланарт, который определяет, имеет ли отображение компланарные собственные векторы. Здесь слово “компланарные” означает векторы, компланарные в пространстве с добавочной переменной (см. п. 3.6). Число собственных векторов невырожденного отображения есть $c_{n|s} = (s^n - 1)/(s - 1)$ с учетом кратности. Формула для $c_{n|s}$ была получена в книге [2], но в случае диагональных отображений. В п. 3.4 мы выведем эту формулу в общем случае.

1.4. Применения результатов.

1.4.1. Нелинейные дифференциальные уравнения. Собственные векторы отображения $A_i^{i_1 i_2 \dots i_s}$ определяют фазовый портрет системы дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i = A_i^{i_1 i_2 \dots i_s} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_s}. \quad (3)$$

Если начальное условие является собственным вектором, уравнение имеет простое решение (см. п. 4.2).

поля, корреляторы вычисляются следующим образом:

$$Z(J) \equiv \int D\phi(\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_k))e^{(i/\hbar)\int(L_0(\phi)+J\phi)d^4x} = \frac{\text{const}}{\sqrt{\det(L_0)}}e^{-L_0^{-1}(J,J)}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \langle\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_k)\rangle_{\text{free}} &= \frac{\int D\phi(\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_k))e^{(i/\hbar)\int(L_0(\phi))d^4x}}{\int D\phi e^{(i/\hbar)\int(L_0(\phi))d^4x}} = \\ &= \frac{((\partial/\partial J(x_1))(\partial/\partial J(x_2))\dots(\partial/\partial J(x_m))Z(J))|_{J=0}}{Z|_{J=0}}. \end{aligned}$$

Формула (6) – прямое обобщение формулы (4) на случай функционального интегрирования; определитель в ней называется функциональным определителем, L_0^{-1} – пропагатором поля ϕ . Этот результат в другой форме называется теоремой Вика. Научившись считать корреляторы в теории с квадратичным действием, можно считать корреляторы в любых теориях, разлагая в ряд экспоненту от неквадратичных частей действия. Таким образом, в таком подходе величины (5) вычисляются при помощи разложения в ряд, т. е. при помощи теории возмущений. Предпочтительнее, однако, вычислять их точно. Для решения этой задачи нужно научиться вычислять интегралы

$$\int e^{(J^i x_i + A^{ij} x_i x_j + B^{ijk} x_i x_j x_k + \dots)} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

в пределе $n \rightarrow \infty$ (n – размерность пространства x_i). Многоточия в экспоненте заменяют части лагранжиана более высоких степеней. Интегралы такого типа называются негауссовыми, а обратные к ним величины называются интегральными дискриминантами [2]. Изучению негауссовых интегралов посвящена, например, работа [7]. К настоящему времени не существует простых и быстрых методов вычисления этих интегралов в общем случае, явные выражения были получены в работе [8] лишь для некоторых простых случаев. Выражения для этих интегралов зависят от числа переменных (в противоположность гауссовому интегралу), и поэтому пока нельзя сразу сказать, как эти выражения ведут себя в пределе $n \rightarrow \infty$. Возможный подход к вычислению негауссовых интегралов состоит в использовании канонического вида нелинейной формы. В общем случае нелинейная форма не может быть приведена к диагональному виду, но свободные параметры линейных преобразований могут быть использованы для фиксации некоторых значений коэффициентов формы. Один из возможных вариантов подобного представления нелинейных отображений $A_k^{ji}, A_i^{jkm}, \dots$ при действии группы GL_n приведен в п. 3.5. При действии SO_n отображения $A_k^{ji}, A_i^{jkm}, \dots$ и формы $A_{ijk}, A_{jkim}, \dots$ являются одним объектом¹⁾, поэтому изучение канонического вида отображений при действии SO_n может помочь при вычислении негауссова интеграла.

¹⁾За исключением того, что формы симметричны по всем индексам, а отображения – по всем, кроме одного.

1.5. Термины и обозначения.

1.5.1. *Однородные и неоднородные уравнения.* Многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ от переменных $x_1, \dots, x_n$ называется *однородным*, если $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n)$ для любого $\lambda \neq 0$. Неотрицательное целое число d называется степенью однородности f . Любой однородный многочлен может быть сделан неоднородным. Его можно поделить на одну из переменных в степени d , например на $(x_n)^d$, отношения $x_1/x_n, x_2/x_n, \dots, x_{n-1}/x_n$ могут быть приняты за новые переменные: $y_1 = x_1/x_n, y_2 = x_2/x_n, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}/x_n$. Это действие уменьшило количество переменных на 1. Переменные $y_1, \dots, y_{n-1}$ называются неоднородными, а $x_1, \dots, x_n$ – однородными. Мы будем обозначать через $\Lambda_j^{(i)}$ j -ю векторную компоненту i -го вектора решения системы однородных уравнений, и через $\lambda^{(i)}$ – i -й корень одного уравнения от одной неоднородной переменной. Например, пусть есть уравнение $a_0(x_2)^d + a_1(x_2)^{d-1}x_1 + \dots + a_{d-1}x_2(x_1)^{d-1} + a_d(x_1)^d = 0$. Тогда $\Lambda_1^{(i)}$ будет x_1 -компонентой i -го решения, $\Lambda_2^{(i)}$ – x_2 -компонентой i -го решения. Это же уравнение в терминах неоднородной переменной $z = x_1/x_2$ есть $a_0 + a_1z + \dots + a_{d-1}z^{d-1} + a_dz^d = 0$; $\lambda^{(i)}$ – i -й корень этого уравнения. В разделе 2 рассматриваются только однородные функции $\Lambda_j^{(i)}$, потому что все они могут быть домножены на ненулевое число и останутся при этом решением системы. Симметричная комбинация корней $\Lambda^{(i)}$ – выражение, которое не меняется при перенумерации корней $\Lambda^{(i)}$ и $\Lambda^{(j)}$.

1.5.2. *Отображения и результаты.* В данной статье изучаются однородные отображения линейных пространств

$$z_i \rightarrow A_i^{i_1 i_2 \dots i_s} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_s},$$

степень отображения обозначается s . При $s = 1$ получаются линейные отображения, которые изучаются в линейной алгебре [3]. Многие понятия линейной алгебры допускают непосредственное обобщение на нелинейный случай. Например, рассмотрим систему n однородных уравнений для n однородных переменных или $n - 1$ неоднородных переменных

$$A_i^{i_1 i_2 \dots i_s} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_s} = 0.$$

Такие системы в случае общего положения не имеют нетривиальных решений, т. е. решений, хотя бы одна однородная переменная в которых не равна нулю. Для того чтобы такое решение существовало, коэффициенты системы должны удовлетворять определенному соотношению, так как число уравнений минус число неоднородных неизвестных равно 1. Это соотношение есть

$$R\{A\} = 0,$$

где $R\{A\}$ – многочлен от коэффициентов A , называемый результатом, или гипердетерминантом, A . При $s = 1$, т. е. если A – линейное отображение, результат A равен определителю A . Результаты играют все возрастающую роль в современной математике и физике. Их определения и основные свойства изложены в работах [1], [2], [9]–[11], приложения в физике и инженерии – в работе [12], применения в теории струн – в статьях [13], [14], методы вычисления – в работах [15], [16]. Под невырожденным отображением мы понимаем отображение с ненулевым результатом.

2. КОМПЛАНАРТ И СИММЕТРИЧНЫЕ КОМБИНАЦИИ КОРНЕЙ

2.1. Результат и обобщение формул Виета. Пусть $f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ – $n - 1$ однородных многочленов произвольных степеней r_i от n переменных $x_1, \dots, x_n$. Хорошо известно, что система уравнений (1) в общем случае имеет $N = r_1 r_2 \dots r_n$ проективно-неэквивалентных корней [4]. Иногда они могут совпадать, и поэтому N должно учитывать кратность корней. Так, один многочлен от двух однородных переменных или одной неоднородной переменной имеет ровно r_1 корней с учетом кратностей. Обозначим через $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \dots, \Lambda^{(N)}$ различные решения системы (1). Каждое решение $\Lambda^{(i)}$ является вектором, и $\Lambda_j^{(i)}$ – j -я векторная компонента i -го решения. Запишем обобщенные формулы Виета:

$$\text{symm}_{\mu_1, \dots, \mu_N} \{ \Lambda_{j_1}^{(\mu_1)} \Lambda_{j_2}^{(\mu_2)} \dots \Lambda_{j_N}^{(\mu_N)} \} \equiv \sum_{\sigma \in P_N} \Lambda_{j_1}^{(\sigma(1))} \Lambda_{j_2}^{(\sigma(2))} \dots \Lambda_{j_N}^{(\sigma(N))} = V_{j_1 \dots j_N}. \quad (7)$$

Здесь $V_{j_1 \dots j_N}$ – однородный многочлен от коэффициентов f_i , степень которого по коэффициентам i -го многочлена f_i равна $N/r_i = r_1 \dots r_{i-1} r_{i+1} \dots r_n$ [2]. В некоторых частных случаях формула для $V_{j_1 \dots j_N}$ может быть получена из простых соображений [2], но сейчас мы рассмотрим общий метод ее вычисления, который использует формулу Пуассона для результата (см., например, работы [1], [16]). Добавим к этой системе еще один однородный многочлен $g(x)$ степени r от тех же переменных $x_1, \dots, x_n$. Тогда система уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_{n-1}(x) &= 0, \\ g(x) &= 0 \end{aligned}$$

будет иметь результат. Запишем формулу Пуассона:

$$R\{f_1, \dots, f_{n-1}, g\} = C \prod_{i=1}^N g(\Lambda^{(i)}), \quad (8)$$

где C – константа, зависящая от нормировки корней; их можно перенормировать так, чтобы C было равно 1. Интерпретация этой формулы проста: система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда g равно нулю на одном из корней других функций. С помощью этой формулы можно получить выражение для $V_{j_1 \dots j_N}$ через коэффициенты f . В качестве g можно взять линейную функцию $g(x) = g^i x_i$, затем посчитать результат системы (8). Пусть k_i – число индексов среди $j_1, \dots, j_N$, равных i (другими словами, имеются k_1 индексов, равных 1, k_2 индексов, равных 2, k_n индексов, равных n). Тогда $V_{j_1 \dots j_N}$ – коэффициент перед $g^{j_1} \dots g^{j_N}$ в $R\{f_1, \dots, f_{n-1}, g\}$ с точностью до умножения на комбинаторный коэффициент $k_1! \dots k_n!$. Это равенство очевидно из формулы Пуассона для результата.

2.2. Симметричные комбинации. Формулу Пуассона (8) можно легко обобщить. К примеру, нужно посчитать

$$P_g = \prod_{i,j=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}). \quad (9)$$

Получим сначала результат системы

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 0, \\ f_1(x) &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_{n-1}(x) &= 0 \end{aligned}$$

по переменным $x_1, \dots, x_n$, рассматривая $y_1, \dots, y_n$ как параметры. Этот результат мы обозначим $R_x\{g, f_1, \dots, f_{n-1}\}$. Он является многочленом по переменным $y_1, \dots, y_n$. Затем нужно посчитать результат по переменным $y_1, \dots, y_n$ системы

$$\begin{aligned} R_x\{g, f_1, \dots, f_{n-1}\}(y) &= 0, \\ f_1(y) &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_{n-1}(y) &= 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом легко получить

$$\prod_{i,j,k=1}^N h(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}, \Lambda^{(k)}), \quad \prod_{i,j,k,m=1}^N u(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}, \Lambda^{(k)}, \Lambda^{(m)}), \quad \dots\dots$$

Результат нужно вычислять столько раз, сколько аргументов в искомой функции корней. Но в п. 2.3 потребуется вычислить выражения вида

$$P'_g \equiv \prod_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}). \quad (10)$$

Разница между (9) и (10) заключается в том, что в последней формуле произведение стоит по парам несовпадающих индексов, а в (9) – по всем парам индексов. На первый взгляд, выражение (10) может быть вычислено следующим способом:

$$P'_g = \prod_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}) = \frac{\prod_{i,j=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)})}{\prod_{i=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)})}. \quad (11)$$

Числитель этого выражения можно посчитать с использованием формулы (9), а знаменатель – используя (8). Но иногда на этом пути возникают препятствия. Если, например, $g(x, y)$ – *антисимметричная* функция, $g(x, y) = -g(y, x)$, то и числитель, и знаменатель выражения (11) равны нулю, несмотря на то что само по себе P'_g хорошо определено и равно вполне конкретному выражению. Поэтому P'_g не может

быть вычислено с использованием (11). Мы нашли способ устранить эту трудность. Пусть $g_0(x, y)$ – некоторый кососимметричный линейный многочлен от $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Рассмотрим $g(x, y) = g_0(x, y) + tg_1(x, y)$, где

$$g_1(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \quad (12)$$

(такой выбор $g_1(x, y)$ мы обсудим чуть позже). Итак,

$$\begin{aligned} P'_{g_0} &\equiv \prod_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N g_0(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\prod_{i,j=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)})}{\prod_{i=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)})} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\prod_{i,j=1}^N (g_0(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}) + tg_1(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}))}{\prod_{i=1}^N (g_0(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}) + tg_1(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}))}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для нелинейных многочленов $g_0(x, y)$ работает тот же метод, нужно лишь выбрать $g_1(x, y)$ соответствующей степени. Например, для квадратичного $g_0(x, y)$

$$g_1(x, y) = \sum_{i,j,k,m=1}^n x_i x_j y_k y_m = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n y_i. \quad (14)$$

Этот метод работает не только для случая двух переменных, но и для любого их числа. Приведем формулу для трех переменных:

$$\begin{aligned} P'_{g_0} &\equiv \prod_{\substack{i,j,k=1, \\ i \neq j; i \neq k; k \neq j}}^N g_0(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}, \Lambda^{(k)}) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\prod_{i,j,k=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}, \Lambda^{(k)})) (\prod_{i=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}))^2}{(\prod_{i,j=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}))^3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $g_0(x, y, z)$ однородная функция, $g(x, y, z) = g_0(x, y, z) + tg_1(x, y, z)$.

Для линейного g_0

$$g_1(x, y, z) = \sum_{i,j,k=1}^n x_i y_j z_k. \quad (16)$$

Эти формулы работают для g_0 любой степени и любой симметрии. Для функций $g(x, y, z)$ другой степени g_1 должно быть выбрано той же степени. Например, для квадратичного g_0 нужно выбрать

$$g_1(x, y, z) = \sum_{i,j,k,m,l,p}^n x_i x_j y_k y_m z_l z_p. \quad (17)$$

Если пределы (13), (15) могут быть вычислены, они не зависят от выбора g_1 . Но иногда, если выбрать некоторое вырожденное g_1 , например g_1 с малым числом ненулевых компонент, то и числитель, и знаменатель выражения (13) будут равны нулю

даже при $t \neq 0$, и в этом случае предел также нельзя будет посчитать (пример такого поведения приведен в п. 2.3.5). Выражения (12), (14), (17) – просто примеры многочленов со всеми коэффициентами, не равными нулю. С применением формул (12), (14) можно, например, вычислить компланарты.

2.3. Компланарт. Когда же система (9) имеет совпадающие корни? В случае двух переменных (когда в системе только один многочлен) ответ дается дискриминантом многочлена:

$$D = \prod_{i,j=1,i < j}^{r_1} (\varepsilon^{km} \Lambda_k^{(i)} \Lambda_m^{(j)})^2 = a^{2(r_1-1)} \prod_{j,i=1,i < j}^{r_1} (\lambda^{(i)} - \lambda^{(j)})^2,$$

где r_1 – степень многочлена, a – коэффициент при переменной в старшей степени. Дискриминант равен нулю тогда и только тогда, когда у многочлена существует пара корней, один из которых как вектор пропорционален другому (однородная формулировка, $\Lambda^{(i)} \propto \Lambda^{(j)}$, $i \neq j$), или два равных неоднородных корня (неоднородная формулировка, $\lambda^{(i)} = \lambda^{(j)}$). Однако в трехмерном пространстве пропорциональность двух векторов определяется двумя условиями (например, $x_2/x_1 = y_2/y_1$ и $x_3/x_1 = y_3/y_1$), но при этом существует естественное условие компланарности трех векторов: $\varepsilon^{ijk} x_i y_j z_k = 0$. Если $\varepsilon^{ijk} x_i y_j z_k = 0$, то три вектора x, y, z лежат в одной плоскости. Поэтому можно сформулировать условие того, что система уравнений имеет три компланарных вектора:

$$C = 0, \quad (18)$$

где

$$C \equiv \prod_{\substack{i,j,k=1, \\ i < j < k}}^N (\varepsilon^{mlp} \Lambda_m^{(i)} \Lambda_l^{(j)} \Lambda_p^{(k)})^2. \quad (19)$$

Выражение (18) – некоторая симметричная комбинация корней системы. Чтобы эта комбинация не меняла знак при перестановке корней, $\varepsilon^{mlp} \Lambda_m^{(i)} \Lambda_l^{(j)} \Lambda_p^{(k)}$ было возведено в квадрат. Эту комбинацию мы решили назвать компланартом. Для двух переменных компланарт сводится к обычному дискриминанту, для четырех переменных

$$C = \prod_{\substack{i,j,k,q=1, \\ i < j < k < q}}^N (\varepsilon^{mlpr} \Lambda_m^{(i)} \Lambda_l^{(j)} \Lambda_p^{(k)} \Lambda_r^{(q)})^2,$$

для n переменных

$$C = \prod_{\substack{i_1, \dots, i_n=1, \\ i_1 < i_2 < \dots < i_n}}^N (\varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} \Lambda_{j_1}^{(i_1)} \Lambda_{j_2}^{(i_2)} \dots \Lambda_{j_n}^{(i_n)})^2.$$

Компланарт имеет степень $2nC_N^n = 2nN! / [(N-n)!n!]$ по Λ , так как каждый сомножитель в произведении имеет степень $2n$ и всего сомножителей C_N^n . Каждая

$\Lambda \propto \prod_{i=1}^{n-1} (a_i)^{1/r_i}$, где a_i обозначает коэффициенты f_i (см. формулу (7)). Поэтому

$$C \propto \prod_{i=1}^{n-1} (a_i)^{2C_{N-1}^{n-1}(N/r_i)},$$

т.е. $\deg_{a_i} C = 2C_{N-1}^{n-1}(N/r_i)$. Если $n = 2$, то компланарт есть дискриминант, число решений $N = r$ и $\deg_a C = 2(r-1)!/(1!(r-2)!) = 2(r-1)$. Это хорошо известное выражение для степени дискриминанта.

2.3.1. Вычисление компланартов. Компланарт – произведение значений антисимметричной функции по множеству всевозможных совокупностей из n различных корней. Такие выражения мы научились вычислять в п. 2.2. Необходимо лишь взять в качестве g_0 абсолютно кососимметричный ε -тензор соответствующей размерности. Формула для двух переменных имеет вид

$$C = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\prod_{i,j=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)})}{\prod_{i=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\prod_{i,j=1}^N (\varepsilon(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}) + tg_1(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}))}{\prod_{i=1}^N (\varepsilon(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}) + tg_1(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}))}, \quad (20)$$

для трех переменных –

$$C^3 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\prod_{i,j,k=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}, \Lambda^{(k)})) (\prod_{i=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}))^2}{(\prod_{i,j=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}))^3}, \quad (21)$$

$$g(x, y, z) = \varepsilon(x, y, z) + tg_1(x, y, z),$$

для четырех –

$$C^{12} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\prod_{i,j,k,m=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}, \Lambda^{(k)}, \Lambda^{(m)}) (\prod_{i,j=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}))^8}{(\prod_{i,j,k=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}, \Lambda^{(k)}))^6} \times$$

$$\times \frac{(\prod_{i,j=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}, \Lambda^{(j)}))^3}{(\prod_{i=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}))^6}, \quad (22)$$

$$g(x, y, z, u) = \varepsilon(x, y, z, u) + tg_1(x, y, z, u).$$

Осталось объяснить еще один факт. Почему для трех переменных предел равен C^3 , а для четырех – C^{12} ? Формула (20) дает $\prod_{i \neq j}^N \varepsilon(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)})$ вместо произведения $\prod_{i < j}^N (\varepsilon(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}))^2$, формула (21) дает $\prod_{i \neq j, i \neq k, j \neq k} \varepsilon(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}, \Lambda^{(k)})$ вместо $\prod_{i < j < k}^N (\varepsilon(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}, \Lambda^{(k)}))^2$. В случае $n = 2$ эти выражения совпадают с точностью до знака, так как есть только две перестановки; их учет и добавляет возведение в квадрат. В случае $n = 3$ всего есть $3! = 6$ перестановок, но опять нужен квадрат – поэтому с точностью до знака появляется C^3 . В случае произвольного n аналогичные формулы дают $C^{n!/2}$ с точностью до знака. Теперь легко написать формулу для компланарта, аналогичную (20)–(22); необходимо лишь, чтобы все множители в $\prod_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^N g(\Lambda^{(i_1)}, \Lambda^{(i_2)}, \dots, \Lambda^{(i_n)})$, содержащие несколько Λ с совпадающими номерами решений, сократились с множителями с явно совпадающими Λ , например, $\prod_{i_1, i_3, \dots, i_n=1}^N g(\Lambda^{(i_1)}, \Lambda^{(i_1)}, \Lambda^{(i_3)}, \dots, \Lambda^{(i_n)})$.

2.3.2. Когда компланарт равен 1? Компланарт определяет линейную зависимость/независимость n различных корней алгебраических уравнений (1). Эта система уравнений в случае общего положения имеет $N = r_1 r_2 \dots r_{n-1}$ проективно-неэквивалентных корней, где $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ – степени уравнений. Что происходит, когда $N < n$? Это означает, что у системы *нет* n линейно независимых проективно-неэквивалентных корней. Поэтому компланарт такой системы уравнений равен ненулевой постоянной, не зависящей от коэффициентов системы. Чему равна эта постоянная? Рассмотрим простейший пример: одно линейное уравнение для двух переменных $ax_1 + bx_2 = 0$. Эта система имеет только одно решение: $\Lambda_1^{(1)} = -b, \Lambda_2^{(1)} = a$. Компланарт равен

$$C = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\prod_{i,j=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)})}{\prod_{i=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\prod_{i,j=1}^N (\varepsilon(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}) + t g_1(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}))}{\prod_{i=1}^N (\varepsilon(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}) + t g_1(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}))}.$$

Так как система имеет только одно решение, числитель равен $g(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(1)})$, и знаменатель тоже равен $g(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(1)})$. Поэтому компланарт равен 1. По тем же причинам компланарт равен 1 всегда, когда $N = r_1 r_2 \dots r_{n-1} < n$. К примеру, компланарт равен 1 для любой линейной системы с подходящим числом переменных.

2.3.3. Нерешенные вопросы. Первый нерешенный вопрос – насчет выбора g_1 (см. формулы (15), (17), (20)). Эти формулы не GL_n -инвариантны, и хотелось бы сформулировать какой-нибудь естественный их выбор. Второй вопрос связан с первым: можно взять $g(x, y, \dots) = \varepsilon(x, y, \dots) + t_1 g_1(x, y, \dots) + t_2 g_2(x, y, \dots) + \dots$ и вычислить тот же предел, но взятый по нескольким t -переменным в разной последовательности. Фактически, вычисляя предел, мы рассматриваем только член с низшей степенью t . Члены высших степеней могут содержать информацию о более сильных вырождениях системы. Это может быть особенно интересно, если рассматриваются несколько t -переменных. Например, обращение в нуль некоторого высшего члена (высших членов) может соответствовать существованию двух совпадающих корней и т. д.

2.3.4. Примеры вычисления компланартов в случае $n = 2$. Компланарты совпадают с дискриминантами. В качестве первого примера рассмотрим **квадратное уравнение**

$$f(x) = a(x_1)^2 + bx_1x_2 + c(x_2)^2,$$

или в неоднородной переменной $z \equiv x_1/x_2$

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Возьмем $g(x, y) = \varepsilon(x, y) + t g_1(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + t(x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2)$. Для этого уравнения и этого выбора g_1

$$\prod_{i,j} g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}) = t^2(a + c - b)^2(4ac - b^2 + t^2(b^2 - 2ab + a^2 - 2bc + 2ac + c^2)),$$

$$\prod_i g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}) = t^2(a + c - b)^2.$$

Легко видеть, что $C = 4ac - b^2$, и это выражение совпадает с обычным выражением для дискриминанта квадратного уравнения.

Выбрав другое $g_1 = x_1y_2$, получаем

$$\prod_{i,j} g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}) = t^2 ac(4ac - b^2 + t(4ac - b^2) + t^2(ac - b^2)),$$

$$\prod_i g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}) = t^2 ac.$$

Выражения изменились, но значение компланарта опять равно $4ac - b^2$.

Для **кубического многочлена**

$$f(x) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

компланарт равен $4ac^3 + 4db^3 + 27a^2d^2 - b^2c^2 - 18abcd$, т. е. он опять совпадает с дискриминантом кубического многочлена. Остальные выражения слишком длинны, чтобы их приводить.

2.3.5. Примеры вычисления компланартов в случае $n = 3$. Рассмотрим два квадратичных многочлена

$$f_1(x) = a_{11}(x_1)^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3,$$

$$f_2(x) = b_{22}(x_2)^2 + b_{21}x_2x_1 + b_{23}x_2x_3.$$

Возьмем, к примеру, $g(x, y, z) = \varepsilon(x, y, z) + tg_1(x, y, z) = (1 + t)x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + (1 + t)x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3 + (1 + t)x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1$. Тогда все три множителя в формуле (21), а именно $\prod_{i,j,k=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}, \Lambda^{(k)})$, $\prod_{i=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)})$, $\prod_{i,j=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)})$, равны нулю, поэтому предел не может быть вычислен. Тем не менее если мы возьмем, к примеру,

$$g_1 = \sum_{i,j=1}^n x_iy_j = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3,$$

т. е. выберем g_1 в соответствии с формулой (16), этой проблемы не будет. Предел (21) равен

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\prod_{i,j,k=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}, \Lambda^{(k)})) (\prod_{i=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}))^2}{(\prod_{i,j=1}^N g(\Lambda^{(i)}, \Lambda^{(i)}, \Lambda^{(j)}))^3} =$$

$$= (a_{13})^{12} (b_{23})^{12} (a_{21}b_{23} - a_{13}b_{22})^6 (b_{23}a_{11} - a_{13}b_{21})^6 \times$$

$$\times (-b_{22}a_{11}a_{13}b_{23} - b_{21}a_{21}a_{13}b_{23} + b_{21}a_{13}^2b_{22} + b_{23}^2a_{21}a_{11})^6.$$

Компланарт, вычисленный напрямую, т. е. решением уравнений $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0$ и подстановкой этих решений в формулу (19), равен

$$(a_{13})^4 (b_{23})^4 (a_{21}b_{23} - a_{13}b_{22})^2 (b_{23}a_{11} - a_{13}b_{21})^2 \times$$

$$\times (-b_{22}a_{11}a_{13}b_{23} - b_{21}a_{21}a_{13}b_{23} + b_{21}a_{13}^2b_{22} + b_{23}^2a_{21}a_{11})^2.$$

Итак, формула (21) верна.

В разделе 5 нам понадобится компланарт системы

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 + 2axy - xz, \\ f_2(x) &= y^2 + 2bxy - yz, \end{aligned}$$

являющейся частным случаем рассмотренной выше системы. Компланарт в кубе и предел в формуле (21) равны

$$C^3 = (1 - 2a)^{12}(1 - 2b)^{12}.$$

3. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ, СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И GL_N -КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД НЕЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

3.1. Нелинейные собственные векторы, собственные значения и способы их получения. Ненулевой вектор z_i называется собственным вектором A , если он удовлетворяет (с некоторым λ) уравнению (2). Многочлен $\lambda(z)$ степени $s - 1$ называется собственным значением. Мы налагаем на равенство (2) условие однородности, из которого следует, что $\lambda(z)$ должен быть многочленом степени $s - 1$. Условие однородности требует, чтобы каждый собственный вектор мог быть домножен на ненулевое число и оставался собственным вектором. Имеется также нелинейное обобщение характеристического многочлена отображения, а именно

$$\text{Ch}_A \equiv R\{A_i(z) - \lambda(z)z_i\}. \quad (23)$$

По определению результата Ch_A обращается в нуль тогда и только тогда, когда существует собственный вектор, соответствующий данному $\lambda(z)$. Наилучший метод решения задачи на собственные векторы/собственные значения отличается от предлагаемого в линейной алгебре. Решение уравнения $\text{Ch}_A = 0$ по λ сложно, потому что это неоднородное уравнение для $M_{n|s-1} = (n + s - 2)! / [(n - 1)!(s - 1)!]$ коэффициентов λ степени $c_{n|s} = (s^n - 1)/(s - 1)$. Оказывается, что Ch_A не может быть произвольным многочленом. В отличие от произвольного многочлена многих переменных, Ch_A всегда разложим на линейные по λ множители. С учетом этого обстоятельства гораздо проще найти сначала эти множители, а потом собственные значения, решая линейные уравнения. Чтобы разложить Ch_A на множители, необходимо найти собственные векторы; эта процедура объяснена в п. 3.3. Метод исключения λ из уравнения (2) объяснен в п. 3.2.

3.2. Нулевые, ненулевые и единичные собственные векторы. Многочлен $\lambda(z)$, соответствующий конкретному z_i , может быть не равен нулю и равен нулю. Рассмотрим первый случай. Собственные векторы, у которых $\lambda(z) \neq 0$, называются ненулевыми собственными векторами. Это определение не может вызывать путаницы, так как все собственные векторы ненулевые в том смысле, что все их компоненты не равны нулю одновременно. Ненулевой собственный вектор можно домножать на любое отличное от нуля число, так как на систему уравнений (2) наложено требование однородности. К примеру, z_i можно перенормировать следующим образом: $y_i = z_i / \lambda(z)^{1/(s-1)}$. Теперь $\lambda(y) = \lambda(z) / (\lambda(z))^{(s-1)/(s-1)} = 1$, и

$$A_i(y) = y_i. \quad (24)$$

Собственные векторы, подчиняющиеся этому уравнению, называются единичными собственными векторами. Многочлен λ исключен из уравнений на собственные векторы/собственные значения. Все ненулевые собственные векторы можно домножить на отличное от нуля число так, чтобы они стали единичными собственными векторами, которые удовлетворяют уравнению (24).

Теперь рассмотрим случай $\lambda(z) = 0$. Такие собственные векторы называются нулевыми собственными векторами. Любой нулевой собственный вектор удовлетворяет уравнению

$$A_i(z) = 0, \quad (25)$$

которое тоже не содержит λ .

Любое решение z_i уравнений (24) или (25) – собственный вектор. Чтобы показать это, достаточно построить λ , удовлетворяющее уравнению (2) с этим z_i . Если y_i – решение уравнения (24), то y_i является собственным вектором с любым λ , удовлетворяющим уравнению

$$\lambda(y_i) = 1, \quad (26)$$

как это легко видеть из уравнения (2). Если z_i – решение уравнения (25), то z_i – собственный вектор с любым λ , которое удовлетворяет уравнению

$$\lambda(z_i) = 0. \quad (27)$$

Таким образом, было доказано следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Все собственные векторы A есть решения уравнений (24) или (25), и наоборот, любое нетривиальное решение уравнений (23) или (24) является собственным вектором A .*

Более простой метод нахождения собственных векторов/собственных значений состоит в следующем: сначала нужно решить уравнения (23), (24) и найти тем самым собственные векторы, а потом найти λ описанным выше способом.

3.3. Разложимость на множители характеристического многочлена.

Так как для нахождения λ необходимо решать *линейные* по λ уравнения (см. предыдущий пункт), то множество значений λ , являющихся собственными значениями A , есть объединение гиперплоскостей в пространстве всех многочленов степени $s - 1$ от n переменных. Иначе это можно сформулировать так: характеристический многочлен $\text{Ch}_A(\lambda)$ разложим на линейные по λ множители. Условие обращения в нуль одного из множителей определяет плоскость в пространстве всех λ . Множители в этом разложении имеют вид

$$R\{A_i(z) - \lambda(z)z_i\} = M(A) \prod_{\mu=1}^{n_1} (1 - \lambda(e^{(\mu)})) \prod_{\nu=1}^{n_2} (\lambda(z^{(\nu)})), \quad (28)$$

где $e^{(\mu)}$ – μ -й единичный собственный вектор, n_1 – их число; $z^{(\nu)}$ – ν -й нулевой собственный вектор, n_2 – их число; $M(A)$ зависит только от коэффициентов A , но

не от коэффициентов λ . В самом деле, все возможные собственные векторы с точностью до умножения на ненулевую постоянную находятся среди решений уравнений (24), (25). Поэтому все возможные собственные значения удовлетворяют либо уравнению (26) с одним из единичных собственных векторов, либо уравнению (27) с одним из нулевых собственных векторов. Если λ удовлетворяет уравнению (26), правая часть выражения (28) обращается в нуль из-за одного из множителей $(1 - \lambda(e_\mu))$. Если λ удовлетворяет уравнению (27), правая часть выражения (28) обращается в нуль из-за одного из множителей $\lambda(z_\nu)$.

3.4. Число собственных векторов. Системы уравнений (24) и (25) можно объединить в одну систему однородных уравнений путем добавления вспомогательной переменной y :

$$A_i(x) = (y)^{s-1} x_i. \quad (29)$$

Это система n однородных уравнений для $n + 1$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, y$. Если y решения системы (28) $y \neq 0$, можно рассмотреть вектор $x_1/y, \dots, x_n/y, 1$, который есть решение одновременно и системы (28), и уравнения (24), и поэтому первые n его компонент будут собственным вектором. Если y решения системы (29) $y = 0$, первые n компонент $x_1, \dots, x_n$ этого решения представляют собой нулевой собственный вектор.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Любой вектор A пропорционален одному из решений системы (29).*

Примеры отыскания собственных векторов с использованием системы (29) приведены в п. 3.5 и в разделе 5. Рассмотрим теперь невырожденные отображения $R\{A_i(z)\} \neq 0$. Во-первых, для этих отображений уравнение (25) не имеет решений, у которых все компоненты одновременно не равны нулю. Условие $R\{A_i(z)\} \neq 0$ по определению результата есть условие несуществования таких решений уравнения (25). Другими словами, невырожденное отображение не имеет нулевых собственных векторов. В линейной алгебре верно то же самое утверждение. Это значит, что $n_2 = 0$, и в выражении (28) нет множителя $\prod_{\nu=1}^{n_2} \lambda(z_\nu)$:

$$R\{A_i(z) - \lambda(z)z_i\} = M(A) \prod_{\mu=1}^{n_1} (1 - \lambda(e_\mu)).$$

Положив здесь $\lambda = 0$, получим $M(A) = R\{A\}$. Поэтому

$$R\{A_i(z) - \lambda(z)z_i\} = R\{A\} \prod_{\mu=1}^{n_1} (1 - \lambda(e_\mu)). \quad (30)$$

Для невырожденных отображений n_1 можно довольно просто определить. Рассмотрим опять систему (29). Если $R\{A\} \neq 0$, она не имеет нетривиальных решений с $y = 0$ (из существования таких решений следовало бы существование нетривиальных решений уравнения (25), но это невозможно, так как $R\{A\} \neq 0$). Как и

любая система n однородных уравнений степени s каждое (s – степень отображения A) для $n + 1$ переменных, в случае общего положения система (29) имеет s^n проективно-неэквивалентных решений [4]. Система уравнений (29) имеет одно решение, не являющееся собственным вектором:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \quad y = 1. \quad (31)$$

Число решений системы (29) с по крайней мере одной ненулевой x -компонентой есть $s^n - 1$. Некоторые из этих решений приводят к проективно-эквивалентным собственным векторам (в пространстве $x_1, \dots, x_n$). Пусть $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y^{(0)}$ – решение системы (29). Тогда $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \omega_{s-1} y^{(0)}$, где ω_{s-1} – комплексный корень из 1 степени $s - 1$, тоже решение системы (29). Так как в комплексной плоскости существует $s - 1$ различных корней из 1 степени $s - 1$, $s - 1$ проективно-неэквивалентных (в пространстве $x_1, \dots, x_n, y$) решений системы (29) приводят к одному собственному вектору (или к проективно-эквивалентным в $x_1, \dots, x_n$ собственным векторам). Поэтому в общем случае число собственных векторов равно $c_{n|s} = (s^n - 1)/(s - 1)$. Эта формула была получена ранее в книге [2], но из рассмотрения только диагональных отображений. Таким образом, характеристический многочлен имеет степень $c_{n|s}$ по коэффициентам λ . Необходимо еще раз подчеркнуть, что весь расчет, приведший к формуле $c_{n|s} = (s^n - 1)/(s - 1)$, был проведен с использованием условия $R\{A\} \neq 0$. К примеру, для единичных отображений (п. 3.7.1) все векторы пространства являются собственными.

3.5. GL_n -канонический вид нелинейного отображения. В линейной алгебре линейное отображение и квадратичная форма имеют канонический вид (т.е. становятся диагональными) в базисе из своих собственных векторов. В нелинейной алгебре ситуация похожая, если не считать небольших различий. Во-первых, в общем случае нелинейное отображение не может быть приведено к диагональному виду, потому что группа GL_n имеет n^2 параметров, а у нелинейного отображения их больше: $nM_{n|s} = n(n + s - 1)! / [(n - 1)! s!]$. Во-вторых, нелинейное отображение в общем случае имеет $c_{n|s} > n$ собственных векторов (см. п. 3.4). Поэтому мы можем несколькими разными способами выбрать из них n базисных векторов и получить при этом различные канонические виды. Эта неопределенность пока не изучена. Чтобы получить канонический вид нелинейного отображения, необходимо выбрать в качестве базисных любые n линейно независимых нулевых или единичных собственных векторов отображения. Собственные векторы системы могут быть найдены путем решения системы уравнений (29). Ненулевые векторы надо перенормировать, чтобы превратить их в единичные собственные векторы. Рассмотрим вначале, что случается с компонентами отображения, соответствующими единичному собственному вектору. Если единичный собственный вектор z_i выбран в качестве j -го базисного вектора, то в этом базисе $z_i = \delta_i^j$. По определению единичного собственного вектора $A_i^{i_1 i_2 \dots i_s} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_s} = z_i$. Подставляя сюда $z_i = \delta_i^j$, получаем $A_i^{j j \dots j} = \delta_i^j$. Если нулевой собственный вектор y_i выбран в качестве k -го базисного вектора, то $y_i = \delta_i^k$. Уравнение для нулевого собственного вектора имеет вид $A_i^{i_1 i_2 \dots i_s} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_s} = 0$. Подставляем $y_i = \delta_i^k$, получаем $A_i^{k k \dots k} = 0$.

В итоге $A_i^{jj\dots j} = \delta_i^j$, если j соответствует единичному собственному вектору, и $A_i^{kk\dots k} = 0$, если k соответствует нулевому собственному вектору.

Этим выбором базиса фиксируются только компоненты с равными верхними индексами, всего n^2 . Больше компонент в общем случае зафиксировать нельзя, так как в группе GL_n есть всего n^2 параметров. Остальные компоненты A остаются произвольными числами, и именно они задают нелинейное отображение. В линейном случае отображение задается n собственными векторами и n собственными значениями. В нелинейном случае отображение задают n собственных векторов (т.е. не все собственные векторы) и описанные выше числа, т.е. компоненты, не все верхние индексы которых равны друг другу. Еще одно различие между каноническими видами линейных и нелинейных отображений состоит в том, что в линейном случае нормировка собственных векторов была не важна, а в нелинейном случае она имеет большое значение.

3.5.1. Примеры канонических видов. Рассмотрим в качестве примера приведение к каноническому виду квадратичного отображения двух переменных:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1^{11}(x_1)^2 + 2A_1^{12}x_1x_2 + A_1^{22}(x_2)^2 \\ A_2^{11}(x_1)^2 + 2A_2^{12}x_1x_2 + A_2^{22}(x_2)^2 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Чтобы получить канонический вид нелинейного отображения, необходимо выбрать в качестве базисных любые n линейно независимых нулевых или единичных собственных векторов отображения. Как было выяснено в пп. 3.2, 3.4, для нахождения собственных векторов отображения (32) необходимо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} A_1^{11}(x_1)^2 + 2A_1^{12}x_1x_2 + A_1^{22}(x_2)^2 &= yx_1, \\ A_2^{11}(x_1)^2 + 2A_2^{12}x_1x_2 + A_2^{22}(x_2)^2 &= yx_2, \end{aligned} \quad (33)$$

которая представляет собой систему уравнений (29) для отображения (32), вспомогательная переменная здесь также называется y . Любое решение (x_1, x_2, y) системы (33) при $y \neq 0$ есть ненулевой собственный вектор отображения (32). Получить единичный собственный вектор можно, разделив все компоненты решения на y и получив $(x_1/y, x_2/y, 1)$ и $x_1/y, x_2/y$ — две компоненты единичного собственного вектора. Если имеется решение системы (33) с нулевой третьей компонентой, т.е. $(x_1, x_2, 0)$, то x_1, x_2 — компоненты нулевого собственного вектора.

В некоторых случаях отображение может быть представлено в нескольких формах из набора (34)–(36) (см. ниже). Например, если отображение имеет два единичных собственных вектора и один нулевой собственный вектор, то оно может быть представлено и в форме (34), и в форме (35).

1. Базис состоит из двух единичных собственных векторов. Такой выбор базиса фиксирует $A_1^{11} = 1$, $A_1^{22} = 0$, $A_2^{11} = 0$, $A_2^{22} = 1$. Канонический вид отображения в этом случае

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (x_1)^2 + 2A_1^{12}x_1x_2 \\ (x_2)^2 + 2A_2^{12}x_1x_2 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

2. *Базис состоит из единичного и нулевого собственных векторов.* Пусть единичный вектор будет первым вектором в базисе, а нулевой собственный вектор – вторым. Тогда известны значения следующих компонент: $A_1^{11} = 1$, $A_1^{22} = 0$, $A_2^{11} = 0$, $A_2^{22} = 0$. Канонический вид отображения в этом случае

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (x_1)^2 + 2A_1^{12}x_1x_2 \\ 2A_2^{12}x_1x_2 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

3. *Базис состоит из двух нулевых собственных векторов.* Этот выбор собственных векторов фиксирует $A_1^{11} = 0$, $A_1^{22} = 0$, $A_2^{11} = 0$, $A_2^{22} = 0$. Канонический вид отображения в этом случае

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2A_1^{12}x_1x_2 \\ 2A_2^{12}x_1x_2 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

3.6. Применения компланартов к теории собственных векторов. Как было объяснено в п. 3.3, все собственные векторы A можно найти, решая систему уравнений

$$A_i(x) = (y)^{s-1}x_i, \quad (37)$$

которая состоит из n однородных уравнений для $n + 1$ переменных и имеет компланарт (см. п. 2.3). Равенство нулю компланарта системы означает, что существуют $n + 1$ компланарных в пространстве $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ собственных векторов, т. е. существует набор не равных друг другу индексов $j_1, \dots, j_{n+1}$ такой, что

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_{n+1}} \Lambda_{i_1}^{(j_1)} \Lambda_{i_2}^{(j_2)} \dots \Lambda_{i_{n+1}}^{(j_{n+1})} = 0. \quad (38)$$

Здесь $\Lambda^{(j)}$ обозначает j -е решение системы (37), $\Lambda_i^{(j)}$ – i -я компонента $\Lambda^{(j)}$, i изменяется от 1 до $n + 1$, $\Lambda_{n+1}^{(j)}$ – y -компонента j -го решения. Пусть один из индексов j , например j_1 , соответствует решению системы (37) типа (31), а именно $(x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, y = 1)$. Тогда сумма по i_1 в выражении (38) сводится к одному члену:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n+1)i_2 \dots i_{n+1}} \Lambda_{n+1}^{j_1} \Lambda_{i_2}^{(j_2)} \dots \Lambda_{i_{n+1}}^{(j_{n+1})} &= \varepsilon^{(n+1)i_2 \dots i_{n+1}} \Lambda_{i_2}^{(j_2)} \dots \Lambda_{i_{n+1}}^{(j_{n+1})} = \\ &= \pm \sum_{i_2, \dots, i_{n+1}=1}^n \varepsilon^{i_2 \dots i_{n+1}} \Lambda_{i_2}^{(j_2)} \dots \Lambda_{i_{n+1}}^{(j_{n+1})}. \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь было использовано равенство $\Lambda_{n+1}^{j_1} = 1$, следующее из решения (31). Символ суммы в последней строке был написан явно, чтобы подчеркнуть, что теперь пространство ε n -мерное, а не $(n + 1)$ -мерное, как раньше, и сумма по индексам идет до n , а не до $n + 1$, как в первой строчке. Выражение (38) – это с точностью до знака условие того, что векторы $\Lambda_{i_2}^{(j_2)}, \dots, \Lambda_{i_{n+1}}^{(j_{n+1})}$ являются компланарными в n -мерном пространстве начальных координат $x_1, x_2, \dots, x_n$. Если решение (31) не входит в выражение (38), то формулу (38) нельзя понимать так просто. Итак, *обращение в нуль компланарта системы (37) означает, что существуют либо n собственных векторов, компланарных в обычном пространстве $x_1, \dots, x_n$, либо $n + 1$ собственных векторов, компланарных в пространстве со вспомогательной переменной, т. е. в пространстве $(x_1, \dots, x_n, y)$.*

3.6.1. *Пример.* Вышеприведенные рассуждения мы проиллюстрируем на примере невырожденного отображения двух переменных, $n = 2$ и $R\{A\} \neq 0$. Так как $R\{A\} \neq 0$, отображение имеет только ненулевые собственные векторы, которые могут быть перенормированы к единичным собственным векторам. Пусть три единичных собственных вектора $(x_1, x_2, 1)$, $(u_1, u_2, 1)$, $(z_1, z_2, 1)$ входят в формулу (38). Тогда формула (38) принимает вид

$$\begin{aligned} x_1 u_2 z_3 - x_1 u_3 z_2 + x_2 u_3 z_1 - x_2 u_1 z_3 + x_3 u_1 z_2 - x_3 u_2 z_1 = \\ = x_1 u_2 - x_2 u_1 + x_2 z_1 - x_1 z_2 + u_1 z_2 - u_2 z_1 = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Решение типа (31) в этом случае равно $(0, 0, 1)$. Пусть $(x_1, x_2, 1)$, $(z_1, z_2, 1)$ и решения типа (31) входят в формулу (38). Тогда ее можно записать как

$$x_1 z_2 - x_2 z_1 = 0, \quad (41)$$

т. е. она становится просто условием компланарности *двумерных* векторов (x_1, x_2) и (y_1, y_2) в *двумерном пространстве*. Равенство нулю компланарта системы (37) означает существование таких собственных векторов $(x_1, x_2, 1)$, $(u_1, u_2, 1)$, $(z_1, z_2, 1)$, что верна одна из формул (40), (41). Для вырожденного отображения поменяется только выражение (40). Еще один пример использования компланарта для поиска вырождений рассмотрен в п. 5.1.

3.7. Еще один метод исключения λ . В п. 3.2 был объяснен метод исключения λ из задачи на собственные векторы/собственные значения. Существует еще один способ исключения λ из этих уравнений и поиска собственных векторов. Этот метод был упомянут в книге [2] и основывается на следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Любой собственный вектор A есть решение системы*

$$A_i(z)z_j - z_i A_j(z) = 0, \quad (42)$$

и наоборот, любое такое решение является собственным вектором A .

Докажем это. Если z_i – собственный вектор A_i , то $A_i(z) = \lambda(z)z_i$. Подставляя это равенство в формулу (42), получаем $A_i(z)z_j - A_j(z)z_i = \lambda(z)z_i z_j - \lambda(z)z_j z_i = 0$. С другой стороны, пусть z_i – решение системы (42). Домножим обе стороны уравнения (42) на вектор v^i , перпендикулярный z_i . Получим $z_j A_i(z)v^i = A_j(z)z_i v^i = 0$. Поэтому $A_i(z)$ перпендикулярно любому вектору, который перпендикулярен z_i , и $A_i(z) = C z_i$. Теперь, решив уравнение $\lambda(z) = C$, мы получаем $\lambda(z)$, соответствующее этому собственному вектору. Тот факт, что для определения коэффициентов такого многочлена $\lambda(z)$ необходимо решать линейные уравнения, еще раз доказывает разложимость характеристического многочлена (23).

На первый взгляд система (42) – это $n(n-1)/2$ уравнений. Но только $n-1$ из них являются независимыми: можно зафиксировать i и получить $n-1$ уравнений для $j \neq i$, из которых будут следовать все остальные. Этот факт был впервые упомянут в книге [2], но без доказательства. Мы докажем его ниже (см. утверждение 4).

В качестве примера приведем единственное уравнение системы (42) для отображения (32):

$$A_2^{11}(x_1)^3 + (2A_2^{12} - A_1^{11})x_2(x_1)^2 + (A_2^{22} - 2A_1^{12})(x_2)^2x_1 - A_1^{22}(x_2)^3 = 0. \quad (43)$$

3.7.1. Единичные отображения. Используя систему уравнений (42), можно сформулировать условие того, что каждый вектор пространства будет собственным вектором отображения – это условие обращения в нуль всех коэффициентов всех уравнений в системе (42). Отображение, для которого каждый вектор является собственным, называется единичным отображением. Любое единичное отображение может быть представлено как $A_i(z) = \mu(z)z_i$, где $\mu(z)$ – однородный многочлен степени $s - 1$. Характеристический многочлен для единичных отображений – тождественный нуль $R\{A^i(z) - \lambda(z)z^i\} \equiv 0$. Действительно, $A_i(z) = \mu(z)z_i$: $R\{A^i(z) - \lambda(z)z^i\} = R\{\mu(z)z_i - \lambda(z)z^i\} = R\{(\mu(z) - \lambda(z))z_i\} = R\{\lambda'(z)z_i\}$. Система уравнений $\lambda'(z)z_i = 0$ всегда имеет нетривиальное решение, так как $\lambda'(z) = 0$ всегда имеет нетривиальное решение как одно уравнение от n переменных. Итак, $R\{\lambda'(z)z_i\} = 0$ и $R\{A^i(z) - \lambda(z)z^i\} \equiv 0$. Единичное отображение отображает каждый вектор в пропорциональный ему (правда, некоторые векторы оно отображает в нуль). Это обобщение понятия единичного отображения из линейной алгебры на нелинейную алгебру.

Запишем, например, условия того, что отображение (33) является единичным:

$$\begin{aligned} A_2^{11} &= 0, \\ 2A_2^{12} - A_1^{11} &= 0, \\ A_2^{22} - 2A_1^{12} &= 0, \\ A_1^{22} &= 0. \end{aligned}$$

Это просто условия обращения в нуль коэффициентов в уравнении (43).

4. МНОГОЧЛЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Собственные векторы как стационарные точки. Как уже было упомянуто во введении, при рассмотрении устойчивости стационарной точки системы дифференциальных уравнений естественно возникают такие системы уравнений:

$$\dot{x}_i = A_i^{i_1 i_2 \dots i_s} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s}. \quad (44)$$

Известно, что если степень отображения равна 1, т. е. мы имеем дело с линейным отображением, решение этого уравнения выражается через собственные векторы и собственные значения отображения A_i^j . В нелинейном случае собственные векторы также играют важную роль в решении этих уравнений, например, они полностью определяют фазовый портрет такой системы. Начнем с того, что перепишем эту систему в неоднородных переменных. Для этого сделаем замену переменной t : $dt' = \mu(x) dt$, где $\mu(x)$ – однородный многочлен степени $s - 1$. Тогда можно записать

$$\frac{\partial x_i}{\partial t'} = \frac{A_i(x)}{\mu(x)}. \quad (45)$$

Обе части данного уравнения – однородные выражения по x с одной и той же степенью однородности, т. е. они домножаются на одно и то же число, если сделать перенормировку x ²⁾: $x'_i = kx_i$. Обозначим $\xi_i \equiv x_i/x_1$:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t'} = \frac{\dot{x}_i x_1 - \dot{x}_1 x_i}{(x_1)^2} = \frac{A_i(x)x_1 - A_1(x)x_i}{\mu(x)(x_1)^2} = \frac{A_i(\xi) - A_1(\xi)\xi_i}{\mu(\xi)}. \quad (46)$$

Здесь использовались равенства $\xi_1 \equiv 1$ и $\dot{\xi}_1 \equiv 0$. В п. 3.7 доказано, что вектор x_i удовлетворяет соотношениям

$$A_i(x)x_j - x_i A_j(x) = 0 \quad (47)$$

тогда и только тогда, когда он является собственным вектором A . Стационарные точки уравнения (46) подчиняются уравнениям

$$A_i(x)x_1 - A_1(x)x_i = 0. \quad (48)$$

Эти уравнения суть уравнения (47) с зафиксированным $j = 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Все $n(n-1)/2$ уравнений (47) следуют из $n-1$ уравнений (47) с некоторым фиксированным j .

Система уравнений (48) – это система (47) с зафиксированным $j = 1$. Для любого другого j доказательство аналогично. Пусть x удовлетворяет уравнениям (48). Рассмотрим решение системы (45), которое в нулевой момент совпадает с x . Тогда $(\partial/\partial t')(x_i/x_1) = 0$ для любого i (см. уравнения (46)), и для любых i, j

$$\frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{x_i}{x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{x_i/x_1}{x_j/x_1} \right) = 0.$$

Поэтому, как следует из уравнений (46), $A_i(x)x_j - x_i A_j(x) = 0$.

Из уравнений (46) видно, что единичное отображение не сдвигает никаких точек в проективном пространстве, потому что для единичного отображения $A_i(x)x_j - x_i A_j(x) = 0$ и, следовательно, $\partial \xi_i / \partial t' = 0$. Систему уравнений (46) можно упростить, выбрав $\mu(x) = (x_1)^{s-1}$. Тогда $\mu(\xi) \equiv 1$, и система приобретает вид

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t'} = A_i(\xi) - A_1(\xi)\xi_i. \quad (49)$$

4.1.1. $n = 2$: уравнения сводятся к интегралам. В случае $n = 2$ есть только одна неоднородная переменная: $\xi \equiv x_2/x_1$. Система (49) теперь выглядит так:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t'} = A_2(\xi) - A_1(\xi)\xi = P(\xi),$$

где $P(\xi)$ – некоторый многочлен от ξ степени $s+1$ (или меньшей, если некоторые коэффициенты A равны нулю). Это уравнение затем решается методом разделения переменных:

$$\int \frac{d\xi}{P(\xi)} = t' + C.$$

²⁾Из-за этого μ и был выбран многочленом такой степени.

Когда $\xi(t')$ уже известно, можно найти $x_1(t')$, решая уравнение

$$\frac{\partial x_1}{\partial t'} = \frac{A_1(x)}{\mu(x)} = \frac{(x_1)^s A_1(\xi)}{(x_1)^{s-1}} = x_1 A_1(\xi),$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int A_1(\xi(t')) dt'.$$

Затем получаем

$$dt' = (x_1(t'))^{s-1} dt,$$

$$t + C = \int \frac{dt'}{(x_1(t'))^{s-1}}.$$

Отсюда можно найти $t'(t)$ и, вспомнив, что $x_2 = \xi x_1$, вернуться к начальным переменным $t, x_1(t), x_2(t)$. Этот случай можно использовать для проверки предсказаний общей теории.

4.2. Как эволюционирует собственный вектор. Как было показано в предыдущем разделе, если $x_i(t)$ – решение уравнений (44) с начальным условием $x_i^{(0)}$, пропорциональным собственному вектору e_i отображения A , то $x_i(t)$ эволюционирует как

$$\frac{x_i(t)}{x_1(t)} = \text{const}.$$

Это означает, что решение имеет форму $x_i(t) = g(t)x_i^{(0)} = f(t)e_i$. Если e_i – нулевой собственный вектор, то $x_i = x_i^{(0)}$ и не меняется с течением времени. Если e_i – единичный собственный вектор, то, подставляя $x_i(t) = f(t)e_i$ в уравнения (59), получаем уравнение для $f(t)$ с начальным условием. В линейном и нелинейном случаях уравнения различны. В линейном случае

$$\frac{df(t)}{dt} = \lambda_i f(t), \quad f(t)_{t=0} = f_0.$$

Здесь λ_i – собственное значение, которое соответствует этому собственному вектору. Решением этого уравнения является $f(t) = f_0 e^{\lambda_i t}$.

В нелинейном случае

$$\frac{df(t)}{dt} = f(t)^s, \quad f(t)_{t=0} = f_0,$$

и решение имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{(1/f_0^{s-1} - (s-1)t)^{1/(s-1)}} = \frac{f_0}{(1 - (s-1)(f_0)^{s-1}t)^{1/(s-1)}}.$$

Из этой формулы видно, что в нелинейном случае каждое решение имеет особенность в момент времени $t_0 = 1/[(s-1)f_0^{s-1}]$, т. е. решение растет до бесконечности за конечное время.

4.3. Нелинейное условие неустойчивости. Любая стационарная точка, в которой линейный член равен нулю (см. п. 1.4.1), а следующий за линейным член имеет единичный собственный вектор, неустойчива в своей комплексной окрестности. Чтобы показать это, достаточно взять в качестве начального условия вектор, пропорциональный единичному собственному вектору и $f_0 > 0$. Этот вектор может быть сделан сколь угодно малым. Тогда решение с таким начальным условием уйдет на бесконечность за некоторое конечное время (см. п. 4.2). Если отображение, соответствующее уравнению, имеет вещественный единичный собственный вектор, то эта точка неустойчива в своей вещественной окрестности. Вопрос об устойчивости стационарной точки, в окрестности которой главный нелинейный член не имеет единичных собственных векторов, пока открыт. Вообще говоря, случай, когда у отображения нет единичных собственных векторов, довольно редкий. Для этого отображение должно быть сильно вырожденным. Например, отображение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ ax_1x_2 \end{pmatrix}$$

не имеет единичных собственных векторов, а имеет два нулевых собственных вектора $(0, 1)$ и $(1, 0)$. В этом можно убедиться, решив уравнения (24), (25). Оно имеет только одну ненулевую компоненту из шести возможных. Итак, просуммируем наши знания об устойчивости/неустойчивости.

1. Если у отображения есть единичный собственный вектор, то начало координат неустойчиво.
2. Если у отображения ненулевой результат, то начало координат неустойчиво.
3. Если у отображения нет единичных собственных векторов, устойчивость/неустойчивость начала координат надо исследовать отдельно.

Необходимо отметить, что если результат не равен нулю, то все собственные векторы ненулевые, т. е. имеет место ситуация, описываемая в первом случае.

4.4. Пример уравнения с равным нулю линейным членом. Рассмотрим систему уравнений химической кинетики следующей системы реакций и реагентов:

где A, B, C, D – различные реагенты. X_1, X_2, X_3, X_4 – их относительные концентрации соответственно. Закон сохранения масс в такой системе задается уравнением типа³⁾

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1. \quad (50)$$

³⁾На самом деле, в реальной системе закон сохранения масс не будет формулироваться столь просто – в этом уравнении появятся коэффициенты. Более того, может быть несколько независимых уравнений закона сохранения массы, например по одному уравнению для каждого элемента, так что здесь приводится лишь сильно упрощенная модель.

Уравнения химической кинетики для этой системы имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= K_{34}X_3X_4 - K_{31}X_1X_3 + K_{24}X_2(X_4)^2, \\ \dot{X}_2 &= K_{34}X_3X_4 + K_{31}X_1X_3 - K_{24}X_2(X_4)^2, \\ \dot{X}_3 &= -K_{34}X_3X_4 - K_{31}X_1X_3 + K_{24}X_2(X_4)^2, \\ \dot{X}_4 &= -K_{34}X_3X_4 + 2K_{31}X_1X_3 - 2K_{24}X_2(X_4)^2,\end{aligned}\tag{51}$$

где точка обозначает производную по времени, K_{34}, K_{31}, K_{24} – константы скоростей химических реакций, которые в общем случае зависят от давления и температуры. Если мы пренебрежем этими зависимостями, получим уравнения вида (44). Из уравнения (50) X_4 может быть выражено через X_1, X_2, X_3 , и X_1, X_2, X_3 станут новыми независимыми переменными. Одной из стационарных точек такой системы является

$$\begin{aligned}X_1^{(0)} &= 0, \\ X_2^{(0)} &= 1, \\ X_3^{(0)} &= 0.\end{aligned}\tag{52}$$

Обозначим теперь $\delta_1 = X_1 - X_1^{(0)}, \delta_2 = X_2 - X_2^{(0)}, \delta_3 = X_3 - X_3^{(0)}$. Линейный член в разложении правых частей (51) равен нулю около точки (52). В новых переменных $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ система (51) выглядит так:

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_1 &= K_{24}\delta_1^2 + K_{24}\delta_2^2 + (K_{24} - K_{34})\delta_3^2 + 2K_{24}\delta_1\delta_2 + (2K_{24} - K_{34})\delta_2\delta_3 + \\ &\quad + (2K_{24} - K_{34} - K_{31})\delta_1\delta_3 + \text{кубические члены}, \\ \dot{\delta}_2 &= -K_{24}\delta_1^2 - K_{24}\delta_2^2 - (K_{24} + K_{34})\delta_3^2 - 2K_{24}\delta_1\delta_2 + (K_{31} - K_{34} - 2K_{24})\delta_3\delta_1 - \\ &\quad - (2K_{24} + K_{34})\delta_2\delta_3 + \text{кубические члены}, \\ \dot{\delta}_3 &= K_{24}\delta_1^2 + 2K_{24}\delta_1\delta_2 + (K_{34} + 2K_{24} - K_{31})\delta_3\delta_1 + K_{24}\delta_2^2 + (2K_{24} + K_{34})\delta_2\delta_3 + \\ &\quad + (K_{24} + K_{34})\delta_3^2 + \text{кубические члены}.\end{aligned}\tag{53}$$

Для анализа устойчивости стационарной точки системы (52) можно рассматривать только члены в уравнении низших степеней, в данном случае второй степени. После пренебрежения кубическими членами в уравнениях (53) получается уравнение с квадратичной однородной правой частью, т. е. уравнение типа (44).

4.4.1. *Исследование этого примера на устойчивость.* Попробуем применить к этому случаю результаты, полученные в п. 4.3. Для этого надо исследовать отображение

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} K_{24}\delta_1^2 + K_{24}\delta_2^2 + (K_{24} - K_{34})\delta_3^2 + 2K_{24}\delta_1\delta_2 + \\ + (2K_{24} - K_{34})\delta_2\delta_3 + (2K_{24} - K_{34} - K_{31})\delta_1\delta_3 \\ -K_{24}\delta_1^2 - K_{24}\delta_2^2 - (K_{24} + K_{34})\delta_3^2 - 2K_{24}\delta_1\delta_2 + \\ + (K_{31} - K_{34} - 2K_{24})\delta_3\delta_1 - (2K_{24} + K_{34})\delta_2\delta_3 \\ K_{24}\delta_1^2 + 2K_{24}\delta_1\delta_2 + (K_{34} + 2K_{24} - K_{31})\delta_3\delta_1 + \\ + K_{24}\delta_2^2 + (2K_{24} + K_{34})\delta_2\delta_3 + (K_{24} + K_{34})\delta_3^2 \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнения для единичных собственных векторов этого отображения:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= K_{24}\delta_1^2 + K_{24}\delta_2^2 + (K_{24} - K_{34})\delta_3^2 + 2K_{24}\delta_1\delta_2 + (2K_{24} - K_{34})\delta_2\delta_3 + \\ &\quad + (2K_{24} - K_{34} - K_{31})\delta_1\delta_3, \\ \delta_2 &= -K_{24}\delta_1^2 - K_{24}\delta_2^2 - (K_{24} + K_{34})\delta_3^2 - 2K_{24}\delta_1\delta_2 + (K_{31} - K_{34} - 2K_{24})\delta_3\delta_1 - \\ &\quad - (2K_{24} + K_{34})\delta_2\delta_3, \\ \delta_3 &= K_{24}\delta_1^2 + 2K_{24}\delta_1\delta_2 + (K_{34} + 2K_{24} - K_{31})\delta_3\delta_1 + K_{24}\delta_2^2 + (2K_{24} + K_{34})\delta_2\delta_3 + \\ &\quad + (K_{24} + K_{34})\delta_3^2.\end{aligned}$$

Можно заметить, что $f_2 + f_3 = 0$, т.е. результат этого отображения равен нулю. Поэтому второе правило из рассмотренных в п. 4.3 не применимо. Из уравнений видно, что $\delta_3 = -\delta_2$. Подставим это равенство в первые два уравнения. Тогда, исключив δ_1 , можно получить для δ_2 уравнение

$$2(K_{34}^2 + K_{31}K_{34})\delta_2^2 + (K_{24} - 3K_{34} - K_{31})\delta_2 + 1 = 0.$$

Оно имеет корни всегда, поэтому положение равновесия $(0, 1, 0)$ неустойчиво в комплексной окрестности (так как имеются комплексные собственные векторы). Уравнение имеет действительные корни, когда $(K_{24} - 3K_{34} - K_{31})^2 - 8(K_{34}^2 + K_{31}K_{34}) \geq 0$, и тогда точка равновесия неустойчива в своей действительной окрестности (что нас и интересовало изначально в химической задаче). Для случая, когда $(K_{24} - 3K_{34} - K_{31})^2 - 8(K_{34}^2 + K_{31}K_{34}) < 0$ в действительной окрестности, ответа пока нет ни в частном случае, ни в общем.

5. ПРИМЕР АНАЛИЗА ВЫРОЖДЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В этом разделе рассматривается пример квадратичного отображения двух переменных. Тем не менее все результаты, сформулированные в п. 5.1, можно получить для любого нелинейного отображения в любых координатах. Разница (между этим примером и общей ситуацией) состоит в том, что развитые методы позволяют полностью проанализировать данный пример, а для полного анализа общего случая необходимо применять высшие результаты, высшие компланарты и т.д. Мы рассматриваем два случая: когда в базисе есть только два единичных собственных вектора и когда вообще нет единичных собственных векторов.

Итак, пример:

$$\begin{aligned}x_1 &\rightarrow x_1^2 + 2ax_1x_2, \\ x_2 &\rightarrow x_2^2 + 2bx_1x_2,\end{aligned}\tag{54}$$

где a и b суть параметры, задающие отображение вместо собственных значений (см. п. 3.5).

5.1. Общий анализ. По построению канонического вида отображение (54) имеет два единичных собственных вектора, а именно $e^{(1)} \equiv (1, 0)$ и $e^{(2)} \equiv (0, 1)$. Они являются единичными собственными векторами при любых значениях a и b . В

общем случае это отображение имеет $c_{n|s} = (s^n - 1)/(s - 1) = 3$ ($s = 2$, $n = 2$) собственных вектора.

Запишем уравнения (24), (25), (29) для данного отображения. Система (24) приобретает вид

$$\begin{aligned}x_1^2 + 2ax_1x_2 &= x_1, \\x_2^2 + 2bx_1x_2 &= x_2.\end{aligned}$$

Чтобы найти единичные собственные векторы, надо решить ее. Система (25) для данного случая запишется как

$$\begin{aligned}x_1^2 + 2ax_1x_2 &= 0, \\x_2^2 + 2bx_1x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Чтобы найти нулевые собственные векторы, надо решить ее. Систему уравнений (29) можно записать в виде

$$\begin{aligned}x_1^2 + 2ax_1x_2 &= x_1y, \\x_2^2 + 2bx_1x_2 &= x_2y,\end{aligned}\tag{55}$$

и все собственные векторы (нулевые, ненулевые и единичные) являются ее решениями. Вспомогательная переменная, добавленная для однородности, здесь тоже называется y . Решение (x_1, x_2, y) данной системы при $y = 0$ соответствует нулевому собственному вектору (x_1, x_2) . Решение (x_1, x_2, y) системы при $y \neq 0$ соответствует ненулевому собственному вектору (x_1, x_2) . Так как (55) – система однородных уравнений, ее решения могут быть домножены на любое ненулевое число. Чтобы получить единичный собственный вектор, надо перенормировать решение (x_1, x_2, y) с $y \neq 0$ делением на y : тогда решением станет $(x_1/y, x_2/y, 1)$, а единичным собственным вектором – $(x_1/y, x_2/y)$.

5.1.1. *Что можно заранее сказать о собственных векторах по компланарту.* Система (55) – это система двух однородных уравнений с тремя неизвестными. Такие системы уравнений имеют компланарт. Для данной системы мы посчитали его в п. 2.3.5:

$$C = (1 - 2a)^4(1 - 2b)^4.$$

Когда компланарт равен нулю, система (55) имеет три компланарных в пространстве x_1, x_2, y корня. В общем случае система двух квадратных уравнений (55) имеет $2 \times 2 = 4$ решения. Два из них соответствуют известным единичным собственным векторам $e^{(1)} \equiv (1, 0)$ и $e^{(2)} \equiv (0, 1)$: $\Lambda^{(1)} \equiv (1, 0, 1)$ и $\Lambda^{(2)} \equiv (0, 1, 1)$. В этом случае должен быть еще один собственный вектор, так как отображение (54) в общем случае имеет $c_{n|s} = c_{2|2} = 3$ собственных вектора. Обозначим его как $e^{(3)} \equiv (e_1^{(3)}, e_2^{(3)})$. Тогда решение системы (55), соответствующее этому собственному вектору, есть $\Lambda^{(3)} \equiv (e_1^{(3)}, e_2^{(3)}, e_3^{(3)})$. Если $e^{(3)}$ – нулевой собственный вектор, то $e_3^{(3)} = 0$, если $e^{(3)}$ – ненулевой собственный вектор, то $e_3^{(3)} \neq 0$, и $e_3^{(3)} = 1$, если $e^{(3)}$ – единичный собственный вектор. Еще одно решение системы (55) – $\Lambda^{(4)} \equiv (0, 0, 1)$; это решение типа (31) для такой системы. Зануление компланарта означает, что $\varepsilon^{i_1 i_2 i_3} \Lambda_{i_1}^{(j_1)} \Lambda_{i_2}^{(j_2)} \Lambda_{i_3}^{(j_3)} = 0$

по крайней мере с одной тройкой индексов j_1, j_2, j_3 , $j_1 \neq j_2, j_1 \neq j_3, j_2 \neq j_3$. Конкретнее, обращение в нуль компланарта означает обращение в нуль по крайней мере одного из следующих выражений:

$$\varepsilon^{i_1 i_2 i_3} \Lambda_{i_1}^{(1)} \Lambda_{i_2}^{(2)} \Lambda_{i_3}^{(3)} = e_1^{(3)} - e_2^{(3)} - e_3^{(3)}, \quad (56)$$

$$\varepsilon^{i_1 i_2 i_3} \Lambda_{i_1}^{(1)} \Lambda_{i_2}^{(2)} \Lambda_{i_3}^{(4)} = 1, \quad (57)$$

$$\varepsilon^{i_1 i_2 i_3} \Lambda_{i_1}^{(2)} \Lambda_{i_2}^{(3)} \Lambda_{i_3}^{(4)} = e_1^{(3)}, \quad (58)$$

$$\varepsilon^{i_1 i_2 i_3} \Lambda_{i_1}^{(1)} \Lambda_{i_2}^{(3)} \Lambda_{i_3}^{(4)} = e_2^{(3)}. \quad (59)$$

Решение $\Lambda^{(4)}$ входит в (57)–(59), поэтому эти уравнения представляют собой условия того, что пары корней компланарны, т.е. когда два вектора лежат на одной прямой (см. обсуждение в п. 3.6). Уравнение (57) отвечает за компланарность $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$, (58) – за компланарность $e^{(2)}$ и $e^{(3)}$, и (59) – за компланарность $e^{(1)}$ и $e^{(3)}$. Условие (56) не может быть истолковано таким образом. Итак, если $a = 1/2$ или $b = 1/2$, то компланарт равен нулю, и можно ожидать, что либо $e^{(2)}$ и $e^{(3)}$, либо $e^{(1)}$ и $e^{(3)}$ будут коллинеарны, либо будет верно равенство (56).

5.1.2. *Что можно заранее сказать о собственных векторах по результату.* Результат отображения (54) равен

$$R\{A\} = 1 - 4ab.$$

В п. 3.4 было сказано, что нулевые собственные векторы существуют тогда и только тогда, когда результат отображения равен нулю. Поэтому, если $1 - 4ab = 0$, то отображение будет иметь хотя бы один нулевой собственный вектор, а если $1 - 4ab \neq 0$, то не будет ни одного нулевого собственного вектора.

5.1.3. *Что можно сказать о собственных векторах по уравнению $x_i A_j - x_j A_i$ заранее.* В п. 3.7.1 было показано, что если многочлены $x_i A_j(x) - x_j A_i(x)$ тождественно равны нулю, то отображение A – единичное. Для отображения (54) есть только одно уравнение:

$$x_1 A_2(x) - x_2 A_1(x) \equiv x_1(x_2^2 + 2bx_1x_2) - x_2(x_1^2 + 2ax_1x_2) \equiv x_1x_2^2(1-2a) - x_1^2x_2(1-2b) = 0.$$

Поэтому, если $a = 1/2$ и $b = 1/2$, то отображение A является единичным, и, следовательно, любой вектор пространства будет собственным вектором отображения A (см. раздел 3.7.1), любой многочлен $\mu(x)$ степени $s-1$ – собственным значением, а характеристический многочлен будет равен нулю тождественно.

5.2. Собственные векторы. Кроме двух решений $(x_1, x_2, y) = (0, 1, 1)$ и $(x_1, x_2, y) = (1, 0, 1)$, система (57) имеет еще решения вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2a \\ 1 - 2b \\ 1 - 4ab \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Если $y = 0$, то данное решение соответствует нулевому вектору

$$v^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} 1 - 2a \\ 1 - 2b \end{pmatrix}$$

(конечно, нормировка совершенно произвольна). В этом случае $e_3^{(3)} = 0$. Если $y \neq 0$, решение (60) соответствует ненулевому собственному вектору. В этом случае вектор решения может быть перенормирован как

$$\begin{pmatrix} (1 - 2a)/(1 - 4ab) \\ (1 - 2b)/(1 - 4ab) \\ 1 \end{pmatrix},$$

чтобы получить единичный собственный вектор

$$e^{(3)} \equiv \begin{pmatrix} (1 - 2a)/(1 - 4ab) \\ (1 - 2b)/(1 - 4ab) \end{pmatrix}. \quad (61)$$

В этом случае $e_3^{(3)} = 1$. Согласно п. 5.1.2 нулевой собственный вектор существует тогда и только тогда, когда $1 - 4ab = 0$, т.е. когда результат равен нулю. В соответствии с п. 5.1.1, если $a = 1/2$ или $b = 1/2$, то существуют два совпадающих собственных вектора. Если $a = 1/2$, вектор (61) совпадает с $e^{(2)}$, а если $b = 1/2$, то с $e^{(1)}$.

Случай $a = 1/2$ и $b = 1/2$ (см. п. 5.1.3) требует отдельного рассмотрения. Все компоненты решения (60) теперь равны нулю. Уравнения на собственные векторы и собственные значения с $a = 1/2$, $b = 1/2$ имеют вид

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_1 x_2 &= x_1 y, \\ x_2^2 + x_1 x_2 &= x_2 y. \end{aligned}$$

Случай единичного отображения – это случай уменьшения ранга системы (55). К сожалению, сейчас нет методов определения случаев уменьшения ранга нелинейной системы в каждом случае, т.е. в общем случае мы не можем сказать, когда система имеет множество решений, большее, чем должно бы быть, т.е. с размерностью, превосходящей число переменных минус число уравнений. Такие методы есть только в некоторых частных случаях. Введение понятия компланарта – попытка добавить к этим частным случаям еще один, но, как видно из этого примера, он не различает случаев совпадения корней и уменьшения ранга.

Сейчас нас интересуют только собственные векторы, не равные известным $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Поэтому можно разделить первое уравнение на x_1 и второе уравнение на x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= y, \\ x_1 + x_2 &= y. \end{aligned}$$

Уравнение $x_1 + x_2 = y$ имеет проективно-одномерное множество решений: можно положить $y = 1$ (чтобы получить единичные собственные векторы), $x_2 = C$, тогда x_1

будет равен $1 - C$. Для любого C вектор

$$\begin{pmatrix} C \\ 1 - C \end{pmatrix}$$

является единичным собственным вектором. Но есть также и нулевой собственный вектор $(x_1, x_2, y) = (-1, 1, 0)$. Произвольный вектор пространства (x_1, x_2) является нулевым собственным вектором, если $x_1 + x_2 = 0$, и (x_1, x_2) – ненулевой собственный вектор, если $x_1 + x_2 \neq 0$.

5.3. Собственные значения. Многочлен λ , соответствующий единичному собственному вектору $e^{(i)}$, можно найти из уравнения $\lambda(e^{(i)}) = 1$ (см. п. 3.2). Для $e^{(1)}$ это уравнение выглядит как $\lambda_1 = 1$, т. е. собственному вектору $e^{(1)}$ соответствует прямая $\lambda_1 = 1$ на плоскости λ_1, λ_2 . Для $e^{(2)}$ $\lambda_2 = 1$, собственному вектору $e^{(2)}$ соответствует прямая $\lambda_2 = 1$ на плоскости λ_1, λ_2 . Для $e^{(3)}$ $\lambda_1(1 - 2a)/(1 - 4ab) + \lambda_2(1 - 2b)/(1 - 4ab) = 1$, или

$$\lambda_1(1 - 2a) + \lambda_2(1 - 2b) = 1 - 4ab. \quad (62)$$

Это тоже прямая на плоскости λ_1, λ_2 . Чтобы найти λ , соответствующее нулевому собственному вектору, надо решить уравнение $\lambda(v^{(i)}) = 0$, т. е. в этом случае $\lambda_1(1 - 2a) + \lambda_2(1 - 2b) = 0$. Но (62) равносильно этому уравнению, так как результат, а именно $1 - 4ab$, обращается в нуль, если имеется нулевой собственный вектор. Это не случайное совпадение, просто выражение $\lambda_1(1 - 2a) + \lambda_2(1 - 2b) - (1 - 4ab)$ входит как множитель в характеристический многочлен. Легко видеть, что в случае $a = 1/2$ и $b = 1/2$, когда отображение является единичным, любое λ является собственным значением.

5.4. Характеристический многочлен. Система уравнений (2) для отображения (54) имеет вид

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2ax_1x_2 &= (\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2)x_1, \\ x_2^2 + 2bx_1x_2 &= (\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2)x_2. \end{aligned}$$

Характеристический многочлен – результат этой системы – равен

$$\text{Ch}_A(\lambda) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - 4ab - \lambda_1(1 - 2a) - \lambda_2(1 - 2b)).$$

Подчеркнем еще раз: разложимость характеристического многочлена на множители – его нетривиальное свойство. Многочлен $1 + (\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2$, например, нельзя разложить на линейные по λ_1, λ_2 множители.

Если результат не равен нулю, то

$$\text{Ch}_A(\lambda) = (1 - 4ab)(1 - \lambda(e^{(1)}))(1 - \lambda(e^{(2)}))(1 - \lambda(e^{(3)}))$$

в полном согласии с формулой (30). Если результат равен нулю, то

$$\text{Ch}_A(\lambda) = (1 - \lambda(e^{(1)}))(1 - \lambda(e^{(2)}))\lambda(v^{(1)})$$

Рис. 1. Фазовый портрет системы при $a = b = -1$. Это случай общего положения, нет никаких вырождений. Есть три собственных вектора: $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(3/5, 3/5)$.

в полном согласии с формулой (28). Если $a = 1/2$ и $b = 1/2$ (т.е. отображение единичное), характеристический многочлен тождественно равен нулю в полном согласии с п. 3.7.1.

5.5. Фазовый портрет. Дифференциальное уравнение, соответствующее отображению (54), выглядит так:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + 2ax_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2^2 + 2bx_1x_2.\end{aligned}$$

5.5.1. Случай $a \neq 1/2$, $b \neq 1/2$, $1 - 4ab \neq 0$. Это случай отсутствия каких бы то ни было вырождений и особенностей. У отображения три единичных собственных вектора: $(1, 0)$; $(0, 1)$; $((1-2a)/(1-4ab), (1-2b)/(1-4ab))$. На рис. 1 показан фазовый портрет этой системы при $a = -1$, $b = -1$.

5.5.2. Случай $a \neq 1/2$, $b \neq 1/2$, $1 - 4ab = 0$. В этом случае отображение вырождено, т.е. оно имеет нулевой собственный вектор $(1 - 2a, 1 - 2b)$ в полном согласии с п. 5.1.2. Каждая точка, которая лежит на линии $x_1/(1 - 2a) = x_2/(1 - 2b)$ (линии нулевых собственных векторов), есть положение равновесия. На рис. 2 показан фазовый портрет этой системы при $a = -1$, $b = -1/4$.

5.5.3. Случай $a \neq 1/2$, $b = 1/2$. Так как компланарт отображения равен нулю, существует собственный вектор отображения двойной кратности в полном согласии с п. 5.1.1. В этом случае у отображения есть только два единичных собственных вектора: $(0, 1)$ – “простой” собственный вектор (с кратностью 1) и $(1, 0)$ – с кратностью 2. Собственные векторы второй кратности имеют особое свойство: фазовые траектории стремятся в проективном пространстве к этому собственному вектору с одной стороны и удаляются от него с другой стороны. На рис. 3 в правом верхнем

Рис. 2. Фазовый портрет при $a = -1, b = -1/4$. Отображение вырождено, поэтому у него есть нулевой собственный вектор $(3, 2)$. Все точки линии $x/3 = y/2$ – положения равновесия.

углу траектории стремятся к собственному вектору $(1, 0)$ в проективном пространстве (а именно $x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \infty, x_2/x_1 \rightarrow 0$), а в нижнем правом углу удаляются от него. Уравнение для $x_2/x_1 \equiv \zeta$ в окрестности нуля выглядит следующим образом:

$$\dot{\zeta} = C\zeta^2, \quad (63)$$

где C – постоянная, зависящая от a и b . Это проективное уравнение объясняет такое поведение: $\dot{\zeta}$ имеет одинаковые знаки по обе стороны от точки равновесия, поэтому решение с одной стороны приближается к стационарной точке, а с другой стороны удаляется от нее. Рядом с двойными собственными векторами коэффициент перед линейным членом в уравнении (63) всегда равен нулю. На рис. 3 показан фазовый портрет системы при $a = 1, b = 1/2$. Случай $a = 1/2, b \neq 1/2$ сводится к нему переобозначением $x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1$.

5.5.4. Случай $a = 1/2, b = 1/2$. В соответствии с предсказаниями п. 5.1.3 это отображение единичное, и любой вектор является собственным. На рис. 4 показан фазовый портрет в этом случае.

5.5.5. Фазовый портрет без единичных собственных векторов. Здесь приведен пример отображения, у которого нет единичных собственных векторов, а все собственные векторы нулевые. Для таких отображений (как упомянуто в п. 4.3) пока нельзя сказать, устойчиво начало координат или нет. Вот это отображение:

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow 0, \\ x_2 &\rightarrow bx_1x_2. \end{aligned} \quad (64)$$

Рис. 3. Фазовый портрет при $a = 1$, $b = 1/2$. Особенность данного портрета – траектории сверху приближаются с обеих сторон к вектору $(1, 0)$, а снизу удаляются от него.

Рис. 4. Фазовый портрет при $a = 1/2$, $b = 1/2$. В отличие от предыдущих случаев все траектории – прямые линии, потому что отображение единичное и все векторы пространства собственные. Векторы, пропорциональные $(-1, 1)$ – нулевые собственные векторы; все остальные – ненулевые.

Рис. 5. Фазовый портрет отображения (64). Здесь ось Oy – вертикальная прямая, на которой нет стрелок. Начало координат неустойчиво.

В качестве базиса здесь выбраны два нулевых собственных вектора. Больше никаких собственных векторов нет. В случае данной конкретной системы точка $(0, 0)$ оказывается неустойчивой. Фазовый портрет этой системы показан на рис. 5.

Благодарности. Автор благодарен А. Ю. Морозову и Ш. Р. Шакирову за проявленный интерес к теме и плодотворные обсуждения. Работа поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3036.2008.2) и РФФИ (грант № 09-02-00393).

Список литературы

- [1] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Mathematics: Theory and Appl., Birkhäuser, Boston, 1994.
- [2] V. Dolotin, A. Morozov, *Introduction to Non-Linear Algebra*, World Sci., Hackensack, NJ, 2007; [arXiv: hep-th/0609022](#).
- [3] И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, Гостехиздат, М.-Л., 1948.
- [4] E. Artin, *Galois Theory*, Dover, Mineola, NY, 1998.
- [5] Ш. Р. Шакиров, *ТМФ*, **153**:2 (2007), 147–157.
- [6] A. M. Lyapunov, *Stability of Motion*, Math. Sci. Eng., **30**, Academic Press, New-York-London, 1966.
- [7] V. Dolotin, *QFT's with Action of Degree 3 and Higher and Degeneracy of Tensors*, [arXiv: hep-th/9706001](#).
- [8] A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **12** (2009), 002; [arXiv: 0903.2595](#).
- [9] A. Cayley, *Cambridge Math. J.*, **4** (1845), 193–209; “On the theory of linear transformations”, *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*, V. I, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1888, 80–94.
- [10] V. Dolotin, *On discriminants of polylinear forms*, [arXiv: alg-geom/9511010](#).
- [11] V. Dolotin, *On invariant theory*, [arXiv: alg-geom/9512011](#).
- [12] D. Manocha, “Algebraic and numeric techniques for modeling and robotics”, Doctoral dissertation, 1992.
- [13] А. Морозов, *УФН*, **162**:8 (1992), 84–175.
- [14] L. Castellani, P. A. Grassi, L. Sommovigo, *Phys. Lett. B*, **678**:3 (2009), 308–312; [arXiv: 0904.2512](#); L. Borsten, D. Dahanayake, M. J. Duff, H. Ebrahim, W. Rubens, *Phys. Rep.*, **471**:3–4 (2009), 113–219; [arXiv: 0809.4685](#); P. Lévy, P. Vrana, *Phys. Rev. A*, **78**:2 (2008), 022329; [arXiv: 0806.4076](#); A. Miyake, M. Wadati, *Quantum Inf. Comput.*, **2**, suppl. (2002), 540–555; V. Coffman, J. Kundu, W. Wootters, *Phys. Rev. A*, **61**:5 (2000), 052306; [arXiv: quant-ph/9907047](#).
- [15] А. С. Анохина, А. Ю. Морозов, Ш. Р. Шакиров, *ТМФ*, **160**:3 (2009), 403–433; [arXiv: 0812.5013](#).
- [16] A. Morozov, Sh. Shakirov, *Resultants and Contour Integrals*, [arXiv: 0807.4539](#); A. Morozov, Sh. Shakirov, *Analogue of the identity Log Det=Trace Log for resultants*, [arXiv: 0804.4632](#).

Поступила в редакцию 3.08.2009